

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Ibn Khaldoun Tiaret  
Faculté des Sciences Appliquées  
Département de Génie Civil

---

Polycopié de

Cours sur la Théorie  
de Plasticité

Préparé par :

Dr. RABAHI Abderezak

Expertisé par :

Pr. TLIDJI Youcef

Dr. BENFERHAT Rabia

---

Décembre 2025

# **PRÉFACE**

S'appuyant sur la documentation riche et disponible dans le domaine, nous avons mis au point ce travail, présenté comme un support du cours sur la Théorie de la Plasticité. Ce dernier a pour objet d'initier l'étudiant aux notions théoriques de la théorie de la plasticité des structures. Des connaissances préalables recommandées pour les étudiants afin de mieux comprendre la théorie de plasticité tels que l'algèbre, Mécanique des milieux continus, Mécanique rationnelle, Mécanique des fluides et Résistance des matériaux.

On définit dans cette polycopie cinq chapitres essentiels, chapitre 1 sera consacré pour les différents essais mécaniques et le chapitre 2 sera consacré pour les différents modèles rhéologique afin de modéliser la plasticité des matériaux, chapitre 3 sera consacré pour les différents critères de plasticité et chapitre 4 et 5 seront initiation de la plasticité des barres et des poutres respectivement.

Avec les développements détaillés des mécaniques des milieux continues accompagnés de quelques exercices ; ce polycopié constitue une référence pédagogique orientée au niveau de l'université de Tiaret, dont l'objectif de faciliter toutes consultations ou enseignement du module concerné.

Ce polycopié s'adresse aux étudiants de Master 1 option Voies et Ouvrages d'Art. Il est rédigé de manière que l'attention du lecteur se concentre sur les applications pratiques du sujet traité.

## Table des matières

### *Chapitre I : Les essais mécaniques*

I.1.	<i>Généralité</i> .....	1
I.2.	<i>Essais mécaniques uniaxiaux</i> .....	1
I.2.2.	<i>Essai de fluage</i> .....	9
I.2.3.	<i>Essai de résilience</i> .....	14
I.3.	<i>Essais multiaxiaux</i> .....	18
I.3.1.	<i>Traction bi axiale</i> .....	18
I.3.2.	<i>Traction-torsion</i> .....	19
I.4.	<i>Exercices</i> .....	19

### *Chapitre II : Les modèles rhéologiques*

II.1.	<i>Généralité</i> .....	25
II.2.	<i>Les briques de base du comportement non linéaire</i> .....	25
II.3.	<i>Plasticité uniaxiale</i> .....	26
II.3.1.	<i>Modèle élastique–parfaitement plastique</i> .....	26
II.4.	<i>Viscoélasticité uniaxiale</i> .....	29
II.4.1.	<i>Un exemple de modèle rhéologique</i> .....	29
II.4.2.	<i>Écriture générale des équations de l'élastoplasticité uniaxiale</i> .....	30
II.4.3.	<i>Modèles composés</i> .....	31
II.5.	<i>Exercices</i> .....	32

### *Chapitre III : Les Critères de plasticité*

III.1.	<i>Introduction</i> .....	35
III.2.	<i>Contraintes principales</i> .....	35
III.3.	<i>Critères de Plasticité</i> .....	36
III.3.1.	<i>Critère Von Mises</i> .....	36
III.3.2.	<i>Critère de Tresca</i> .....	37
III.3.3.	<i>Comparaison des critères de Tresca et Von Mises :</i> .....	37
III.4.	<i>Critères faisant intervenir la pression hydrostatique</i> .....	39
III.4.1.	<i>Critère de Drucker–Prager</i> .....	39
III.4.2.	<i>Critère de Mohr–Coulomb</i> .....	40
III.5.	<i>Modélisation de l'écrouissage</i> .....	41

<i>III.5.1. Écrouissage isotrope .....</i>	42
<i>III.5.2. Écrouissage cinématique.....</i>	44
<i>III.6. Exercices.....</i>	46
 <i>Chapitre IV : Plasticité des barres</i>	
<i>IV.1. Introduction .....</i>	49
<i>IV.2. Essai de traction .....</i>	49
<i>IV.2. Modélisation du comportement en traction–compression.....</i>	51
<i>IV.2.1. Modèles avec écrouissage .....</i>	52
<i>IV.2.2. Modèles parfaits .....</i>	54
<i>IV.3. Exercice .....</i>	55
 <i>Chapitre V : Plasticité des poutres</i>	
<i>V.1. Introduction.....</i>	58
<i>V.2. Rappels et notations .....</i>	58
<i>V.3. Modèle élasto-plastique .....</i>	59
<i>V.4. Flexion pure .....</i>	60
<i>V.5. Flexion simple .....</i>	64
<i>V.6. Exercice.....</i>	69
<i>Bibliographie</i>	

## **Liste des Tableaux**

<b>Tableau I.1 :</b> La classification des matériaux selon le coefficient d'allongement.....	8
<b>Tableau I.2 :</b> Valeur typique du module d'élasticité pour différent métaux.....	9
<b>Tableau V.1:</b> Facteurs de forme plastiques pour différentes sections.....	64

## Liste de Figures

<b>Figure I.1 :</b> Dispositif de traction du Centre des Matériaux .....	2
<b>Figure I.2 :</b> Éprouvettes de traction cylindriques et plates. ....	3
<b>Figure I.3 :</b> Exemple d'une éprouvette de traction. ....	3
<b>Figure I.4 :</b> Schéma représentant 2 types différents de courbes de traction. ....	4
<b>Figure I.5.</b> Courbe de traction (force-déformation) pour la zone d'écrouissage.....	5
<b>Figure I.6.</b> Courbe de traction (force-déformation) pour la zone de stinction. ....	6
<b>Figure I.7 :</b> Eprouvette de traction cylindrique et de son évolution en cours d'essai.....	7
<b>Figure I.8 :</b> Lois de comportement (contrainte_déformation) .....	8
<b>Figure I.9 :</b> Dispositif d'essai de fluage. ....	11
<b>Figure I.10 :</b> Dispositif de mesure de la déformation pour essai de fluage. ....	12
<b>Figure I.11.a :</b> Courbe schématique représentant les différents stades de fluage .....	13
<b>Figure I.11.b :</b> Fluage d'une fonte à 800°C. ....	13
<b>Figure I.12 :</b> Eprouvettes Charpy standardisées. ....	15
<b>Figure I.13 :</b> Principe de l'essai (en haut) et du montage de l'éprouvette (en bas). ....	15
<b>Figure I.14 :</b> Disposition avant et après l'essai Charpy .....	16
<b>Figure I.15 :</b> Éprouvette Charpy normalisée (A gauche : entaille en U ; A droite : en V) ....	17
<b>Figure I.16 :</b> Exemple des éprouvettes après l'essai de résilience. ....	17
<b>Figure I.17 :</b> éprouvette de traction biaxiale montée. ....	18
<b>Figure I.18 :</b> dispositif de traction-torsion du Centre des Matériaux. ....	19
<b>Figure II.1.</b> Les modèles de base pour la représentation des comportements .....	26
<b>Figure II.2.</b> Associations en série ou parallèle de patin et ressort. ....	27
<b>Figure II.3.</b> Fonctionnement des modèles de Maxwell et Voigt. ....	30
<b>Figure II.4.</b> Exemple de modèles composés .....	31
<b>Figure III.1:</b> Etats de contraintes caractéristiques dans le plan déviateur. ....	36
<b>Figure III.2 :</b> Comparaison des critères de Tresca (en pointillés) et de von Mises (traits pleins). En traction-cisaillement, (b) En traction biaxiale.....	38
<b>Figure III.3 :</b> Représentation du critère de Drucker-Prager, (a) dans l'espace des contraintes principales, (b) dans le plan II-J.....	39
<b>Figure III.4 :</b> Représentation du critère de Mohr-Coulomb, (a) dans le plan de Mohr, (b) dans le plan déviateur .....	41

<b>Figure III.5 :</b> Essai de traction-torsion sur cuivre : surface seuil initiale. En trait plein la surface seuil prédite par le critère de von Mises. ....	42
<b>Figure III.6 :</b> Expansion du domaine d'élasticité de von Mises : écrouissage isotrope. ....	43
<b>Figure III.7 :</b> Translation du domaine d'élasticité de von Mises : écrouissage cinématique. ....	44
<b>Figure III.8 :</b> Écrouissage cinématique : essai de traction.....	45
<b>Figure IV.1:</b> Eprouvette de traction .....	49
<b>Figure IV.2:</b> Traction avec décharge. ....	49
<b>Figure IV.3:</b> Réponse à une série de charges-décharges consécutives.....	50
<b>Figure IV.4:</b> Historique d'un cycle de chargement OA-AB-BC .....	51
<b>Figure IV.5:</b> Modèle d'écrouissage multi-linéaire .....	52
<b>Figure IV.6:</b> Modèles d'écrouissage monotone .....	52
<b>Figure IV.7:</b> Hypothèse d'écrouissage isotrope .....	53
<b>Figure IV.8:</b> Hypothèse d'écrouissage cinématique .....	54
<b>Figure IV.9:</b> Modèle de courbe d'écrouissage monotone .....	54
<b>Figure IV.10 :</b> Structure treillis de trois barres .....	55
<b>Figure V.1:</b> modèle de Bernoulli : flexion plane. ....	58
<b>Figure V.2:</b> Essai de flexion .....	59
<b>Figure V.3:</b> modèle de courbe d'écrouissage monotone. ....	60
<b>Figure V.4 :</b> Essai de flexion pure .....	60
<b>Figure V.5:</b> Flexion pure et zones plastiques symétriques .....	61
<b>Figure V.6:</b> Loi de comportement généralisée $\tilde{\sigma} = f(\tilde{\varepsilon})$ . ....	62
<b>Figure V.7:</b> superposition des diagrammes élasto-plastique et élastique correspondant à un chargement $-M$ .....	63
<b>Figure V.8:</b> Essai de flexion simple. ....	65
<b>Figure V.9 :</b> évolution des zones de plastification en flexion simple.....	65
<b>Figure V.10:</b> Zone plastique en flexion simple .....	66
<b>Figure V.11:</b> Essai de flexion pure .....	67
<b>Figure V.12:</b> Phases d'évolution et flèche résiduelle .....	68

## Chapitre I

*Les essais mécaniques*

## I.1. Généralité

Les essais mécaniques sont l'étape indispensable pour accéder aux grandeurs caractéristiques des matériaux, du module d'Young à la limite d'élasticité, en passant par la ténacité ou la résistance à la fatigue, et ce dans des conditions variables, par exemple de température ou de sollicitation. Le propos de ce cours est de présenter les techniques expérimentales les plus couramment utilisées, aussi bien dans les laboratoires universitaires qu'industriels, pour caractériser le comportement mécanique des matériaux. Les techniques abordées seront :

- Les essais uniaxiaux (quasi- statiques et dynamiques),
- Les essais multiaxiaux,

## I.2. Essais mécaniques uniaxiaux

### I.2.1. Essais de traction

L'essai de traction constitue un des essais les plus utilisés pour la caractérisation mécanique des matériaux. Etant purement uniaxial, d'aboutir directement à une loi de comportement uniaxiale. Il permet de déterminer de nombreuses grandeurs normalisées, comme :

- La limite d'élasticité,
- La contrainte maximale,
- La contrainte à la rupture etc.

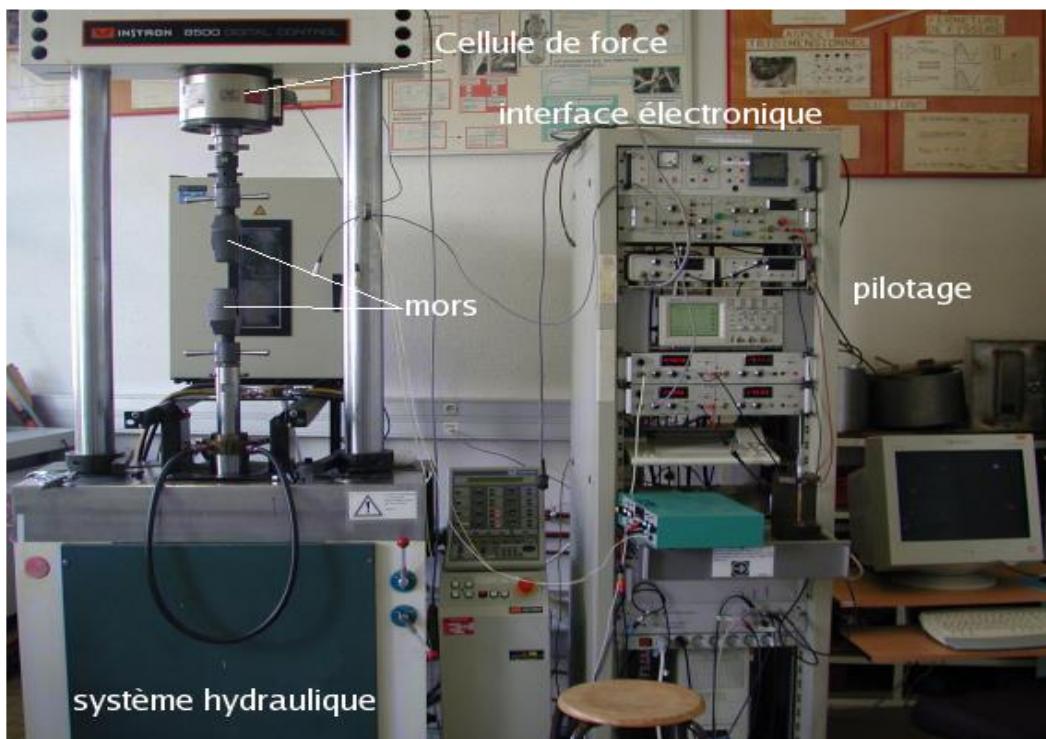
Nécessaires dans les calculs de structure. Nous donnons ici tout d'abord la description générale d'une machine de traction, puis des éléments concernant les éprouvettes, les mesures de déformation et de charge appliquée.

#### I.2.1.1. Objectifs de l'essai

L'essai de traction est le moyen le plus couramment employé pour caractériser le comportement mécanique d'un matériau sous une sollicitation progressive à vitesse de chargement faible ou modérée. L'essai permet, en outre, l'étude et l'identification des mécanismes physiques de déformation plastique.

### I.2.1.2. Description générale d'une machine de traction

Une machine de traction est constituée d'un bâti portant une traverse mobile. L'éprouvette de traction, vissée ou enserrée entre des **mors**, selon sa géométrie, est amarrée à sa partie inférieure à la base de la machine et à sa partie supérieure à la traverse mobile (dans le cas d'une machine mécanique) ou au vérin de traction (dans le cas d'une machine hydraulique). Le déplacement de la traverse vers le haut réalise la traction. Une machine de traction comporte une cellule de charge, qui permet de mesurer l'effort appliqué à l'éprouvette et le déplacement de l'éprouvette peut être suivi de diverses façons. Les dispositifs expérimentaux sont généralement asservis et peuvent être pilotés à vitesse de montée en charge, à charge constante, à vitesse de déformation constante, etc. selon ce qui peut être proposé par le système de pilotage.

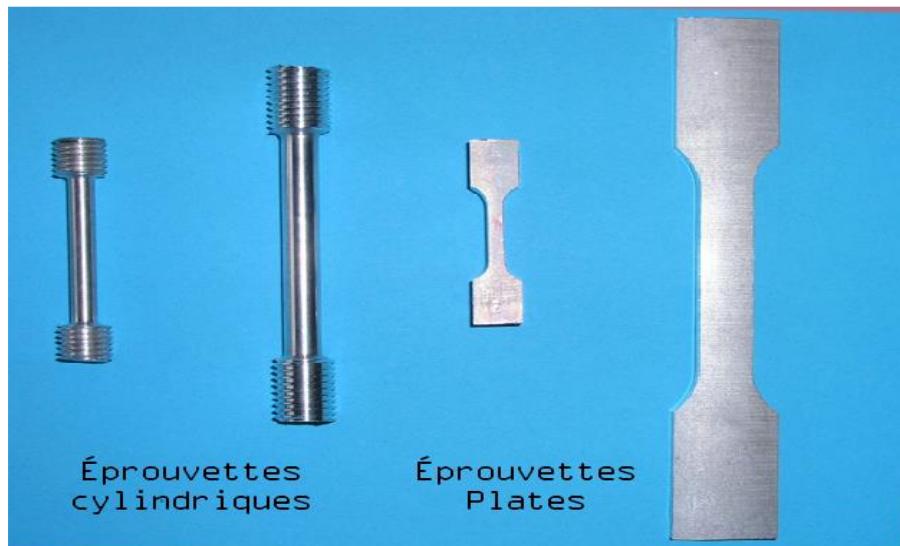


**Figure I.1 :** Dispositif de traction du Centre des Matériaux.

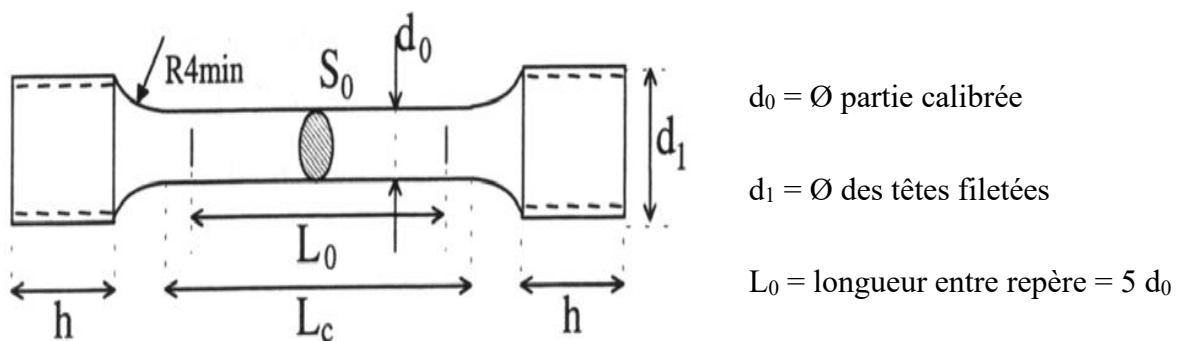
### I.2.1.3. Eprouvettes

Les éprouvettes de traction adoptent deux géométries : cylindrique ou plate. La section doit être constante sur une longueur suffisante pour obtenir un état de contrainte homogène pendant l'essai. Aux deux extrémités sont usinées des têtes d'amarrage avec des rayons de courbures suffisamment grands pour éviter des concentrations de contrainte excessives. Dans

le cas des éprouvettes plates, le centrage de l'éprouvette peut devenir problématique si des trous calibrés ne sont pas percés dans les têtes.



**Figure I.2 :** Éprouvettes de traction cylindriques et plates.



**Figure I.3 :** Exemple d'une éprouvette de traction.

#### I.2.1.4. Diagramme de traction

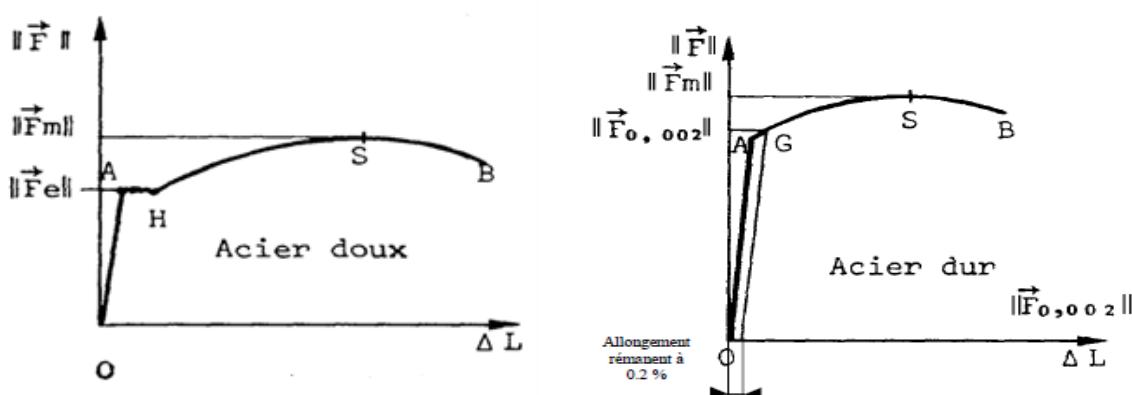
Les valeurs mesurées directement lors d'un essai de traction sont la force  $F$  et l'allongement  $\Delta L$ , plutôt que les contraintes et la déformation. La contrainte  $\sigma$ , rapportée dans un diagramme de traction est la force divisée par la section initiale  $S_0$  de l'éprouvette (contrainte nominale).

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \quad (\text{I.1})$$

De même la déformation  $\varepsilon$ , se réfère à la longueur initiale  $L_0$  de la partie délimitée par l'extensomètre (déformation nominale).

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (I.2)$$

On parle de diagrammes rationnels quand on détermine les contraintes et les déformations vraies. Ils sont obtenus en divisant la force ou l'allongement par la section, respectivement la longueur instantanée. Ici nous nous contenterons du premier type de diagramme qui est d'ailleurs le diagramme d'usage commun. La figure I.4 illustre l'allure que peuvent avoir les courbes de traction de différents matériaux.



**Figure I.4 :** Schéma représentant 2 types différents de courbes de traction.

Pour les matériaux élastiques (les aciers, par exemple), la courbe «effort-allongement» est composée d'une partie linéaire « OA » et d'une partie de ligne courbe « AB »

#### Domaine élastique

Il correspond à la partie linéaire « OA ». Cette droite nous montre que l'allongement est faible et que cette déformation est proportionnelle l'effort exercé sur l'éprouvette. Le domaine élastique est limité au point « A » d'ordonnée «  $F_e$  »

$F_e$  : (intensité de la force de traction à la limite apparente d'élasticité de l'éprouvette).

Pour les **aciés doux**, on définit une **résistance limite élastique** comme étant le rapport de  $F_e$  par l'aire la section utile  $S_0$  de l'éprouvette :

$$\sigma_e [MPa] = \frac{F_e [N]}{S_0 [mm^2]} \quad (I.3)$$

Pour les **acières durs et les fontes**, on définit une résistance limite conventionnelle d'élasticité notée  $\sigma_{e0.2}$ . Cette résistance est calculée à partir d'un effort  $F_{e0.002}$  (effort qui engendre un allongement rémanent de l'éprouvette de 0.2% ( $A\% = 0.2$ )).

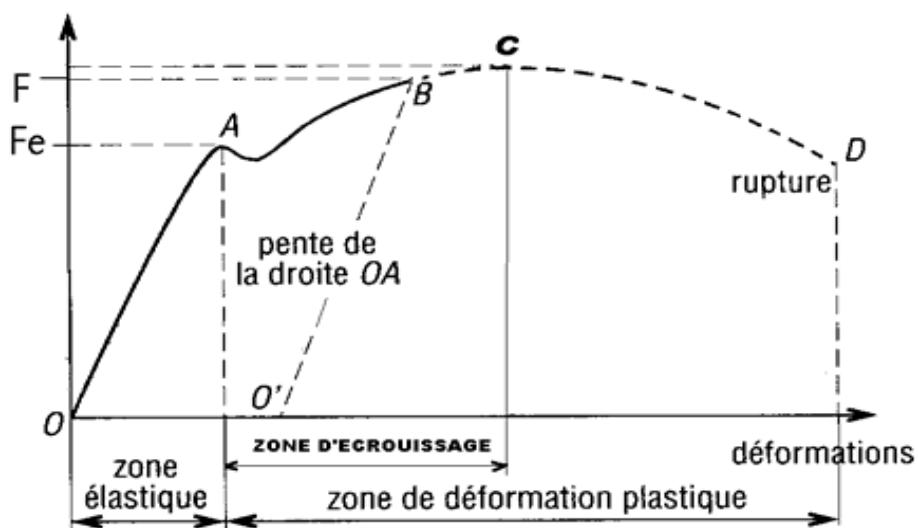
$$\sigma_{e0.2} = \frac{F_{e0.002}}{S_0} \quad (I.4)$$

### Domaine des déformations permanentes

#### a) Zone d'écrouissage

Au-delà de la charge à la limite d'élasticité (**entre A et C**), la suppression de l'effort  $F$  n'entraîne plus une disparition totale de la déformation.

L'amplitude de la déformation rémanente est déterminée sur le diagramme en menant du point **B** de la courbe correspondant à l'effort  $F$  une parallèle à la droite **(A,O)**. On obtient ainsi la droite **(B,O')**.



**Figure I.5.** Courbe de traction (force-déformation) pour la zone d'écrouissage.

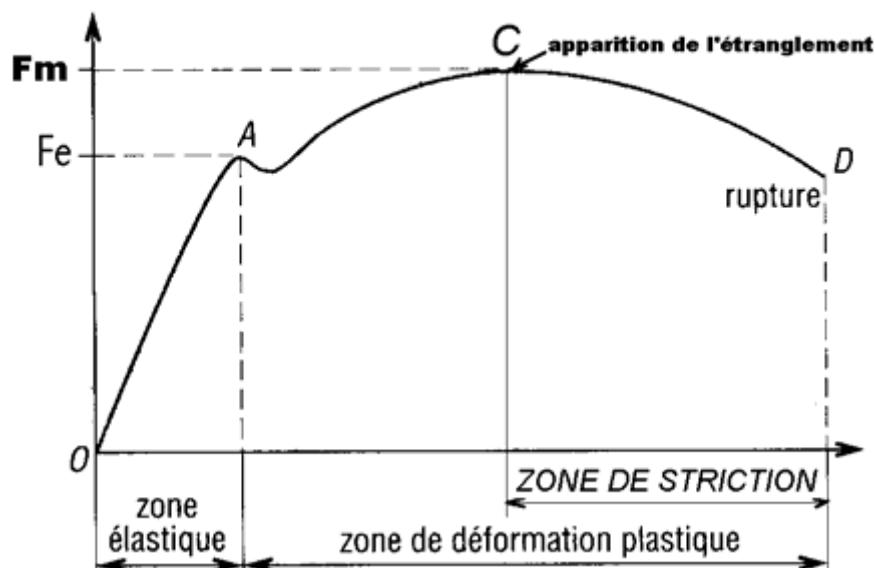
Entre « **A** » et « **B** » il se produit un phénomène d'écrouissage du métal, il en résulte une augmentation de la résistance élastique du matériau.

En effet si on applique sur cette même éprouvette à nouveau un effort  $F$  croissant, la courbe partira cette fois-ci de « O' » et elle ira linéairement jusqu'à « B ». En « B » apparaîtra cette fois-ci la force de traction «  $F_e$  » : force à la limite apparente d'élasticité du matériau.

«  $F_e$  » est égal à l'effort «  $F$  » qui a engendré l'écrouissage de l'éprouvette. «  $F_e$  » étant plus important après écrouissage qu'avant, la résistance élastique  $\sigma_e$  sera aussi plus importante.

### b) Effort maxi et la zone de striction

- Résistance à la rupture



**Figure I.6.** Courbe de traction (force-déformation) pour la zone de striction.

Entre « A » et « C » le fait d'allonger encore l'éprouvette, augmente en conséquence l'effort de traction.

En « C » l'effort de traction atteint son maximum. Celui-ci est noté «  $F_m$  » et est appelé **effort maxi de traction**.

Pour tous les métaux, on définit une **résistance à la rupture** comme étant le rapport de  $F_m$  par l'aire la section utile  $S_0$  de l'éprouvette. Cette résistance à la rupture est notée  $\sigma_r$  :

$$\sigma_r = \frac{F_m}{S_0} \quad (I.5)$$

- **Étranglement et la zone de striction :**

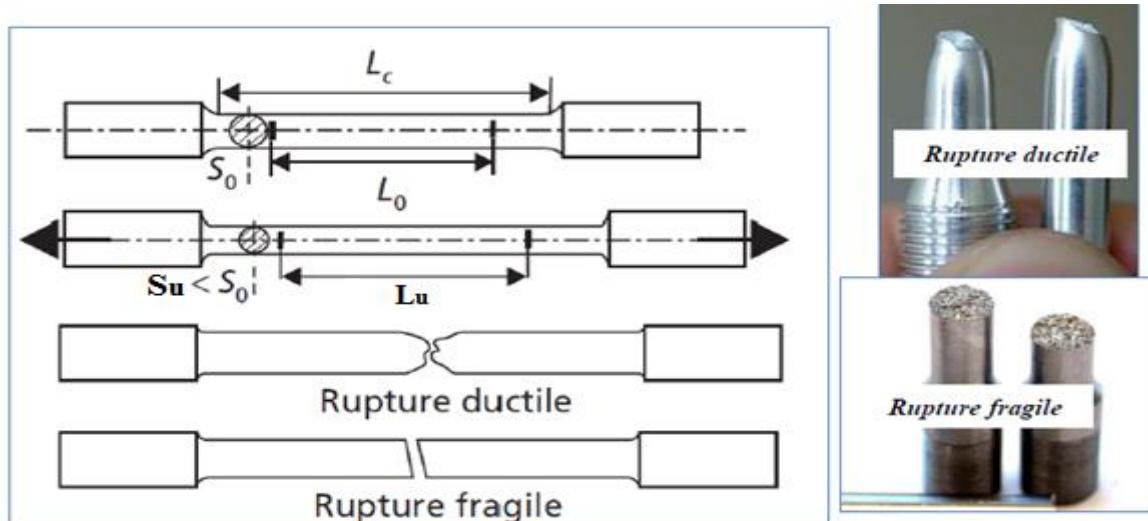
Au moment où l'effort de traction atteint son maximum (en « C ») commence une réduction de diamètre très visible de l'éprouvette en son milieu.

Ce phénomène correspond à un réarrangement atomique qui provient d'un glissement des particules.

Entre « C » et « D » le déplacement relatif des 2 têtes d'amarrage (allongement de l'éprouvette) ne provoque plus une augmentation de l'effort de traction mais une diminution. En «D» il se produit une rupture brutale de l'éprouvette.

### c) Exploitation des résultats de l'essai de traction

- **Détermination du coefficient d'allongement A% :**



**Figure I.7 :** Eprouvette de traction cylindrique et de son évolution en cours d'essai

**Soit  $L_0$  :** longueur initiale (la distance entre les deux repères A et B tracés sur l'éprouvette avant l'essai).

**Soit  $L_u$  :** longueur ultime (longueur [A, B] mesurée en raboutant les deux morceaux de l'éprouvette cassée).

On définit un indicateur sur la **ductilité** du matériau en calculant le **coefficient d'allongement** noté **A%**.

$$A\% = \frac{L_u - L_0}{L_0} \times 100 \quad (I.6)$$

**Tableau I.1 :** la classification des matériaux selon le coefficient d'allongement

<b>A%</b>	> 5 %	les matériaux sont considérés comme ductiles.
	< 5 %	les matériaux sont considérés comme fragiles ou «cassants.

- **Détermination du coefficient de striction Z%**

$S_0$  : Section initiale (calculée en  $\text{mm}^2$  à partir du diamètre «  $d_0$  » mesuré entre les deux repères A et B tracés sur l'éprouvette avant l'essai.

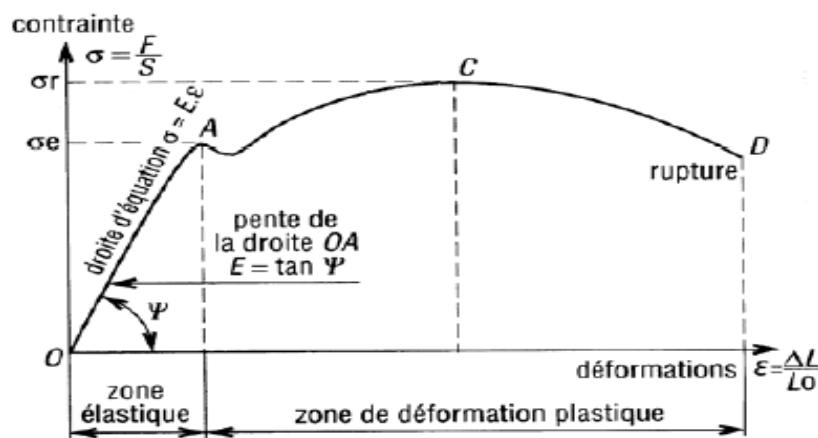
$S_u$  : Section ultime (calculée en  $\text{mm}^2$  à partir du diamètre «  $d_u$  » mesuré à l'endroit de la cassure de l'éprouvette cassée.

On définit un autre indicateur sur la **ductilité** du matériau en calculant le **coefficient de striction** noté **Z%**

$$Z\% = \left| \frac{S_u - S_0}{S_0} \right| \times 100 \quad (I.7)$$

- **Module d'élasticité longitudinale E**

Il caractérise la pente de la droite de proportionnalité précédente donc l'élasticité du matériau testé. Plus E est grand, plus le matériau est rigide et inversement.



**Figure I.8 :** Lois de comportement (contrainte\_déformation)

La forme de la courbe donnant la **contrainte  $\sigma$**  en fonction de l'**allongement unitaire  $\epsilon$**  est identique aux échelles près, à celle enregistrée sur la machine de traction.

- En lieu et place de la force maxi «  $F_m$  » nous retrouvons la résistance à la rupture  $\sigma_r$
- En lieu et place de la force limite élastique «  $F_e$  » nous retrouvons la résistance élastique  $\sigma_e$ .

Dans la zone élastique il y a proportionnalité entre la **contrainte** et l'**allongement unitaire** (OA est une droite).

L'équation de cette droite est de type «  $\sigma = E \cdot \epsilon$  » ou «  $E$  » est le coefficient directeur de la droite. Si «  $\Psi$  » est l'angle d'inclinaison de cette droite alors  $E = \tan \Psi$

La loi de proportionnalité entre la contrainte et l'allongement unitaire est appelée **loi de Hooke**. Elle s'écrit :

$$\sigma = E \times \epsilon \quad (I.8)$$

**E** : Module d'élasticité longitudinale ou encore **module de YOUNG**. Ce module est une constante pour chaque famille de matériaux

**Tableau I.2 :** Valeur typique du module d'élasticité pour différent métaux.

Matériaux	Module d'élasticité (GPa)
Acier Carbone	210
Fer	211
Alliage de cuivre	124
Cuivre	130
Alliage d'aluminium	72
Aluminium	70

### I.2.2. Essai de fluage

Le fluage est le phénomène physique qui provoque la déformation irréversible différée (c'est-à-dire non-instantanée) d'un matériau soumis à une contrainte constante (notée  $\sigma_0$ ), inférieure à la limite d'élasticité du matériau, pendant une durée suffisante. Le fluage ainsi que la relaxation de contrainte sont deux méthodes en quasi statique de caractérisation des matériaux visqueux (cas du béton).

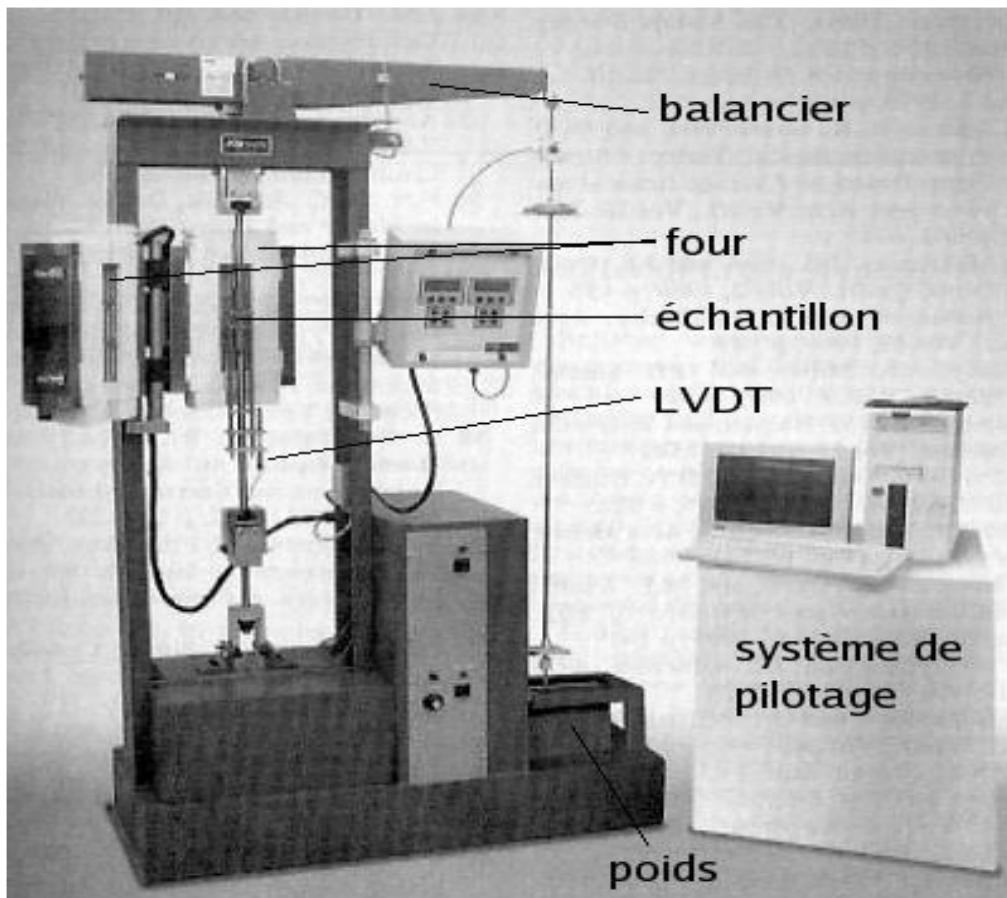
### *I.2.2.1. Eprouvettes*

Les éprouvettes de fluage sont analogues à celles utilisées en pour les essais de traction uniaxiale ordinaires : éprouvettes cylindriques ou plates, encore que d'autres géométries peuvent être utilisées selon la disponibilité du matériau ou les contraintes géométriques. Il est préférable, toutefois, étant donnée la faible vitesse de déformation, de disposer d'éprouvettes relativement longues pour augmenter la précision de la mesure du déplacement.

### *I.2.2.2. Dispositif d'application de la charge*

Lors d'une expérience de fluage, il est plus courant de travailler à charge qu'à contrainte constante, toutefois il est possible d'effectuer des essais à contrainte constante, ce qui implique de faire varier la charge appliquée au fur et à mesure de la déformation de l'échantillon. Les dispositifs de fluage sont généralement composés d'un poids et d'un bras de levier relié à un mors sur lequel l'éprouvette est fixée (figure I.9 montre un montage de fluage type). Il faut porter une attention particulière à l'alignement des têtes d'amarrage, afin de limiter les moments de flexion imposés à l'éprouvette (la norme ASTM recommandé une déformation en flexion inférieure à 10 % de la déformation axiale). Une étape sensible de l'essai de fluage est la mise en charge qui doit être accomplie de façon soignée pour éviter de perturber l'essai.

L'éprouvette doit déjà être à la température de l'essai pour cette opération. La mise en charge peut être réalisée soit de manière "instantanée" pour s'approcher de la courbe théorique de fluage, mais cela peut entraîner une perturbation du dispositif de mesure de la déformation ou un effet de choc sur l'éprouvette qui entraîne l'apparition d'un transitoire. Autrement, on peut procéder à un chargement progressif qui a l'avantage d'être reproductible, soit par paliers discontinus (ajout de masses), soit en augmentant continûment la charge, typiquement à l'aide de petites billes de plomb.



**Figure I.9 :** Dispositif d'essai de fluage.

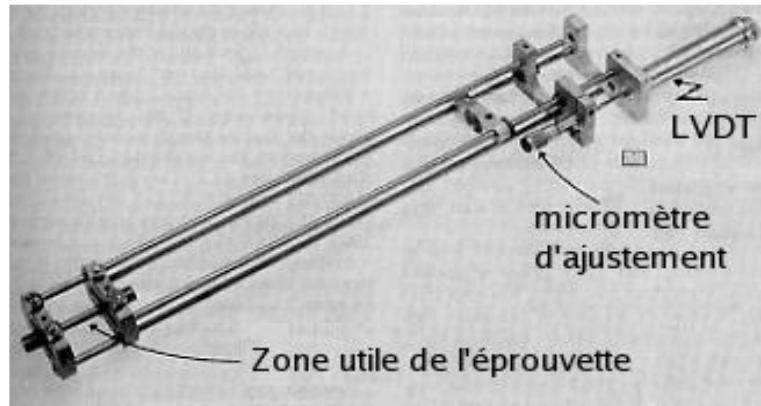
#### I.2.2.3. Four

Les fours utilisés sont en général des fours tubulaires à résistance électrique qui chauffe par radiation. Les variations de température ayant un impact fort sur les résultats de fluage, il est important d'assurer un contrôle précis de la température (la norme fixe une variation maximale de  $\pm 1,7^{\circ}\text{C}$  au-dessous de  $980^{\circ}\text{C}$  et  $\pm 2,8^{\circ}\text{C}$  au-dessus). La montée en température à elle seule peut durer plusieurs heures pour éviter de dépasser la température d'essai, ce qui invaliderait les résultats. La mesure de température est généralement effectuée par un thermocouple fixé sur l'échantillon. Les éprouvettes longues peuvent imposer d'utiliser plusieurs thermocouples afin de s'assurer de l'homogénéité de la température.

#### I.2.2.4. Mesure du déplacement

La mesure du déplacement est effectuée par Extensométrie. Dans le cas des essais de fluage, la température élevée interdit le plus souvent de placer l'extensomètre directement dans le four et on utilise un système de tiges capables de supporter la température d'essai,

transférant la déformation à un LVDT comme présenté sur la figure I.10. Il est aussi possible de faire appel à de l'Extensométrie sans contact, ce qui implique de disposer d'une fenêtre dans le four pour suivre le déplacement des points de la surface pris comme repères.



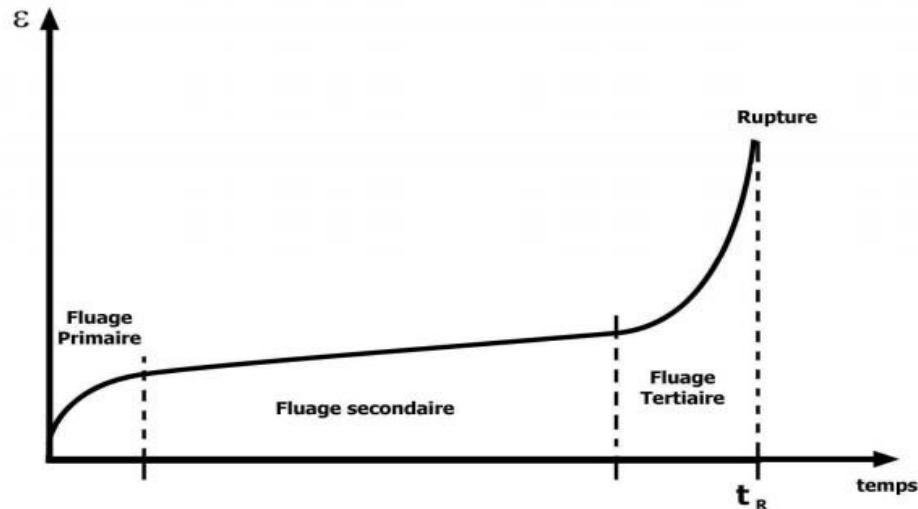
**Figure I.10 :** Dispositif de mesure de la déformation pour essai de fluage.

#### I.2.2.5 Résultats types

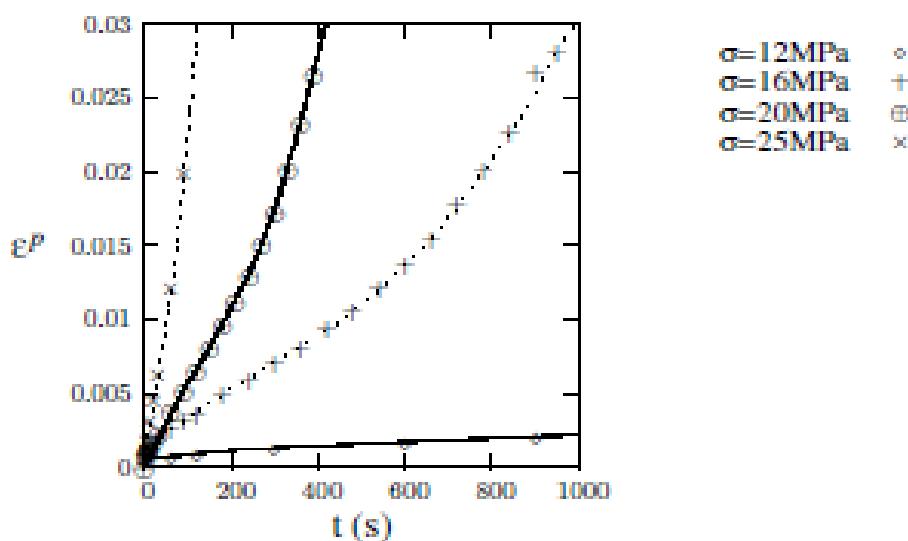
Lorsqu'une éprouvette est soumise à une traction simple (essai monodimensionnel sous une contrainte  $\sigma$  et une déformation  $\epsilon$ ), si, à partir d'un certain état, la contrainte est maintenue constante, la déformation restera constante (absence de déformations différées dans le temps) s'il n'y a aucune viscosité. Lorsqu'on dépasse le tiers de la température de fusion dans les alliages métalliques, on observe au contraire des déformations liées au caractère visqueux du comportement. On distingue classiquement 3 stades dans un essai de fluage, comme indiqué sur la figure I.11.a.

- Fluage primaire (I), ou transitoire, pendant lequel la vitesse de déformation diminue avec le temps, ce qui traduit une augmentation de la résistance du matériau. Cette tendance provient en général d'un accroissement de la densité de dislocations jusqu'à saturation.
- Fluage secondaire (II), ou stationnaire, pendant lequel la vitesse de déformation se stabilise. Cette phase correspond à l'équilibre atteint entre les phénomènes de durcissement et ceux de restauration à l'échelle des dislocations.

- Fluage tertiaire (III) où la vitesse de déformation augmente jusqu'à rupture de l'éprouvette. La densité et la mobilité des dislocations augmentent. En parallèle, des phénomènes de cavitation interne et d'endommagement en surface vont mener à la création de fissures. Ces dernières vont diminuer la surface portante de l'éprouvette entraînant la rupture par augmentation de la contrainte macroscopique.



**Figure I.11.a :** Courbe schématique représentant les différents stades de fluage  
La figure I.11.b montre quant à elle le résultat obtenu pour différents niveaux de charge sur une fonte à 800°C.



**Figure I.11.b :** Fluage d'une fonte à 800°C.

### I.2.3. Essai de résilience

#### I.2.3.1. Objectif et principe de l'essai

La connaissance des caractéristiques mécaniques déduites de l'essai de traction peut être insuffisante, puisque des ruptures peuvent être obtenues en dessous de la limite d'élasticité dans des conditions particulières qui rendent le matériau fragile. Les facteurs fragilisant sont :

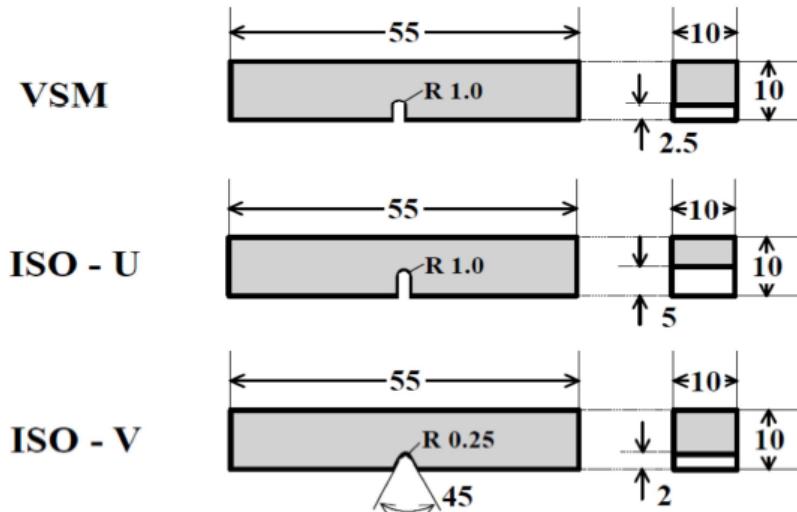
- Le triaxialité des contraintes ;
- L'abaissement de la température ;
- L'augmentation de la vitesse de déformation.

Le principe de l'essai consiste à rompre par choc du mouton pendule une éprouvette entaillée reposant sur deux appuis. On détermine l'énergie absorbée caractérisant la résistance aux chocs du matériau métallique essayé. La résistance aux chocs, donc l'énergie nécessaire pour produire la rupture de l'éprouvette, exprimée en joule par centimètre carré.

$$\text{Résilience} = \frac{\text{Energie absorbé par rupture (J)}}{\text{Section au droit de l'entaille (cm}^2\text{)}} \quad (\text{I.9})$$

#### I.2.3.2. Eprouvette

L'effet de la forme de l'éprouvette sur l'énergie de rupture est très prononcé. La Figure I.12 montre les formes et dimensions géométriques de 3 types d'éprouvettes standardisées. Elles ont toutes une longueur de 55 mm et une section nominale de 10 x 10 mm<sup>2</sup>, mais se distinguent dans leur forme et leur profondeur d'entaille qui se trouve sur le côté opposé à l'endroit où le marteau frappe (Figure I.13). Elle a pour objet de garantir un état de contrainte triaxiale, déjà lors de l'amorçage de la fissure, plutôt que de provoquer l'effet d'entaille. C'est pour cette raison que le fond de l'entaille n'est pas pointue mais cylindrique (rayon de 0.25 ou de 1 mm selon type d'éprouvette). L'aire de la section restant à l'endroit de l'entaille est, selon la définition de la résilience aka, la section à utiliser pour le calcul de sa valeur. Notez que seuls des résultats obtenus sur des éprouvettes de dimensions identiques devraient être comparés. Il n'y a pas de méthode générale de conversion de valeurs de résilience, obtenues par une méthode d'essai, en valeurs qui seraient obtenues par une autre méthode d'essai.

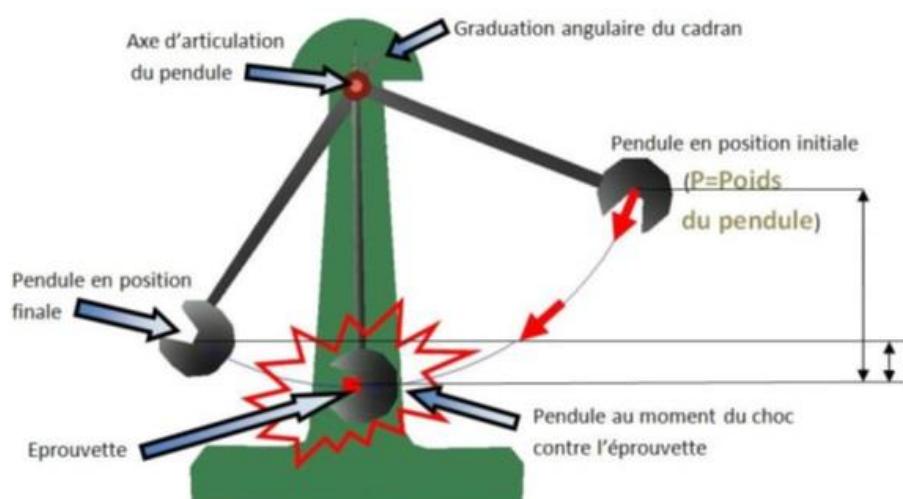


**Figure I.12 :** Eprouvettes Charpy standardisées.

#### I.2.3.3. Principe de l'essai

Un marteau de masse  $m$  est fixé à l'extrémité d'un pendule (figure I.13). Ce pendule peut tourner dans le plan vertical autour d'un axe horizontal. L'éprouvette repose sur un support et se trouve au point le plus bas sur la trajectoire du marteau. Pour effectuer un essai, on écarte le bras jusqu'à ce que le marteau atteigne sa position initiale  $P$  et on le lâche. Quand le pendule vient frapper l'éprouvette, il a une énergie cinétique qui est égale à l'énergie potentielle qu'il avait à sa position de départ ( $mgH$ ),  $H$  étant la hauteur du marteau par rapport à sa position d'équilibre. Après la rupture, le marteau remonte. Dans son point culminant (hauteur  $h$ ), l'énergie cinétique résiduelle s'est de nouveau transformée en énergie potentielle ( $mgh$ ). L'énergie  $K$  dépensée ou absorbée pour rompre l'éprouvette vaut alors :

$$\text{Avec : } mg \text{ est le poids de la pendule, } W = mg(H - h) \quad (\text{I.10})$$



**Figure I.13 :** Principe de l'essai (en haut) et du montage de l'éprouvette (en bas).

#### I.2.3.4. Machine de l'essai

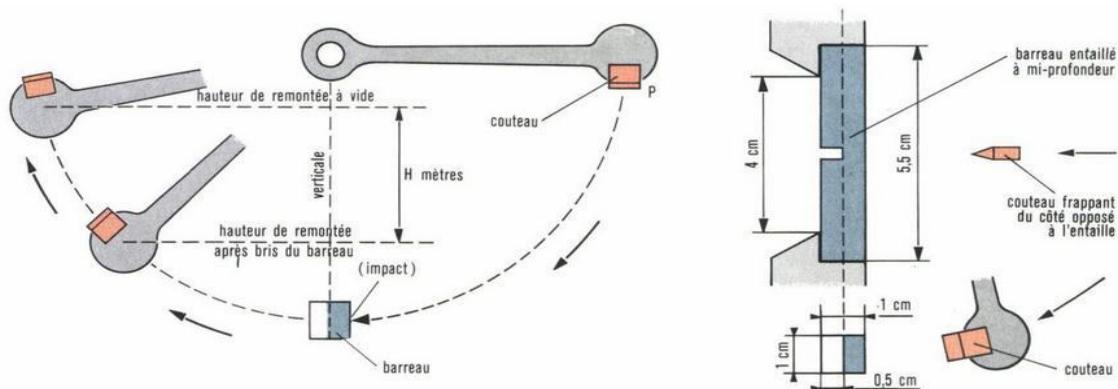
Le mouton Pendule Charpy permettant de réaliser des essais de résilience avec une capacité disponible qui peut atteindre 750 J selon les versions. L'essai permet de déterminer l'énergie absorbée lors de la rupture d'une éprouvette entaillée. Le pendule est constitué d'une base en fonte et de deux colonnes d'appui pour le support des éprouvettes CHARPY, un mouton-pendule avec son bras, un système de levage du mouton motorisé et un mécanisme de déclenchement (figure I.14).

Un afficheur numérique permet la lecture de l'énergie absorbée par l'éprouvette testée et un frein motorisé assure la réaction sur le mouton en ralentissement rapide des oscillations. L'équipement est disponible en différentes versions ; 150, 300, 450 et 750 Joules et avec différents couteaux d'impact pour répondre aux normes en rigueurs. La sécurité est assurée par un carter de protection transparent avec micro contacteur de sécurité conforme aux normes CE.

#### I.2.3.5. Conduite de l'essai et exploitation des résultats

Le plan d'oscillation du mouton doit passer sensiblement par le centre de gravité de la cabote. Le point d'impact coïncide avec le centre de percussion du mouton. Pour l'essai normal, l'énergie disponible du mouton doit être égale 294 Joule. La résilience obtenue avec un tel mouton est désignée par le symbole K.

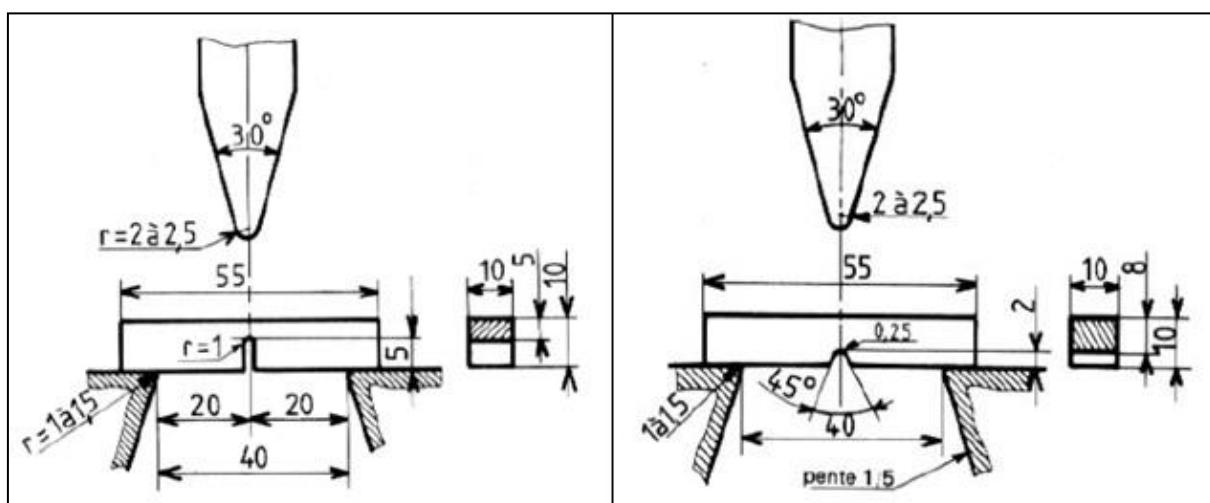
L'éprouvette est placée sur le porte-éprouvette de telle sorte que l'arête du couteau vienne la frapper dans le plan de symétrie de l'entaille et sur la face opposée à celle-ci. La valeur qu'en donne la quantité K est alors généralement approchée par excès en raison du frottement des extrémités de l'éprouvette sur les portes-éprouvettes ; mention de cette particularité doit donc, le cas échéant, accompagner les résultats d'essai.



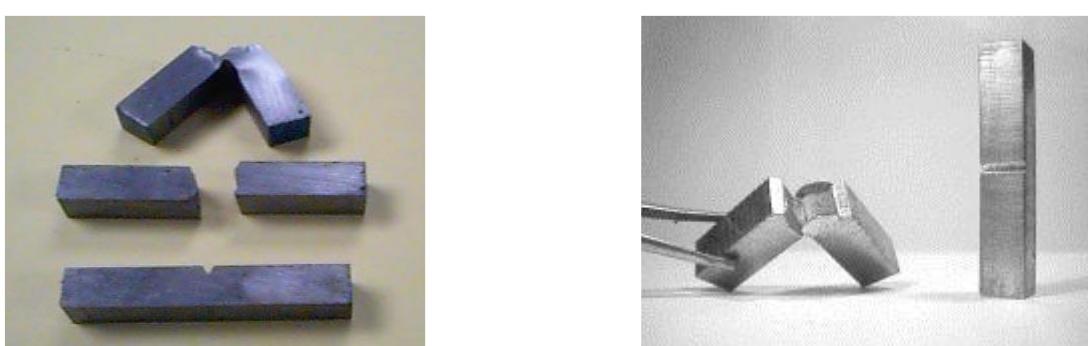
**Figure I.14 :** Disposition avant et après l'essai Charpy

En principe, il serait bien utile de connaître les contraintes critiques qui provoquent la rupture sous l'effet d'un choc. Néanmoins dans la pratique et dans la théorie, le phénomène de la rupture dynamique est très complexe. Même au niveau expérimental, la détermination d'une contrainte critique s'avère déjà extrêmement difficile. Comme la fissuration sous l'effet du choc avance à très grande vitesse et que de ce fait les contraintes montent et descendent presque instantanément, leur mesure exacte n'est pratiquement pas possible. On doit reconnaître que les contraintes du choc se transmettent par une onde acoustique.

L'essai s'effectue à la machine d'essai (figure I.15) dont la construction et l'installation doivent être rigides et convenir à la norme en vigueur. La machine est équipée par l'échelle prévue pour le mesurage de l'énergie de choc. Dans les conditions standard l'essai s'exécute à une température de  $23^{\pm 5}$  °C, et avec une énergie initiale nominale de la machine :  $W_0 = 300^{\pm 5}$  Joules. Tout d'abord, le Mouton pendule est mis en position initiale à une hauteur  $h_0$  qui correspond ainsi à une énergie de départ  $W_0$ .



**Figure I.15 :** Éprouvette Charpy normalisée (A gauche : entaille en U ; A droite : en V)



**Figure I.16 :** Exemple des éprouvettes après l'essai de résilience.

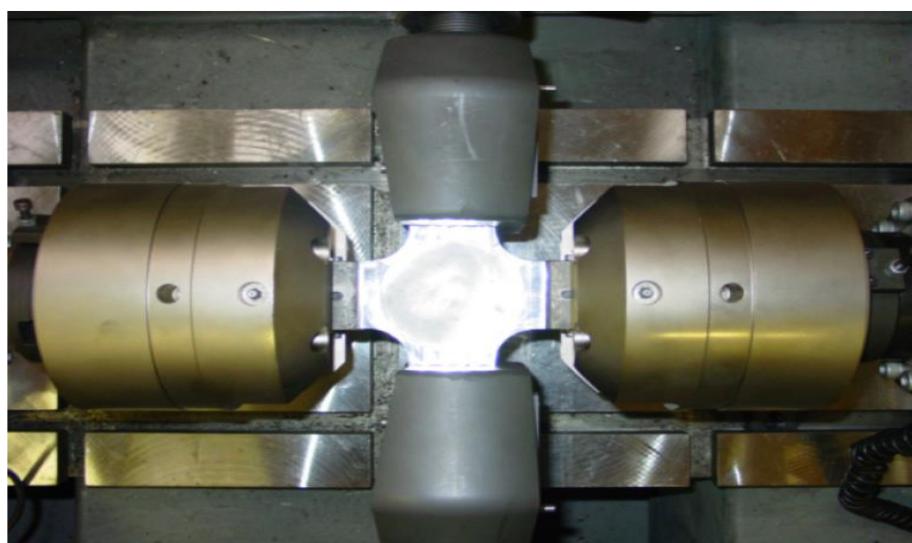
### I.3. Essais multiaxiaux

Les essais multiaxiaux apportent une information précieuse pour tester les modèles de déformation, mais ils sont malheureusement peu pratiqués en raison des difficultés expérimentales. Les essais possibles, classiquement, sont les essais de traction (ou compression) - torsion, les essais de traction bi axiale et les essais de compression triaxiale. L'essai de traction cisaillement est le plus riche pour tester les aspects d'anisotropie. Nous présenterons ici les essais de traction bi axiale et les essais de traction - torsion.

Les essais multiaxiaux peuvent être effectués suivant deux modes : en phase ou hors phase, selon que l'éprouvette subit simultanément ou non les différentes sollicitations. Les déplacements et les forces appliquées peuvent enregistrées de la même façon que dans le cas des essais de traction uniaxiale. Ces essais sont utilisés soit dans des conditions quasi statiques soit dans le cadre d'essais de fatigue multiaxiale.

#### I.3.1. Traction bi axiale

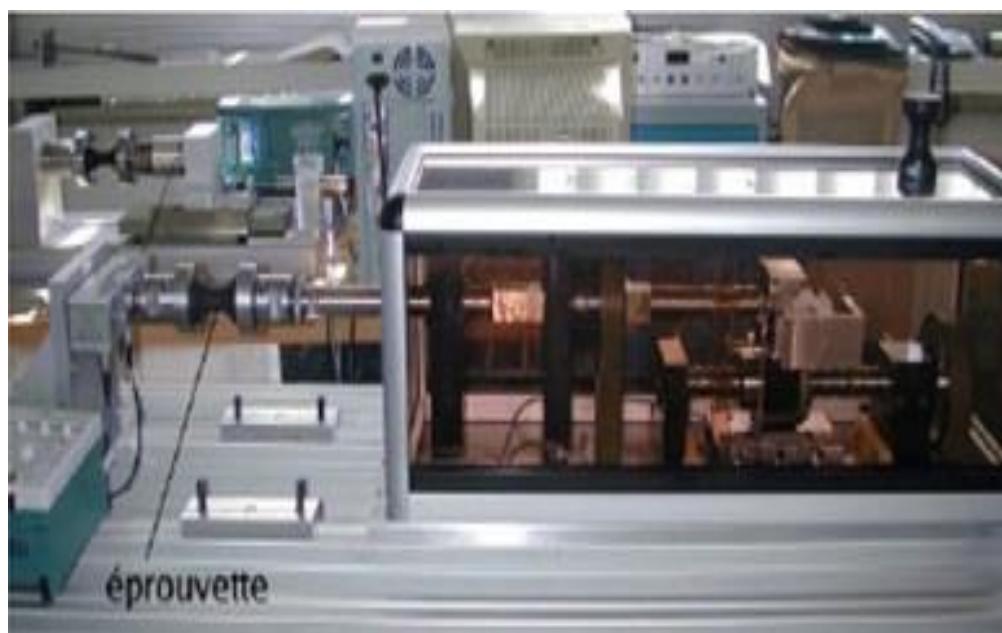
Les essais de traction bi axiale consistent à exercer une contrainte dans deux directions perpendiculaires sur une même éprouvette. Ceci impose d'utiliser des éprouvettes cruciformes, comme celle présentées figure (I.17). Pour réaliser des états de contrainte uniformes, il faut que les bras de la croix aient des rigidités transversales assez faibles, ce que l'on peut obtenir en les évidant.



**Figure I.17 :** éprouvette de traction biaxiale montée.

### I.3.2. Traction-torsion

Ce type d'essai permet d'étudier des trajets de chargement avec modification des directions principales des contraintes. La machine est constituée d'un vérin linéaire et d'un vérin torique avec dispositif de découplage. La figure (I.18) présente un dispositif de traction-torsion du Centre des Matériaux et un exemple de chemin mécanique dans l'espace des contraintes pouvant être appliqué à une éprouvette.



**Figure I.18 :** dispositif de traction-torsion du Centre des Matériaux.

### I.4. Exercices

#### ➤ Exercice 1

On réalise un essai de traction sur une éprouvette d'un certain métal. L'aire de la section est  $S = 39,41 \text{ cm}^2$  et la base de mesure vaut  $L = 200 \text{ mm}$ . Les appareils de mesure fournissant les valeurs suivantes (charge  $F$ , allongement  $\Delta L$ ).

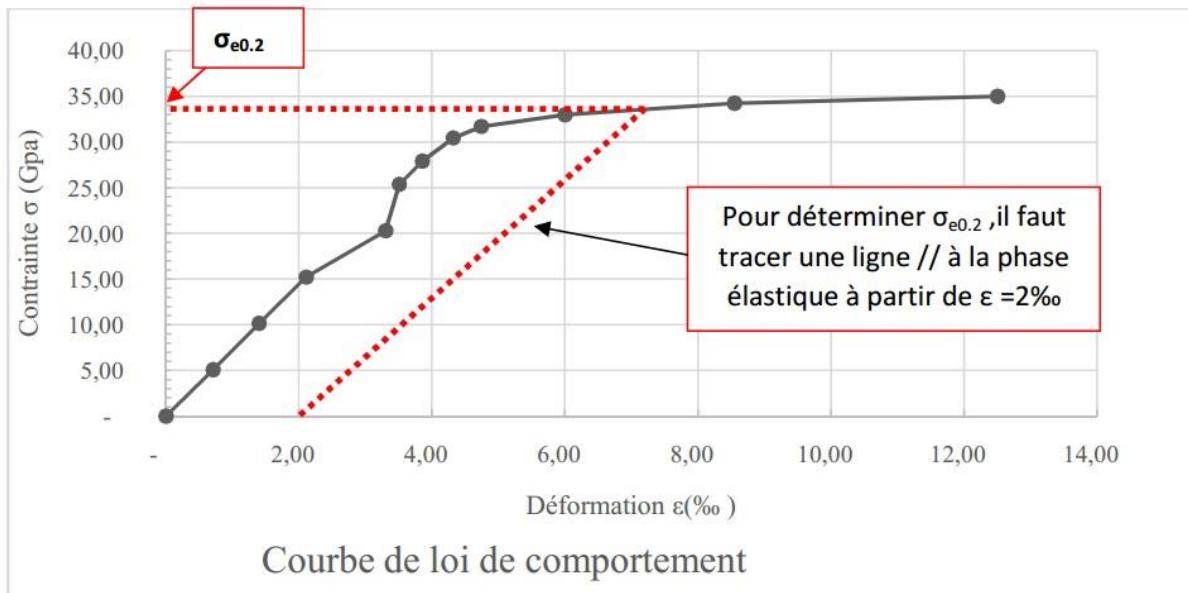
Mesure N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$F [\text{KN}]$	200	400	600	800	1000	1100	1200	1250	1300	1350	1380
$\Delta L [\text{mm}]$	0.142	0.280	0.422	0.661	0.702	0.771	0.864	0.948	1.200	1.710	2.501

- 1) Tracer le diagramme ( $\sigma, \varepsilon$ ) du matériau.
- 2) En déduire la valeur du module d'élasticité  $E$ . De quel métal s'agit-t-il probablement ?
- 3) En déduire la valeur de la limite d'élasticité conventionnelle  $\sigma_{e0.2}$ .

Calculer le coefficient de striction  $Z\%$  si la section Du à la rupture est  $S_u = 11.66 \text{ mm}^2$

**Solution Exercice n° 01 :**
**Traçage du diagramme ( $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ) du matériau :**

$\sigma = \frac{F}{S_0} (KN/m^2)$	5.07	10.15	15.22	20.30	25.37	27.91	30.45	31.72	32.99	24.26	35.02
$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} (^0/\text{m})$	0.71	1.40	2.11	3.31	3.51	3.86	4.32	4.74	6.00	8.55	12.51


**2. Détermination de la valeur de E :**

$$\tan \varphi = E = \frac{15.00}{2.08 \cdot 10^{-3}} \approx 7212 KN/m^2$$

Il s'agit d'alliage d'aluminium (Voir tableau- Rappel du cours).

**3. Détermination de la limite d'élasticité conventionnelle  $\sigma_{e0.2}$  :**

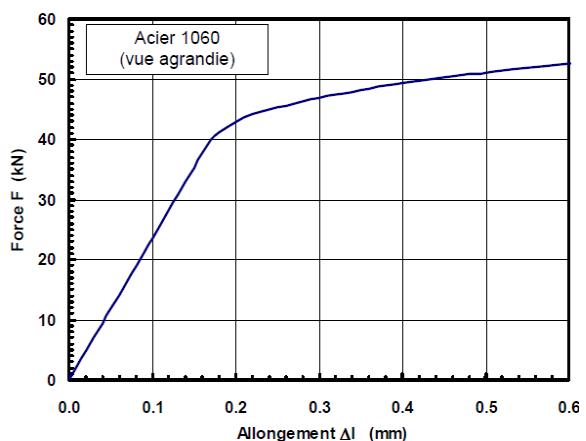
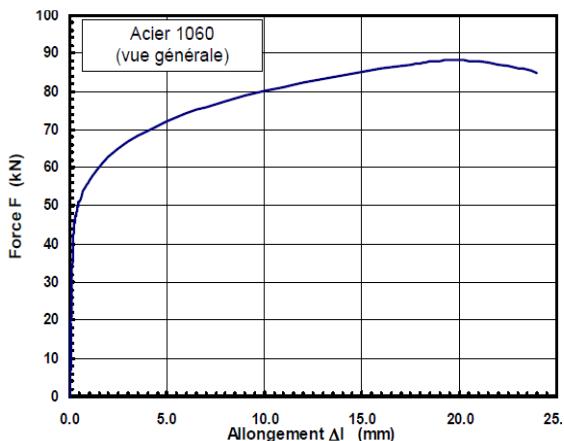
$$\sigma_{e0.2} = 33.50 KN/cm^2$$

**4. Calcul du coefficient de striction :**

$$Z\% = \left| \frac{11.66 - 39.41}{39.41} \right| \times 100 = 70.42\%$$

**➤ Exercice 2**

On réalise un essai de traction sur une éprouvette d'acier 1060 de longueur  $L_0=100$  mm et de diamètre  $D=12$  mm d'acier à l'état recuit. Les vues générale et agrandie de la courbe brute de traction  $F = f(\Delta l)$  sont données par les courbes suivantes :



- 1- Quelle est la valeur du module d'Young  $E$  (en GPa) de l'acier 1060 ?
- 2- Quelle est la limite proportionnelle d'élasticité  $\sigma_e$  (en MPa) de l'acier 1060 ?
- 3- Quelle est la limite conventionnelle d'élasticité  $\sigma_{e0,2}$  (en MPa) de l'acier 1060 ?
- 4- Quelle est la résistance à la traction  $\sigma_m$  (en MPa) de l'acier 1060 ?
- 5- Quelle est la valeur de la déformation permanente  $A$  (en %) après rupture de l'éprouvette ?

### Solution de l'exercice N° 2 :

#### 1. La valeur du module d'Young $E$ :

$$E = \tan(\varphi) \approx 235 \text{ GPa}$$

#### 2. La limite proportionnelle d'élasticité $\sigma_e$

$$\sigma_e = \frac{F_e}{S} = \frac{F_e \cdot \pi \cdot 12^2}{\pi \cdot \frac{4}{4}} = 354 \text{ MPa}$$

#### 3. La limite conventionnelle d'élasticité $\sigma_{e0,2}$ :

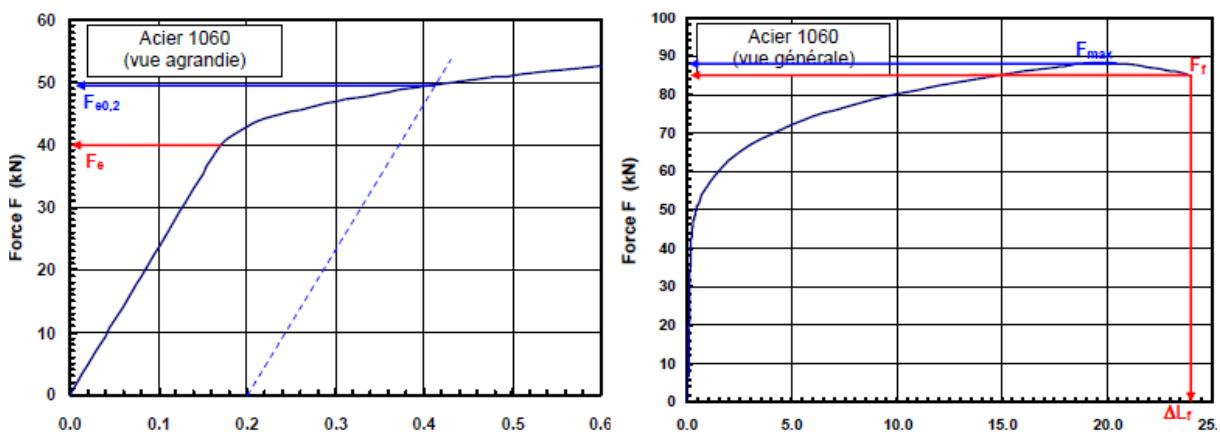
$$\sigma_{e0,2} = \frac{F_{e0,2}}{S} = \frac{F_{e0,2} \cdot \pi \cdot D^2}{\pi \cdot \frac{4}{4}} = \frac{50 \times 10^3 \cdot \pi \cdot 12^2}{\pi \cdot \frac{4}{4}} = 442.1 \text{ MPa}$$

#### 4. La résistance à la traction $\sigma_m$ :

$$\sigma_m = \frac{F_{\max}}{S} = \frac{88 \times 10^3 \cdot \pi \cdot 12^2}{\pi \cdot \frac{4}{4}} = 778 \text{ MPa}$$

#### 5. La valeur de la déformation permanente $A$ :

$$A = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{23.5}{100} \times 100 = 23.5\%$$



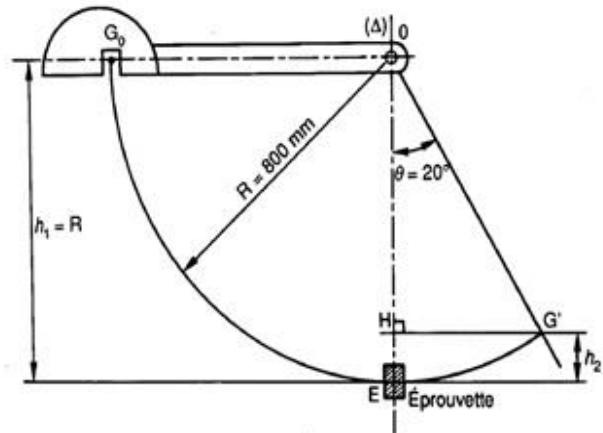
### ➤ Exercice 3

On procède à un essai de résilience sur une éprouvette E à l'aide d'un mouton pendule dit de Charpy. Le marteau est lâché sans vitesse initiale à partir d'une position horizontale ; on note  $G_0$  la position initiale du centre de gravité. Le centre de gravité décrit l'arc  $G_0E$ , et, après rupture de l'éprouvette, décrit l'arc  $EG'$

Données :

- Masse du bras marteau  $m = 40 \text{ kg}$ .
- Angle de remontée  $\theta = 20^\circ$ .
- Longueur:  $OG_0 = 800 \text{ mm}$ .
- Section de l'éprouvette  $S = 0,7 \text{ cm}^2$ .

1. Déterminer l'énergie initiale.
2. Après le choc, le marteau s'écarte de l'angle  $\theta$ .
  - a. Calculer  $OH$  ;
  - b. En déduire  $h_2$  ;
  - c. Calculer l'énergie absorbée par la rupture de l'éprouvette.
3. Calculer la résilience de l'échantillon.



### Solution de l'exercice N° 3 :

1. Energie initiale:

$$W_0 = M \cdot g \cdot h_1 = 40 \cdot 9,81 \cdot 0,8 = 313,92 \text{ J}$$

- 2.

- a) Calcul de  $OH$ :

$$\cos \theta = \frac{OH}{OG'} \rightarrow OH = \cos \theta \cdot OG'$$

$$OH = \cos 20 \cdot 0,8 \rightarrow OH = 0,75 \text{ m}$$

- b) Calcul de  $h_2$ :

$$h_2 = OE - OH \rightarrow h_2 = 0,8 - 0,75$$

$$h_2 = 0,05m$$

c) Calculer l'énergie absorbée par la rupture de l'éprouvette:

$$W_r = mg(h_1 - h_2) \rightarrow W_r = 40 \times 9.81 \times (0.8 - 0.05) = 294.3 J$$

3. Calcul de la résilience de l'échantillon :

$$KCU = \frac{W_r}{S} \rightarrow \frac{294,3}{0,7} = 420,43 J/cm^2$$

## Chapitre II

# *Les modèles rhéologiques*

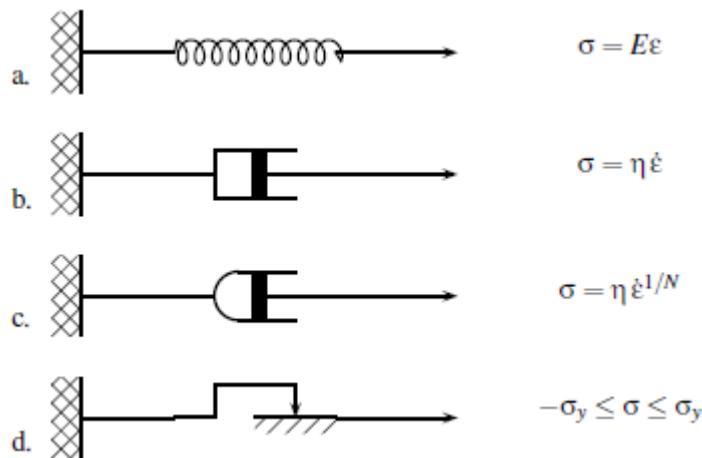
## II.1. Généralité

Les modèles rhéologiques sont utilisés pour modéliser le comportement d'un matériau, c'est-à-dire pour simuler sa réponse à une sollicitation mécanique. Concernant la viscoélasticité linéaire, des modèles analogiques empiriques ont été proposés ; ils sont composés d'une combinaison de connexions en série et/ou parallèle de ressorts (de coefficients d'élasticité  $E_i$ ) et d'amortisseurs (de coefficients de viscosité  $\eta_i$ ) élémentaires, représentant les composantes élastique et visqueuse, respectivement. Il existe des modèles performants pour décrire la viscoélasticité, approchant de façon satisfaisante les courbes de caractérisation mécanique, mais de complexité mathématique élevée. Certaines lois de comportement sont intégrées dans des logiciels de calcul par éléments finis traitant la viscoélasticité. Les fluides viscoélastiques peuvent aussi être représentés par des modèles analogiques électriques.

## II.2. Les briques de base du comportement non linéaire

L'allure qualitative de la réponse des matériaux à quelques essais simples permet de les ranger dans des classes bien définies. Ces comportements **de base**, qui peuvent être représentés par des systèmes mécaniques élémentaires, sont l'élasticité, la plasticité et la viscosité. Les éléments les plus courants sont reportés en figure II.1, où le point au-dessus d'une variable désigne la dérivée temporelle :

- 1. Le ressort**, qui symbolise l'élasticité linéaire parfaite, pour laquelle la déformation est entièrement réversible lors d'une décharge, et où il existe une relation biunivoque entre les paramètres de charge et de déformation (figure II.1.a).
- 2. L'amortisseur**, qui schématise la viscosité, linéaire (figure II.1.b) ou non-linéaire (figure II.1.c). La viscosité est dite pure s'il existe une relation biunivoque entre la charge et la vitesse de chargement. Si cette relation est linéaire, le modèle correspond à la loi de Newton.
- 3. Le patin**, qui modélise l'apparition de déformations permanentes lorsque la charge est suffisante (figure II.1.d). Si le seuil d'apparition de la déformation permanente n'évolue pas avec le chargement, le comportement est dit plastique parfait. Si, de plus, la déformation avant écoulement est négligée, le modèle est rigide-parfaitement plastique.



**Figure II.1.** Les modèles de base pour la représentation des comportements

Ces éléments peuvent être combinés entre eux pour former des modèles rhéologiques. Ceux-ci représentent des systèmes mécaniques qui servent de support dans la définition des modèles. Il ne faut en aucun cas leur accorder un trop grand crédit pour ce qui concerne la représentation des phénomènes physiques qui sont à la base des déformations. Ils sont néanmoins brièvement présentés ici, car ils permettent de comprendre la nature des relations à introduire pour chaque type de comportement, en pratiquant par exemple l'exercice qui consiste à combiner deux à deux les modèles élémentaires. C'est aussi l'occasion d'introduire l'ensemble du vocabulaire qui sera utile dans le cas général des chargements tridimensionnels. En fonction du type de chargement imposé, la réponse de ces systèmes peut être jugée dans 3 plans différents :

- Plan déformation–contrainte,  $\epsilon$ – $\sigma$ , pour l'essai de traction simple, ou d'écrouissage, augmentation monotone de la charge ou de la déformation ;
- Plan temps–déformation,  $\tau$ – $\epsilon$ , pour l'essai de fluage, sous charge constante ;
- Plan temps–contrainte,  $\tau$ – $\sigma$ , pour l'essai de relaxation, sous déformation constante.

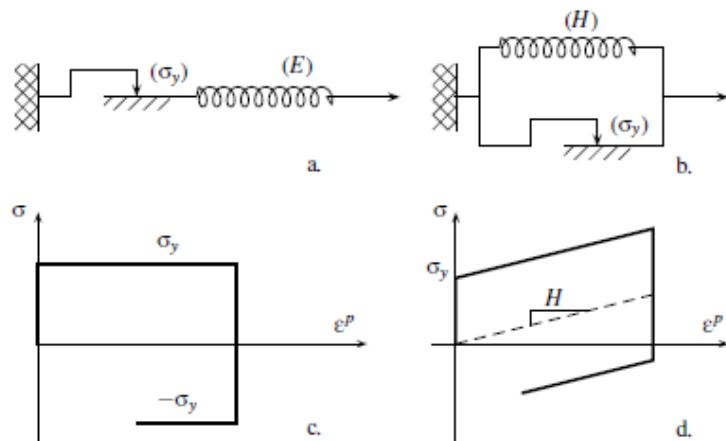
### II.3. Plasticité uniaxiale

#### II.3.1. Modèle élastique–parfaitement plastique

L'association d'un ressort et d'un patin en série (figure II.2 a) produit un comportement élastique parfaitement plastique, modélisé en figure II.2 c. Le système ne peut pas supporter une contrainte dont la valeur absolue est plus grande que  $\sigma_y$ . Pour caractériser ce modèle, il faut considérer une fonction de charge  $f$  dépendant de la seule variable  $\sigma$ , et définie par :

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \quad (\text{II.1})$$

Le domaine d'élasticité correspond aux valeurs négatives de  $f$ , et le comportement du système se résume.



**Figure II.2.** Associations en série ou parallèle de patin et ressort.

Alors aux équations suivantes :

- Domaine d'élasticité si :  $f < 0$  ( $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e \varepsilon = \dot{\sigma}/E$ ) (II.2)

- Décharge élastique si :  $f = 0$  et  $\dot{f} < 0$  ( $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e \varepsilon = \dot{\sigma}/E$ ) (II.3)

- Écoulement plastique si :  $f = 0$  et  $\dot{f} = 0$  ( $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^p$ ) (II.4)

En régime élastique, la vitesse de déformation plastique est bien entendu nulle, la vitesse de déformation élastique devenant à son tour nulle pendant l'écoulement plastique. Ceci implique que l'expression de la vitesse de déformation plastique ne peut pas se faire à l'aide de la contrainte. C'est au contraire la vitesse de déformation qui doit être choisie comme pilote.

Le modèle est sans *écrouissage*, puisque le niveau de contrainte ne varie plus au sortir du domaine d'élasticité. Il n'y a pas d'énergie stockée au cours de la déformation, et la dissipation en chaleur est égale à la puissance plastique. Le modèle est susceptible d'atteindre des déformations infinies sous charge constante, conduisant à la ruine du système par déformation excessive.

### II.3.2. Modèle de Prager

L'association en parallèle de la figure 2.2b correspond au comportement illustré en figure II.2.d. Dans ce cas, le modèle présente de l'écrouissage. Il est dit cinématique linéaire (Prager, 1955), car dépendant linéairement de la valeur actuelle de la déformation plastique. Sous cette forme, le modèle est rigide-plastique. Il devient élasto-plastique si l'on rajoute un ressort en série. La forme de la courbe dans le plan  $\sigma - \varepsilon^P$  est due au fait que, lors de l'écoulement plastique, la contrainte qui s'établit dans le ressort vaut  $X = H\varepsilon^P$ . Par ailleurs, cet écoulement ne se produit que si la valeur absolue de la contrainte dans le patin, soit  $|\sigma - H\varepsilon^P|$ , est égale à  $\sigma_y$ . Pour une déformation donnée, cette contrainte X est une contrainte interne qui caractérise le nouvel état neutre du matériau.

Ce deuxième exemple offre l'occasion d'écrire un modèle plus complet que précédemment. La fonction de charge dépend maintenant de la contrainte appliquée et de la contrainte interne. Elle s'écrit

$$f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y \quad (\text{II.5})$$

Il n'y aura présence d'écoulement plastique que si on vérifie à la fois  $f = 0$  et  $\dot{f} = 0$ . Ceci conduit à la condition suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} - \frac{\partial f}{\partial X} \dot{X} = 0 \quad (\text{II.6})$$

D'où :

$$\text{signe}(\sigma - X) \dot{\sigma} + \text{signe}(\sigma - X) \dot{X} = 0 \quad (\text{II.7})$$

$$\dot{\sigma} = X \text{ et finalement } \dot{\varepsilon}^P = \frac{\dot{\sigma}}{H} \quad (\text{II.8})$$

Dans ce cas, la contrainte augmente au cours de l'écoulement plastique, si bien qu'elle peut servir de variable de contrôle. Mais il est aussi toujours possible d'exprimer la vitesse d'écoulement plastique en fonction de la vitesse de déformation totale, en utilisant la décomposition de la déformation combinée avec l'expression de la vitesse de déformation plastique, le cas où  $H = 0$  redonnant bien entendu le cas du matériau parfaitement plastique :

$$\dot{\varepsilon}^P = \frac{E}{E+H} \dot{\varepsilon} \quad (\text{II.9})$$

## II.4. Viscoélasticité uniaxiale

### II.4.1. Un exemple de modèle rhéologique

Le modèle de Maxwell regroupe un amortisseur et un ressort en série (figure II.3.a), celui de Voigt un amortisseur et un ressort en parallèle (figure II.3.b). Leurs équations respectives sont :

- **Maxwell**

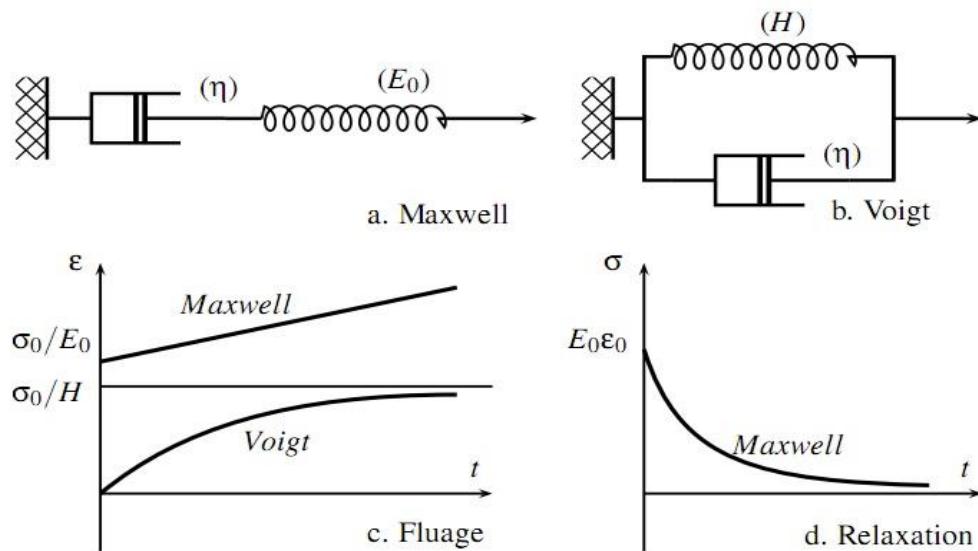
$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (\text{II.10})$$

- **Voigt**

$$\sigma = H\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \text{ ou encore : } \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma - H\varepsilon}{\eta} \quad (\text{II.11})$$

La particularité du modèle de Voigt est de ne pas présenter d'élasticité instantanée. Ceci entraîne que sa fonction de relaxation n'est pas continue et dérivable par morceaux, avec un saut fini à l'origine :

L'application d'un saut de déformation en  $t = 0$  produit une contrainte infinie. Ce modèle n'est donc pas utilisable en relaxation, sauf si la mise en charge est progressive, et sera pour cette raison associé à un ressort en série pour effectuer des calculs de structure (modèle de Kelvin–Voigt du paragraphe suivant). Sous l'effet d'une contrainte  $\sigma_0$  constante en fonction du temps, la déformation tend vers la valeur asymptotique  $\sigma_0/H$ , le fluage est donc limité (figure II.3.c). Par ailleurs, si, après une mise en charge lente, la déformation est fixée à une valeur  $\varepsilon_0$ , la contrainte asymptotique sera  $(H^*\varepsilon_0)$ . Il n'y a donc pas dans ce dernier cas disparition complète de la contrainte. Au contraire, dans le cas du modèle de Maxwell, la vitesse de fluage est constante (figure II.3.c), et la disparition de contrainte au cours d'une expérience de relaxation est totale (figure II.3.d).



**Figure II.3.** Fonctionnement des modèles de Maxwell et Voigt.

#### II.4.2. Écriture générale des équations de l'élasto-plasticité uniaxiale

Dans le cas général, les conditions de «charge–décharge» s’expriment donc :

$$\checkmark \text{ Domaine d'élasticité si : } f(\sigma, A_i) < 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E) \quad (\text{II.12})$$

$$\checkmark \text{ Décharge élastique si : } f(\sigma, A_i) = 0 \text{ et } \dot{f}(\sigma, A_i) < 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E) \quad (\text{II.13})$$

$$\checkmark \text{ Écoulement plastique si : } f(\sigma, A_i) = 0 \text{ et } \dot{f}(\sigma, A_i) = 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + \dot{\varepsilon}^P) \quad (\text{II.14})$$

Dans le cas général, le module H dépend de la déformation et/ou des variables d’écrouissage. La valeur du module plastique au point  $(\sigma, A_i)$  s’obtient en écrivant que le point représentatif du chargement reste sur la limite du domaine d’élasticité au cours de l’écoulement. L’équation qui en découle s’appelle la condition de cohérence :

$$\dot{f}(\sigma, A_i) = 0 \quad (\text{II.15})$$

Ce formalisme peut paraître un peu lourd dans le cadre d'un chargement uniaxial, mais il est utile de le mettre en place, car ce sont les mêmes outils qui seront ensuite utilisés dans le cas plus complexe des chargements multiaxiaux. Dans les deux exemples qui ont été décrits, le domaine d'élasticité est soit fixe, soit mobile, sa taille étant conservée. Le premier cas ne nécessite bien entendu aucune variable d’écrouissage, le second fait intervenir une variable X

qui dépend de la valeur actuelle de la déformation plastique. Cette variable deviendra tensorielle dans le cas général.

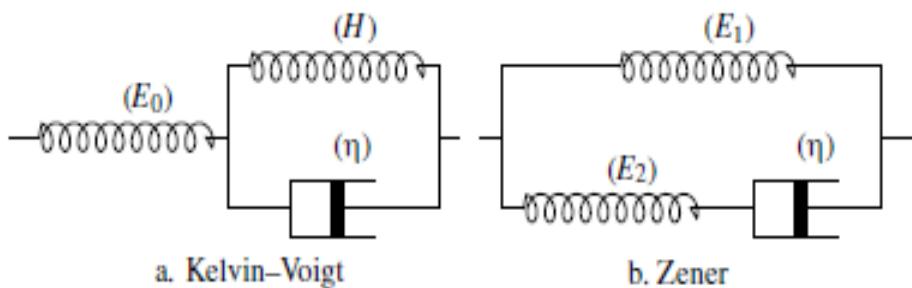
### II.4.3. Modèles composés

#### II.4.3.1. Modèle de Kelvin–Voigt

Il présente respectivement les réponses suivantes, pour  $\tau > 0$ , en fluage sous une contrainte  $\sigma_0$ , en posant  $\tau_f = \eta / H$ , et en relaxation pour une déformation  $\varepsilon_0$ , en posant  $\tau_f = \eta / (H + E_0)$  :

$$\varepsilon(t) = C(t)\sigma_0 = \left( \frac{1}{E_0} + \frac{1}{H} \left( 1 - \exp \left[ -\frac{t}{\tau_f} \right] \right) \right) \sigma_0 \quad (\text{II.16})$$

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon_0 = \left( \frac{H}{H + E_0} + \frac{E_0}{H + E_0} \left( \exp \left[ -\frac{t}{\tau_f} \right] \right) \right) E_0 \varepsilon_0 \quad (\text{II.17})$$



**Figure II.4.** Exemple de modèles composés

#### II.4.2.1. Modèle de Zener :

Il peut se ramener au modèle de Kelvin–Voigt, à l'aide du double changement de variable

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{H} \text{ , et } E_2 = E_0 + H \quad (\text{II.18})$$

Ce qui prouve que les deux modèles sont en fait identiques. La même observation peut être faite en fluage. Ce modèle correspond au comportement du béton frais. Les modèles indiqués peuvent être encore améliorés :

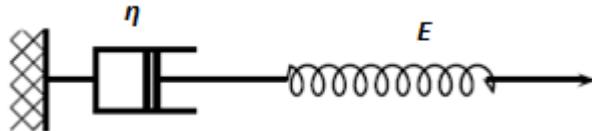
- Le modèle de Kelvin–Voigt généralisé est obtenu en ajoutant en série d'autres modules amortisseur-ressort ( $H$ ,  $\eta$ ) dans le cas du premier modèle; ce modèle représente en général correctement le comportement des polymères fortement réticulés.
- Le modèle de Maxwell généralisé est obtenu en ajoutant en parallèle d'autres modules amortisseur-ressort ( $E_2$ ,  $\eta$ ) au second modèle ; ce modèle représente qualitativement le comportement des polymères thermoplastiques.

## II.5. Exercices

### ➤ Exercice 1

On considère un modèle viscoélastique de Maxwell, composé par l'assemblage en série d'un amortisseur de viscosité  $\eta$  et d'un ressort de module  $E$ .

- 1) Donner l'équation qui caractérise le comportement de ce modèle.



### Solution de l'exercice n°01 :

L'association du patin et du ressort est en série, donc:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Pour le patin:

$$\dot{\sigma} = \eta \cdot \dot{\varepsilon}$$

Pour le ressort:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

L'équation qui caractérise le comportement du modèle de Maxwell:

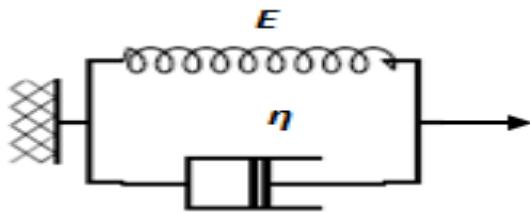
$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{E}$$

$$\eta \dot{\varepsilon} = \sigma + \frac{\eta}{E} \dot{\sigma}$$

### ➤ Exercice 2

On considère un modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt, composé par l'assemblage en série d'un amortisseur de viscosité  $\eta$  et d'un ressort de module E.

- 1) Donner l'équation qui caractérise le comportement de ce modèle.



#### Solution de l'exercice n°02 :

L'association du patin et du ressort est en série, donc:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Pour le patin:

$$\dot{\sigma} = \eta \cdot \dot{\varepsilon}$$

Pour le ressort:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

L'équation qui caractérise le comportement du modèle de Kelvin-Voigt:

$$\dot{\sigma} = E \cdot \dot{\varepsilon} + \eta \cdot \dot{\varepsilon}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma - \eta \cdot \dot{\varepsilon}}{\eta}$$

## *Chapitre III*

### *Les critères*

### III.1. Introduction

Un critère de plasticité, ou critère d'écoulement plastique, est un critère permettant de savoir, sous des sollicitations données, si une pièce se déforme plastiquement ou si elle reste dans le domaine élastique. De nombreux essais ont montré que l'on pouvait utiliser deux critères principaux : le critère de Tresca-Guest ou le critère de Von Mises. En résistance des matériaux, on désire parfois rester dans le domaine élastique, on parle alors de critère de résistance.

La contrainte de comparaison n'est pas une contrainte réelle existant à un instant donné à l'intérieur d'un solide, mais elle est utilisée en mécanique pour prédire la rupture. Néanmoins, la plupart des spécialistes l'utilisent pour déterminer si un champ de contrainte donné dans une pièce est acceptable ou non. On parle aussi de contrainte équivalente ou de contrainte effective. Elle découle des critères de plasticité. Cette contrainte est comparée à la limite d'élasticité ou encore la contrainte de rupture obtenue par essai de traction.

### III.2. Contraintes principales

Le tenseur des contraintes caractérise les efforts intérieurs définis pour chaque volume unitaire de matière. Il permet de décrire précisément l'état de contrainte en chaque point et est noté :

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{III.1})$$

Sachant que les termes hors diagonale correspondent à du cisaillement, et appartenant souvent à la base vectorielle (X, Y, Z), il peut aussi s'écrire :

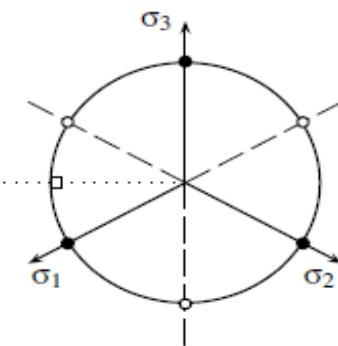
$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{III.2})$$

Les contraintes peuvent être exprimées dans une base telle que le tenseur des contraintes est une matrice diagonale : on parle de contraintes principales :

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

Les contraintes principales permettent d'interpréter immédiatement le(s) type(s) de sollicitations subi(s) par la matière, traction, compression, cisaillement, à la différence des critères de Von Mises et Tresca comme présenté ci-après.

- désigne les points qui peuvent se ramener à de la traction simple, (o) ceux qui peuvent se ramener à la compression simple (par exemple un chargement biaxial, car un état où les seules contraintes non nulles sont  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  est équivalent à  $\sigma_3 = -\sigma$ ), est un état de cisaillement.



**Figure III.1:** Etats de contraintes caractéristiques dans le plan déviateur.

### III.3. Critères de Plasticité

#### III.3.1. Critère Von Mises

Le critère de plasticité permet de se positionner par rapport à la limite d'élasticité  $\sigma_e$  :

- $\sigma_{VM} \leq \sigma_e$ : non-plastification, d'où existence d'un potentiel de tenue en fatigue
- $\sigma_{VM} > \sigma_e$  : plastification, potentiel de tenue en fatigue réduit, voire inexistant

Le critère de Von Mises est le plus couramment utilisé. Sous contrainte principale on obtient :

$$\sigma_{VM} = |\sigma| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (\text{III.4})$$

Ou bien sous le tenseur de contraintes :

$$\sigma_{VM} = |\sigma| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \quad (\text{III.5})$$

La fonction d'écoulement plastique peut s'écrire :

$$f(\sigma) = \sigma_{VM} - \sigma_e \quad (\text{III.6})$$

Ce critère prend compte des composantes de contraintes en traction, compression et cisaillement pour donner un niveau de contrainte isotrope (le même dans toutes les directions).

Le critère de Von Mises n'indique pas le type de sollicitations : traction, compression, cisaillement, ...

### III.3.2. Critère de Tresca

L'expression du critère de Von Mises fait intervenir les cisaillements maximaux dans chaque plan principal, représentés par les quantités  $(\sigma_i - \sigma_j)$ . La spécificité du critère de Tresca est de ne retenir que le plus grand d'entre eux. Le fait de rajouter une pression à chaque terme de la diagonale ne modifie pas, comme prévu, la valeur du critère. Contrairement au cas précédent, cette expression ne définit en général pas une surface régulière (discontinuité de la normale, points anguleux) :

$$\sigma_T = \max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| \quad (\text{III.7})$$

La fonction d'écoulement plastique peut s'écrire :

$$f(\sigma) = \sigma_T - \sigma_e \quad (\text{III.8})$$

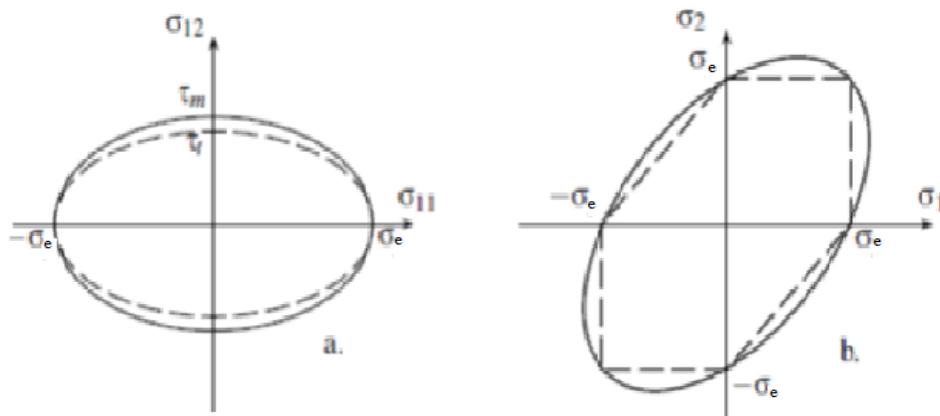
### III.3.3. Comparaison des critères de Tresca et Von Mises :

Comme il n'est bien entendu pas question de se placer dans l'espace des 6 (ou 9) composantes du tenseur des contraintes, il faut se résoudre à ne visualiser les frontières du domaine d'élasticité que dans des sous-espaces à deux ou trois dimensions. Les représentations les plus courantes s'effectuent :

Dans le plan traction cisaillement (figure III.2.a), lorsque seules les composantes  $\sigma = \sigma_{11}$  et  $\tau = \sigma_{12}$  sont non nulles ; les expressions des critères se réduisent alors à :

- **Von Mises :**  $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$  (III.9)

- **Tresca :**  $\sigma_T = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$  (III.10)



**Figure III.2 :** Comparaison des critères de Tresca (en pointillés) et de von Mises (traits pleins). En traction-cisaillement, (b) En traction biaxiale

Dans le plan des contraintes principales ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) (figure III.2.b), lorsque la troisième contrainte principale  $\sigma_3$  est nulle :

- **Von Mises :**  $\sigma_{VM} = \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2)}$
- **Tresca :**

$\sigma_T = \sigma_2$	si	$0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2$
$\sigma_T = \sigma_1$	si	$0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$
$\sigma_T = \sigma_1 - \sigma_2$	si	$\sigma_1 \leq 0 \leq \sigma_2$

Dans le plan déviateur (figure III.1), le critère de Von Mises est représenté par un cercle, ce qui est cohérent avec son interprétation par le cisaillement octaédral, le critère de Tresca par un hexagone ;

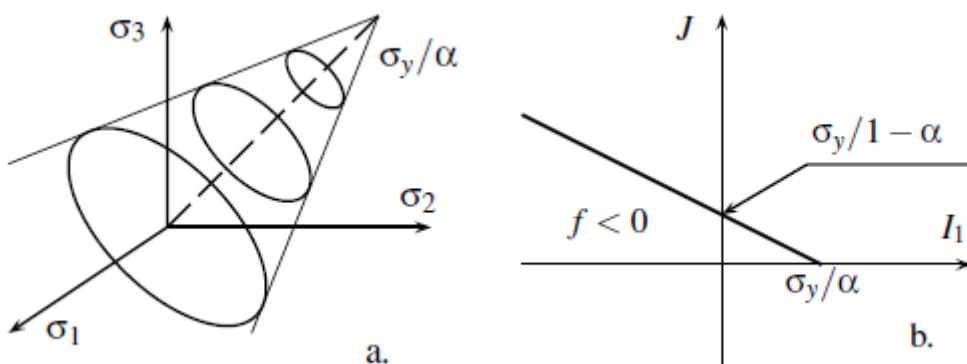
Dans l'espace des contraintes principales, chacun de ces critères est représenté par un cylindre de génératrice (1,1,1), qui s'appuie sur les courbes définies dans le plan déviateur.

### III.4. Critères faisant intervenir la pression hydrostatique

Ces critères sont nécessaires pour représenter la déformation plastique des matériaux pulvérulents, des sols ou en présence d'endommagement du matériau. Ils expriment le fait qu'une contrainte hydrostatique de compression rend plus difficile la déformation plastique. Une des conséquences de leur formulation est qu'ils introduisent une dissymétrie traction-compression.

#### III.4.1. Critère de Drucker–Prager

C'est une extension du critère de Von Mises, combinaison linéaire du deuxième invariant du déviateur et de la trace du tenseur des contraintes. C'est toujours un cercle dans le plan déviateur, mais qui dépend de l'altitude sur la trisectrice des axes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  de contraintes principales (figure III.3.a) :



**Figure III.3 :** Représentation du critère de Drucker–Prager, (a) dans l'espace des contraintes principales, (b) dans le plan  $I_1–J$

$$f(\sigma) = (1 - \alpha)J + \alpha I_1 \quad (\text{III.11})$$

Avec :

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (\text{III.12})$$

$$I_1 = \text{trace}(\sigma) = \sum \sigma_{ii} \quad (\text{III.13})$$

La limite d'élasticité en traction reste  $\sigma_e$ , et la limite d'élasticité en compression est  $-\sigma_e/(1 - 2\alpha)$ . Le coefficient  $\alpha$  dépend du matériau, il est bien entendu compris entre 0 et 1/2, et on retrouve le critère de von Mises pour  $\alpha = 0$  (figure III.3.b).

### III.4.2. Critère de Mohr–Coulomb

Il est apparenté au critère de Tresca, faisant intervenir comme lui le cisaillement maximal, mais en même temps la contrainte «moyenne», représentée par le centre du cercle de Mohr correspondant au cisaillement maximum, soit :

$$f(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2C \cos \phi \quad (\text{III.14})$$

Avec :  $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$

Ce critère est sous-tendu par la notion de frottement, et suppose que le cisaillement maximal que peut subir le matériau ( $T_t$  en figure III.4.a) est d'autant plus grand que la contrainte normale de compression est élevée. La limite admissible constitue une courbe intrinsèque dans le plan de Mohr. La formule énoncée ci-dessus est obtenue avec une règle de frottement linéaire :

$$|T_t| < -\tan(\phi) T_n + C \quad (\text{III.15})$$

La constante  $C$  est la cohésion, correspondant à la contrainte de cisaillement qui peut être supportée par le matériau sous contrainte moyenne nulle. L'angle  $\phi$  désigne le frottement interne du matériau. Si  $C$  est nul et  $\phi$  non nul, le matériau est dit pulvérulent. Si  $\phi$  est nul et  $C$  non nul, comme dans le cas du critère de Tresca, le matériau est purement cohérent.

Le critère peut également s'exprimer sous la forme suivante, en fonction de la poussée  $K_p$  et de la limite d'élasticité en compression,  $R_p$  :

$$f(\sigma) = K_p \sigma_1 - \sigma_3 - R_p \quad (\text{III.16})$$

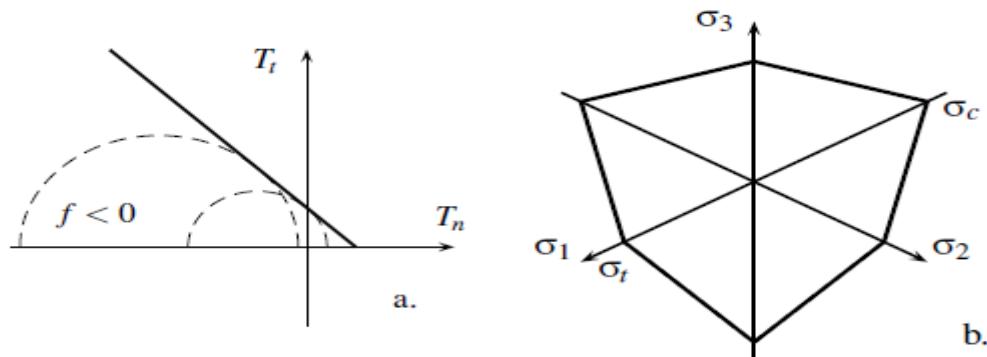
Avec :

$$K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}; R_p = \frac{2C \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (\text{III.17})$$

Dans le plan déviateur (figure III.4.b) on obtient un hexagone irrégulier, caractérisé par les valeurs suivantes (avec  $p = (-1/3)I_1$ ) :

$$\sigma_t = 2 \frac{\sqrt{6}(C \cos \phi - p \sin \phi)}{3 + \sin \phi} \quad (\text{III.18})$$

$$\sigma_c = 2 \frac{\sqrt{6}(-C \cos \phi + p \sin \phi)}{3 - \sin \phi} \quad (\text{III.19})$$



**Figure III.4 :** Représentation du critère de Mohr-Coulomb, (a) dans le plan de Mohr, (b) dans le plan déviateur

### III.5. Modélisation de l'écrouissage

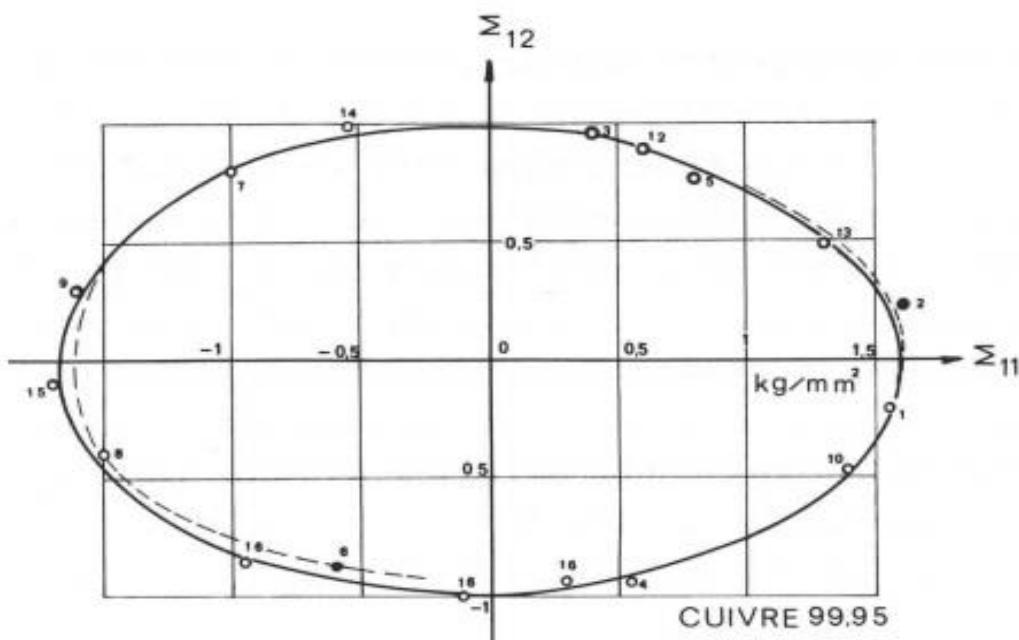
Lorsque l'état de contrainte atteint la surface de charge initiale et que le chargement du matériau se poursuit, celui-ci se déforme plastiquement. Selon le matériau, cet état de charge peut progresser dans l'espace des contraintes en modifiant la géométrie de la surface de charge initiale, de sorte que cet état de charge reste toujours sur la surface de charge. On parle d'écrouissage au sens où la charge a modifié la géométrie du domaine élastique. Une décharge de l'éprouvette montrera d'ailleurs un retour dans ce domaine élastique qui vient d'être modifié.

L'écrouissage dépend bien entendu du trajet de charge parcouru hors du domaine d'élasticité initial. Les modifications subies par la surface de charge peuvent être de trois sortes :

- une expansion isotrope de la surface ;

- une translation du centre du domaine d'élasticité initial. Ce déplacement est à l'origine de l'effet Bauschinger observé sur un essai unidimensionnel : cette translation rompt la symétrie traction/compression du seuil de plasticité ;
- une distorsion ou un changement de forme de la surface. Initialement elliptique, comme illustré sur la figure (III.5) dans un plan  $(\sigma; \tau)$ , cette surface peut se distordre jusqu'à présenter un point plus ou moins anguleux dans la direction de chargement.

Pour d'autres matériaux, la nouvelle surface seuil obtenue après écoulement plastique s'avère être identique à la surface de charge initiale, on parlera de matériau élastique parfaitement plastique.



**Figure III.5 :** Essai de traction-torsion sur cuivre : surface seuil initiale. En trait plein la surface seuil prédicta par le critère de Von Mises.

Dans la suite, nous nous limitons à la modélisation du changement de taille de la surface (écrouissage isotrope) et à la translation du centre du domaine (écrouissage cinématique).

### III.5.1. Écrouissage isotrope

Ce type d'écrouissage tient compte d'une expansion du domaine d'élasticité avec la déformation plastique. Cette expansion correspond à une homothétie de centre 0. Aussi, on ne tient pas compte de l'effet Bauschinger, la surface reste centrée sur l'origine. Supposons que la surface de charge puisse s'écrire sous la forme :

$$f(\sigma, p) = \sigma_{eq} - \sigma(p) \quad (\text{III.20})$$

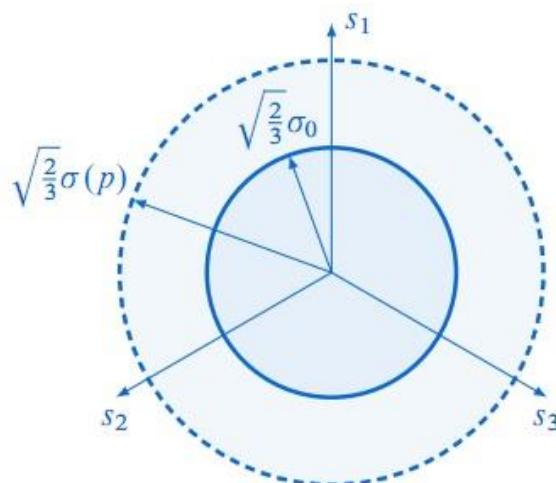
Où  $\sigma(p)$  est une fonction croissante de la déformation plastique équivalente cumulée, cette dernière étant définie de la façon suivante :

$$p = \int_0^t \dot{p}(\tau) d\tau; \dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^P : \dot{\varepsilon}^P} \quad (\text{III.21})$$

La fonction  $\sigma(p)$  est supposée connue expérimentalement, on verra qu'on peut en proposer plusieurs modèles. Cette fonction scalaire est astreinte à valoir la limite d'élasticité initiale lorsque la déformation plastique équivalente cumulée est nulle, soit formellement :

$$\sigma(p=0) = \sigma_0 \quad (\text{III.22})$$

La figure (III.6) montre l'expansion du domaine d'élasticité décrite par ce type d'écrouissage.



**Figure III.6 :** Expansion du domaine d'élasticité de Von Mises : écrouissage isotrope.

L'écriture la plus simple pouvant être considérée  $\sigma(p)$  est une fonction affine de la déformation plastique cumulée  $p$ , de sorte que  $\sigma(p) = Q_p + \sigma_0$ ,  $Q$  étant une constante. On peut aussi écrire cette fonction comme une loi puissance  $\sigma(p) = K_p^n + \sigma_0$ , c'est la loi de Ramberg-Osgood.

### III.5.2. Écrouissage cinématique

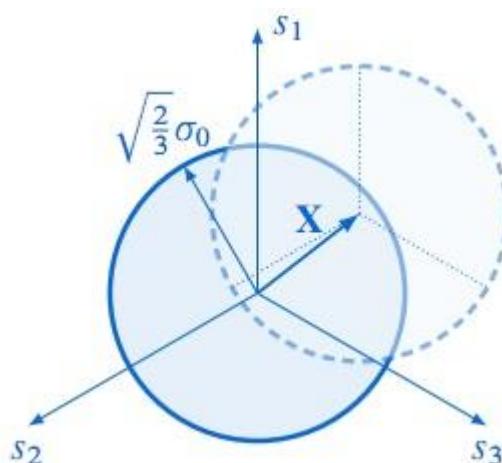
L'écrouissage cinématique correspond à une translation du centre du domaine d'élasticité, sans changement de forme ni de taille, et permet donc de prendre en compte l'effet Bauschinger identifié lors de l'essai unidimensionnel. On introduit alors le tenseur déviateur  $X (trX = 0)$  pour décrire la position du centre du domaine d'élasticité. Ce tenseur est nul pour le domaine initial centré en 0. Aussi le critère actuel de plasticité s'applique à présent à l'état de contrainte « décentré »  $\sigma - X$ , et s'écrit :

$$f(\sigma - X) \leq 0 \quad (\text{III.23})$$

Par exemple la contrainte équivalente de Von Mises prend la forme suivante :

$$\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{\frac{3}{2}(s - X):(s - X)} \quad (\text{III.24})$$

Où on rappelle que  $s$  est le déviateur des contraintes. Physiquement,  $X$  correspond à l'existence de contraintes internes à l'échelle microscopique dues aux défauts et aux hétérogénéités qui représentent des obstacles à la migration des dislocations dans les grains.

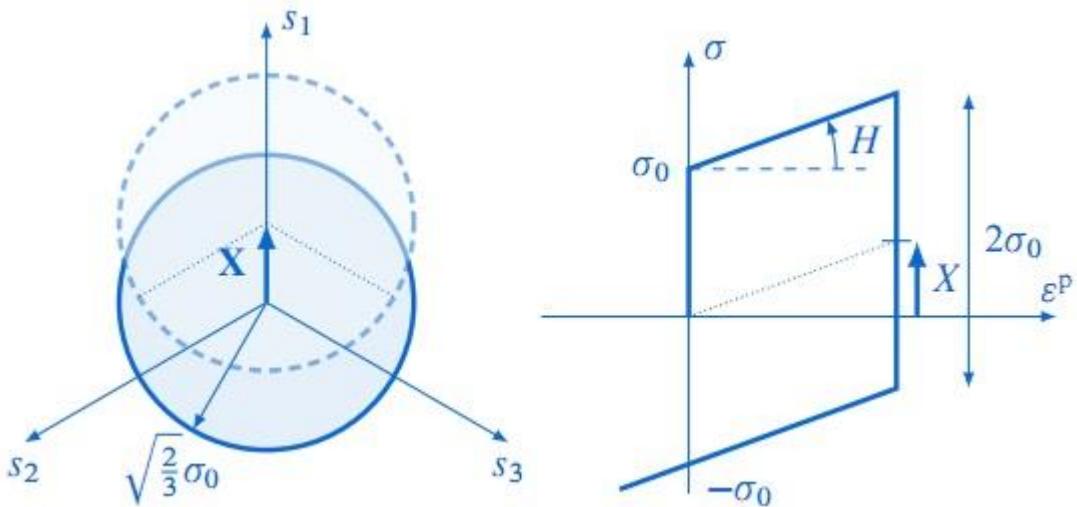


**Figure III.7 :** Translation du domaine d'élasticité de Von Mises : écrouissage cinématique.

La figure (III.7) illustre la translation du domaine d'élasticité paramétrée par le tenseur  $X$ . Il existe de nombreux modèles d'évolution de  $X$  dont certains assez complexes dont nous reparlerons au second chapitre. Le modèle le plus simple consiste à piloter son évolution de façon linéaire avec la vitesse de déformation plastique :

$$\dot{X} = H \dot{\varepsilon}^P \quad (\text{III.25})$$

Où  $H$  est un paramètre. L'évolution linéaire est connue sous le nom de loi de Prager.



**Figure III.8 :** Écrouissage cinématique : essai de traction

Soit, par application du critère, l'état de contrainte actuel s'exprime comme  $\sigma = \sigma_0 + X = \sigma_0 + H\varepsilon^P$ . Ce décentrement correspondant à l'effet Bauschinger est illustré dans le cas de l'essai de traction sur la figure III.8.

L'expérience montre que ce type d'écrouissage est de première importance dès qu'une structure subit des chargements cycliques, dans lesquels des états de contrainte de traction/compression peuvent se succéder dans chaque cycle. Si ces chargements sont suffisamment importants pour générer un écoulement plastique (par exemple en fatigue oligocyclique), la prise en compte d'une dissymétrisation traction/compression de la surface d'élasticité au travers de sa translation s'avère nécessaire pour pouvoir prédire correctement le comportement de l'élément de matière. Dans la pratique, on utilise des modèles qui combinent les écrouissages isotrope et cinématiques pour de nombreux matériaux métalliques.

### III.6. Exercices

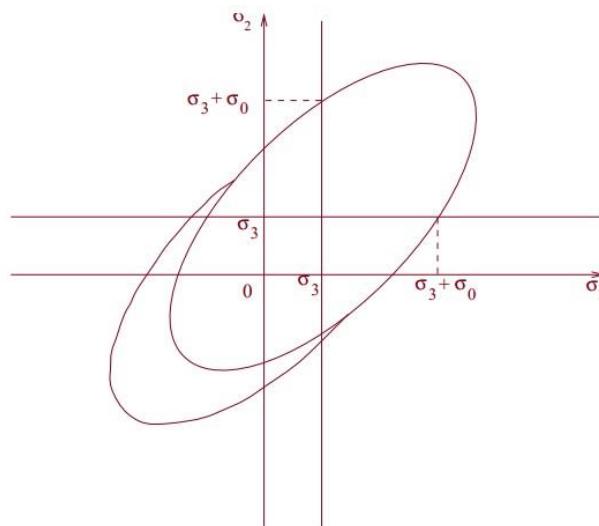
➤ **Exercice 1**

Tracer dans le plan des contraintes principales  $\sigma_1-\sigma_2$  la limite du domaine d'élasticité en accord avec les critères de Von Mises et de Tresca, dans le cas où les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sont  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

➤ **Solution d'exercice n°01 :**

Le critère ne doit pas être modifié par l'addition d'un tenseur sphérique. On en déduit que la forme du critère pour l'état de contrainte :  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  est la même que celle obtenue pour :  $(\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 - \sigma_3, 0)$ .

La forme cherchée dans le plan  $\sigma_1-\sigma_2$  est donc obtenue par simple translation dans la direction de la première bissectrice. Ce résultat, illustré en figure III.9 dans le cas du critère de Von Mises, est également valable pour le critère de Tresca.



**Figure III.9 :** Tracé du critère de Von Mises dans le plan  $\sigma_1-\sigma_2$ , en contrainte plane et pour  $\sigma_3 \neq 0$ .

## Chapitre IV

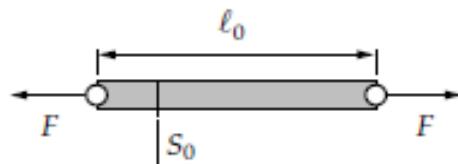
# Plasticité des barres

## IV.1. Introduction

Ce chapitre introduit les principales notions d'élasto-plasticité à partir de l'analyse de la réponse d'une éprouvette soumise à un essai de traction–compression. La modélisation de cet essai permet de présenter différentes schématisations couramment utilisées pour traiter des problèmes d'évolution élasto-plastique. Ces modèles sont ensuite soumis aux calculs analytique puis numérique des structures treillis.

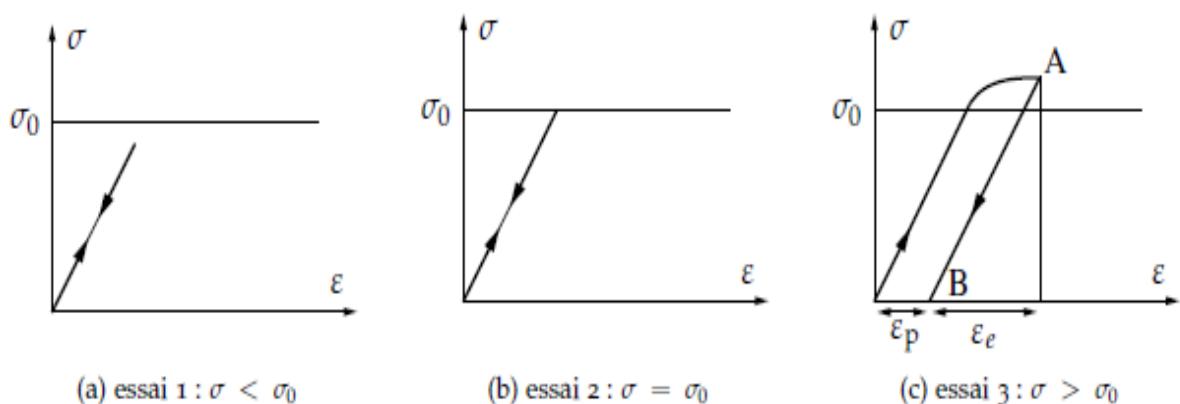
## IV.2. Essai de traction

Intéressons-nous à l'aspect phénoménologique de l'essai dans le cadre de l'élasto-plasticité classique, à savoir hypothèses de transformations quasi-statiques en petites déformations et à température



**Figure IV.1:** Eprouvette de traction

Considérons une éprouvette de traction sous la forme d'un cylindre homogène droit de section  $S_0$  et de longueur  $l_0$ . Cette éprouvette est soumise à un effort de traction  $F$  comme sur la figure (IV.1). Pour des petites déformations de l'éprouvette, l'état de contrainte peut être supposé uniforme et uniaxial (la diminution de section est négligée). Nous posons  $\varepsilon = \varepsilon_{xx} = \Delta\ell/\ell_0$  et  $\sigma = \sigma_{xx} = F/S_0$ . Considérons les graphes ( $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ) obtenus pour trois essais de traction avec décharge. Selon le niveau de sollicitation lors du chargement, nous obtenons les allures de la figure (IV.2).

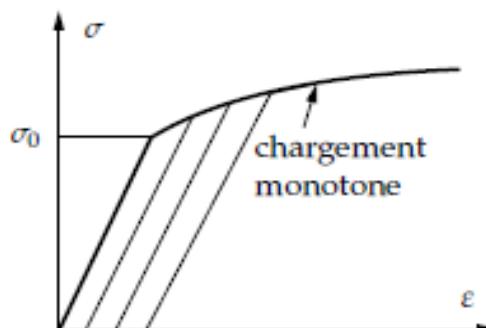


**Figure IV.2:** Traction avec décharge.

- $\sigma < \sigma_0$  : le système se situe dans le domaine élastique et le comportement du matériau est réversible. Il est supposé par la suite que la loi de comportement dans le domaine élastique est linéaire, soit  $\sigma = E \varepsilon_e$  où  $E$  est le module d'Young du matériau ;
- $\sigma = \sigma_0$  : cet essai est impossible à réaliser physiquement. La limite d'élasticité  $\sigma_0$ , seuil à partir duquel il existe des déformations irréversibles, est définie de façon conventionnelle et correspond à une fraction de déformation permanente ;
- $\sigma > \sigma_0$  : la décharge à partir du point A (chargement maximum) s'effectue parallèlement à la charge élastique, on parle de décharge élastique. En B (charge nulle) ne subsiste que la déformation plastique ou déformation permanente  $\varepsilon_p$ .

En tout point de la courbe, la déformation est  $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ . Effectuons maintenant une série de charges-décharges consécutives. L'allure de la courbe de réponse est représentée sur la figure (IV.3). Nous observons une évolution de la limite d'élasticité en traction due à l'écrouissage. En première approximation, nous pouvons considérer que :

- lors des chargements consécutifs la limite d'élasticité suit la courbe du chargement monotone ;
- l'écoulement plastique ne modifie pas le module d'élasticité.

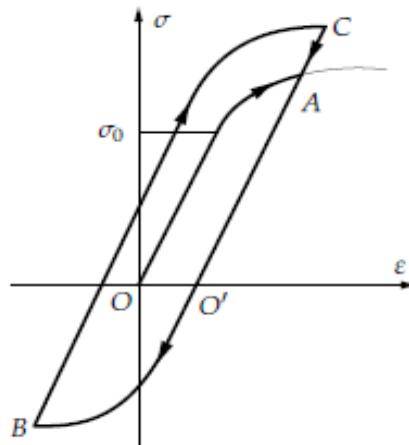


**Figure IV.3:** Réponse à une série de charges-décharges consécutives

Par conséquent, connaissant la déformation plastique, le seuil de plasticité actuel peut être défini à partir de la courbe d'écrouissage obtenue pour un chargement monotone.

En fait le problème de l'évolution du domaine d'élasticité est une des difficultés majeures de la plasticité. Prenons l'exemple d'un chargement cyclique pour montrer que la connaissance de l'état actuel ( $\sigma, \varepsilon_p$ ) ne suffit pas a priori pour définir le domaine d'élasticité actuel. Sur la figure (IV.4), après décharge nous obtenons le point O', la déformation plastique

est définie par le segment  $OO'$ . Or dans cet état, la limite d'élasticité est différente au premier et au deuxième passage. Cet exemple montre que les lois décrivant l'évolution du domaine d'élasticité ont un caractère essentiellement incrémental. De plus, il faut distinguer deux cas :



**Figure IV.4:** Historique d'un cycle de chargement OA-AB-BC

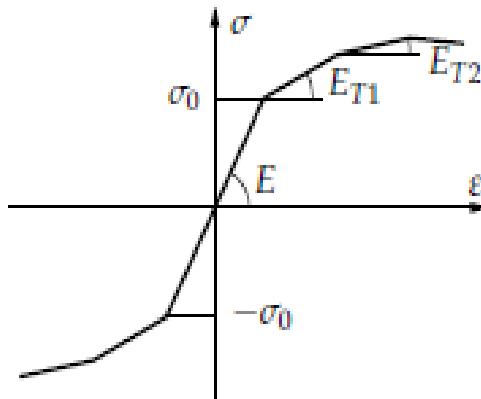
**Charge plastique :** Il y a variation des paramètres d'écrouissage et de la déformation plastique.

**Charge ou décharge élastique :** Il n'y a pas de variation des paramètres d'écrouissage ni de la déformation plastique.

En résumé, l'évolution plastique ne peut se traduire que par des lois incrémentales reliant à un instant donné les incrémentations des paramètres d'écrouissage et de déformation plastique à partir de l'état actuel. Pour l'étude des problèmes quasi-statique d'élasto-plasticité (sans vieillissement ni viscosité), nous utilisons donc un temps cinématique  $t$  pour repérer les états successifs du matériau en fonction de l'historique des sollicitations.

## IV.2. Modélisation du comportement en traction-compression

Pour modéliser la courbe d'écrouissage de l'essai de traction-compression obtenue pour un chargement monotone, le plus simple est d'utiliser un modèle construit à partir de segments de droite. La figure (IV.5) représente un modèle multilinéaire. Dans la suite, nous limiterons la présentation à des modèles bilinéaires ayant la même limite d'élasticité initiale en traction et en compression.

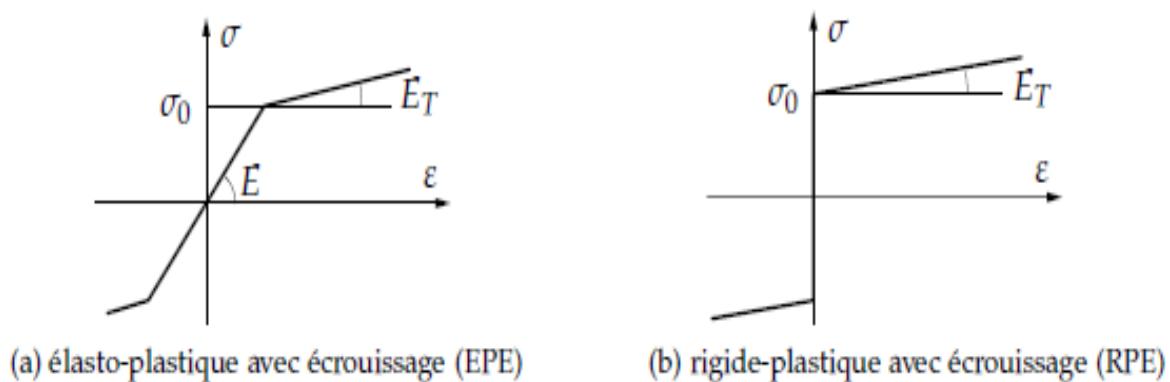


**Figure IV.5:** Modèle d'écrouissage multilinéaire

#### IV.2.1. Modèles avec écrouissage

Le modèle rigide plastique peut être utilisé lorsque les déformations plastiques sont très importantes par rapport aux déformations élastiques : c'est, par exemple, le cas pour les problèmes de mise en forme.

Lorsqu'il y a écrouissage, il faut se donner un modèle pour représenter l'évolution du domaine d'élasticité. Les deux modèles les plus simples sont l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique. Ils sont basés sur l'utilisation de la courbe d'écrouissage du chargement monotone, illustrée sur la figure (IV.6).

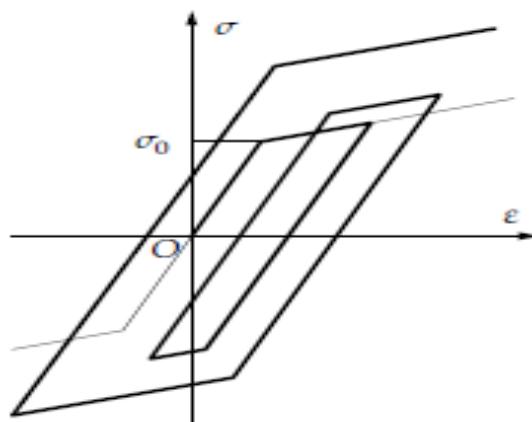


**Figure IV.6:** Modèles d'écrouissage monotone.

### a) Écrouissage isotrope

Ce modèle suppose une dilatation homothétique du domaine d'élasticité par rapport au domaine initial supposé connu. Le coefficient de dilatation dans le cas de l'écrouissage linéaire est défini par le module tangent  $E_T$ .

Pour un essai cyclique, l'hypothèse d'écrouissage isotrope donne une courbe similaire à celle représentée sur la figure (IV.7). La limite d'élasticité en compression augmente comme celle de traction. On note que dans ce modèle l'énergie de déformation élastique pouvant être absorbée est de plus en plus importante et toujours identique en traction et compression.

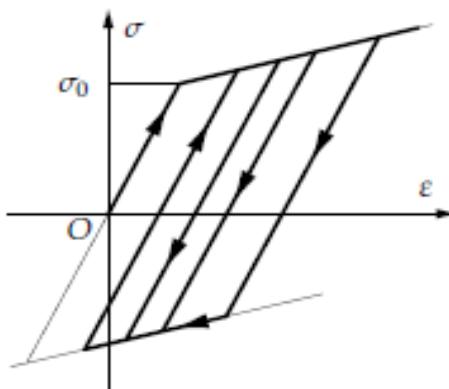


**Figure IV.7:** Hypothèse d'écrouissage isotrope

### b) Écrouissage cinématique

Ce modèle suppose une translation sans déformation du domaine d'élasticité initial supposé connu. La translation est définie à partir de la courbe d'écrouissage monotone.

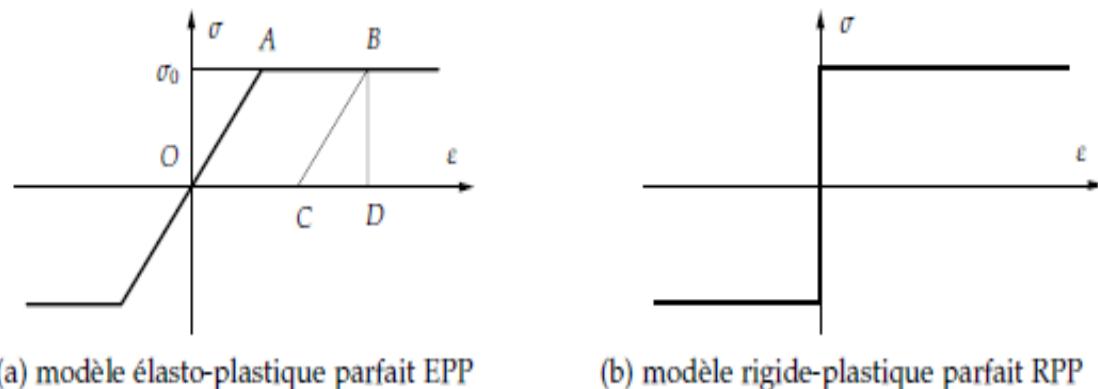
Le modèle cinématique respecte l'effet Bauschinger couramment observé pour les matériaux métalliques, à savoir un durcissement dans un sens (sens de l'écoulement plastique) et un adoucissement d'égale amplitude dans le sens contraire (décharge élastique). La courbe correspondant à un essai cyclique avec écrouissage cinématique est indiquée sur la figure (IV.8). L'amplitude du domaine d'élasticité reste constante mais l'énergie élastique absorbée et pouvant être restituée dans un sens est toujours différente de celle dans l'autre sens. En pratique, lors d'un essai cyclique, aucune de ces allures ne peut être observée. Il est possible de combiner ces deux modèles d'écrouissage pour essayer de se rapprocher au mieux de la réponse au chargement cyclique donné.



**Figure IV.8:** Hypothèse d'écrouissage cinématique

#### IV.2.2. Modèles parfaits

Ces modèles négligent l'écrouissage du matériau. Le modèle élasto-plastique parfait est surtout utilisé du point de vue académique pour simplifier la résolution analytique des problèmes posés.



**Figure IV.9:** Modèle de courbe d'écrouissage monotone

Pour ce modèle, donnons une interprétation énergétique de la courbe d'écrouissage :

- OABD : énergie totale, ou travail des efforts intérieurs pour atteindre B ;
- OABC : énergie de dissipation plastique ;
- BCD : énergie de déformation élastique, elle est restituée à la décharge.

Le modèle rigide plastique parfait est utilisé pour les problèmes de calcul des charges limites (Lorsque l'écrouissage n'est pas négligé, l'énergie élastique restituée après plastification est toujours plus importante dans le sens de la déformation plastique). Pour ces

deux modèles, au-delà d'une valeur limite du chargement il y aura écoulement libre du matériau et perte d'équilibre.

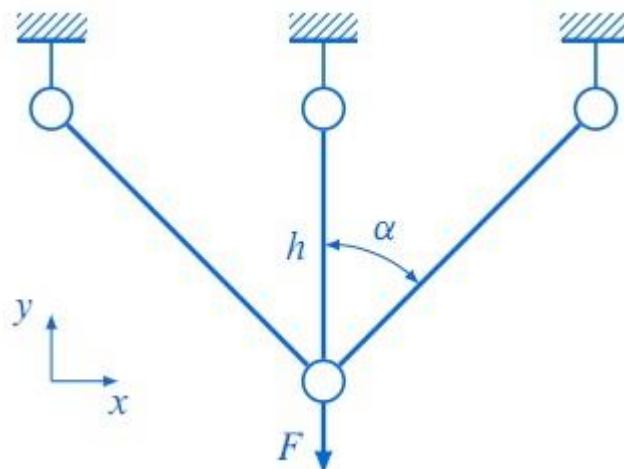
### IV.3. Exercices

#### ➤ Exercice 1

On considère la structure treillis de la figure IV.10 composée de trois barres, articulées entre elles au point d'application du chargement  $F$ , et chacune étant articulée par rapport au bâti. On suppose que les barres sont à l'état initial sans contraintes, et que le chargement est appliqué suffisamment lentement pour rentrer dans le cadre établi précédemment. On suppose d'autre part que les trois barres ont un comportement élastique parfaitement plastique identique, c'est- à-dire un module d'Young  $E$  et une limite d'élasticité  $\sigma_0$ , et une section identique  $S$ . Pour simplifier l'étude, l'angle  $\alpha$  est égal à 45.

On demande d'étudier :

- La plasticité dans les barres au travers d'une structure treillis composée de trois barres ;



**Figure IV.10 :** Structure treillis de trois barres.

#### ➤ Solution d'exercice n° 1 :

*Phase élastique :* Analyse du problème Nous avons trois inconnues  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$ , représentant les efforts dans les barres, pour deux équations d'équilibre dans le plan. Par conséquent, le système est hyperstatique de degré un. Les équations d'équilibre ont la forme suivante :

$$-N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0; N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 - F = 0 \quad (\text{IV.1})$$

Soit, plus simplement :

$$N_3 = N_1; N_2 = F - \sqrt{2}N_1 \quad (\text{IV.2})$$

Prenons  $N_1$  comme inconnue hyperstatique. L'énergie de déformation s'écrit dans ce cas d'étude :

$$2W = \frac{1}{ES} \left( h\sqrt{2}N_1^2 + hN_2^2 + h\sqrt{2}N_3^2 \right) \quad (\text{IV.3})$$

Et par conséquent, en fonction de l'inconnue  $N_1$ , grâce à l'équation (IV.2) :

$$2W = \frac{h}{ES} \left( 2\sqrt{2}N_1^2 + (F - \sqrt{2}N_1)^2 \right) \quad (\text{IV.4})$$

Appliquons le théorème de Ménabréa :

$$\frac{\partial w}{\partial N_1} = 0 \Rightarrow (2\sqrt{2} + 2)N_1 = F\sqrt{2} \Rightarrow N_1 = \frac{F}{2 + \sqrt{2}} \quad (\text{IV.5})$$

D'où, finalement :

$$N_3 = N_1; N_2 = \frac{F\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \quad (\text{IV.6})$$

## Chapitre V

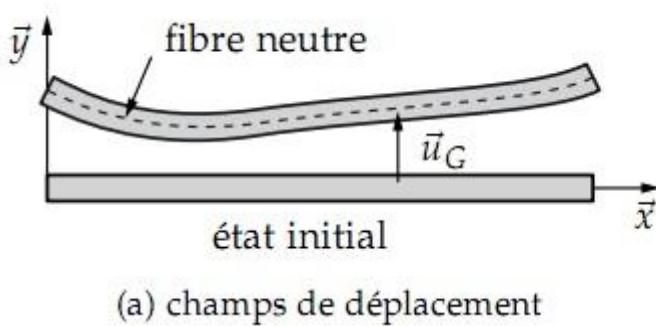
# Plasticité des poutres

## V.1. Introduction

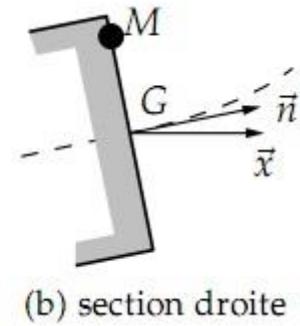
Ce chapitre est consacré à l'étude de l'évolution élasto-plastique des poutres. La loi de comportement généralisée élasto-plastique est obtenue à partir d'un modèle en flexion pure (moment de flexion constant). Ce modèle est appliqué à l'étude élasto-plastique des structures portiques.

## V.2. Rappels et notations

Considérons une poutre longue rectiligne en flexion dans le plan ( $x.o.y$ ) dans le cadre des hypothèses de Bernoulli et des petits déplacements qui entraînent  $\vec{\theta} = v, x\vec{z}_0$  et  $\vec{u}(M,t) = (-yv, x, v0)^T$ .



(a) champs de déplacement



(b) section droite

**Figure V.1:** modèle de Bernoulli : flexion plane.

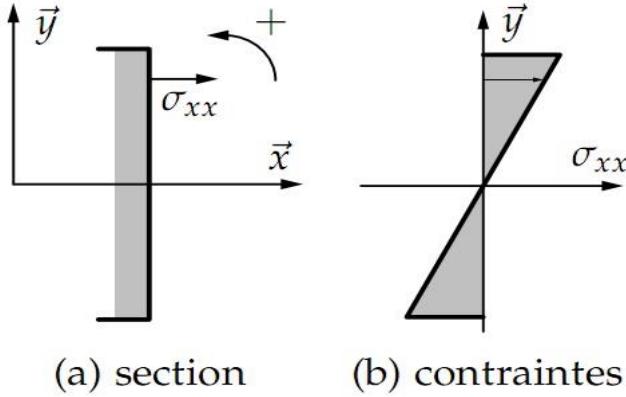
Les petites déformations supposent  $\varepsilon_{xx} = -yv_{,xx}$ . Le milieu est isotrope homogène élastique et l'état de contrainte est uni-axial, soit  $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$ . Intégrons les contraintes sur la section pour obtenir la loi de comportement généralisée élastique des poutres :

$$M_f = EIv_{,xx} \quad (\text{V.1})$$

Cette loi relie les deux grandeurs utilisées lors des calculs, le moment de flexion et la flèche. En statique, l'équation d'équilibre des moments donne :

$$T = -M_{f,x} = -EIv_{,xxx} \quad (\text{V.2})$$

On note la contrainte généralisée  $\tilde{\sigma} = M_f$ , la déformation généralisée  $\tilde{\varepsilon} = v_{xx}$  et la loi de comportement généralisée  $\tilde{\sigma} = EI\tilde{\varepsilon}$ .



**Figure V.2:** Essai de flexion

La loi de comportement du matériau étant définie au niveau local, exprimons les relations entre la contrainte physique et la contrainte généralisée, relations utiles par la suite pour exprimer les lois de comportement élasto-plastique :

$$\tilde{\sigma} = EI\tilde{\varepsilon} = EI \left( -\frac{\varepsilon_{xx}}{y} \right) = -\frac{EI}{y} \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad (\text{V.3})$$

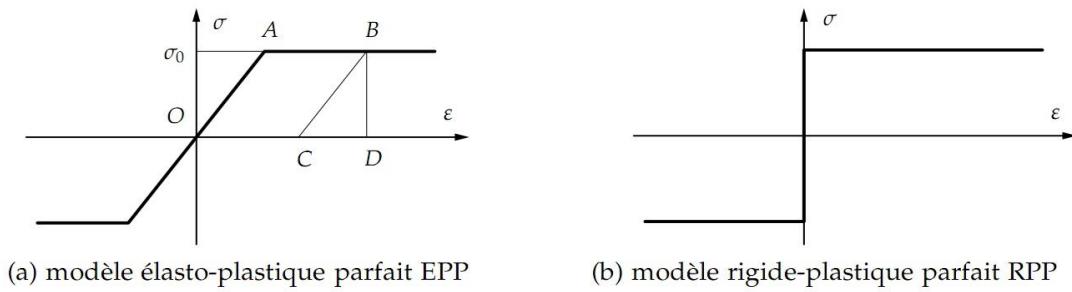
Ce qui entraîne les champs de contraintes et de déformations suivants :

$$\sigma_{xx} = -\frac{y}{I} \tilde{\sigma}; \varepsilon_{xx} = -y \tilde{\varepsilon} \quad (\text{V.4})$$

### V.3. Modèle élasto-plastique

Ce sont les champs  $\tilde{\sigma}$  et  $\tilde{\varepsilon}$  qui sont utilisés lors des calculs. Notre objectif est donc d'exprimer la loi de comportement généralisée élasto-plastique  $\tilde{\sigma} = f(\tilde{\varepsilon})$  en fonction de la loi de comportement du matériau.

Pour simplifier la présentation nous supposons le matériau élasto-plastique parfait. La courbe d'écrouissage du matériau identifiée par un essai de traction est représentée sur la figure (V.3.a).



**Figure V.3:** modèle de courbe d’écrouissage monotone.

#### V.4. Flexion pure

##### ✓ Évolution élastique

Considérons un essai de flexion pure réalisé sur une poutre de section symétrique. Le moment de flexion  $M$  est uniforme le long de la poutre. Pour cet essai, représenté sur la figure (V.4), l’effort tranchant est nul. La solution obtenue avec les hypothèses de Bernoulli est donc exacte pour les matériaux incompressibles et quasi-exacts pour les matériaux compressibles.



**Figure V.4 :** Essai de flexion pure.

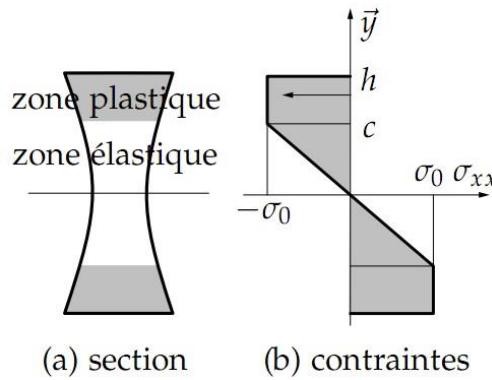
Compte tenu de la répartition des contraintes dans la section et des hypothèses de symétrie, les fibres les plus éloignées situées à une distance  $\pm h$  de la fibre moyenne plastifient les premières. Par conséquent, il y a début de plastification lorsque  $(\sigma_{xx})_{y=\pm h} = \sigma_0$ , soit

$\tilde{\sigma}_0 = \frac{I}{h} \sigma_0$  où  $\tilde{\sigma}_0$  est le moment de début de plastification. La déformation généralisée

correspondante est  $\tilde{\varepsilon}_0 = \frac{I}{Eh} \sigma_0$ .

##### ✓ Évolution élasto-plastique

Pour  $M > \tilde{\sigma}_0$ , il y a évolution élasto-plastique du matériau à partir des fibres extérieures. Le moment étant uniforme sur la longueur, dans toute section de la poutre, nous obtenons l’état de contrainte de la figure (V.5.b).



**Figure V.5:** Flexion pure et zones plastiques symétriques

Le matériau étant élasto-plastique parfait au-delà de la cote  $c$ , la contrainte dans la zone plastique est uniforme  $\sigma_{xx} = \pm \tilde{\sigma}_0$ .

Conservons l'hypothèse de Bernoulli pour exprimer  $c$  en fonction des variables généralisées et  $\sigma_0$ . En  $\sigma_{xx} = -\sigma_0$  et  $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -Ec\tilde{\varepsilon}$  ce qui entraîne,  $c = \frac{\sigma_0}{E\tilde{\varepsilon}}$ .

**Remarque :** Cette dernière relation reste vraie pour un matériau écrouissable. L'hypothèse de Bernoulli suppose des déformations plastiques suffisamment sympathiques pour que la planéité des sections droites soit vérifiée.

Comme en élasticité, pour écrire la loi de comportement généralisée, il faut intégrer sur une section le champ des contraintes afin d'obtenir une relation entre le moment de flexion et la courbure :

$$\tilde{\sigma} = M_f = \int_{-h}^{+h} -y\sigma_{xx} ds = 2 \int_0^h -y\sigma_{xx} ds \quad (\text{V.5})$$

Et puisque la section est supposée symétrique :

$$\tilde{\sigma} = 2 \int_0^c -y \left( -\frac{y}{c} \sigma_0 \right) ds + 2 \int_c^h y \sigma_0 ds \quad (\text{V.6})$$

Notons respectivement le moment quadratique de la zone élastique  $I(c)$ , le moment statique de la zone élastique  $Z(c)$  et le moment statique de la section  $Z(h)$  :

$$I(c) = 2 \int_0^c y^2 ds; Z(c) = 2 \int_0^c y ds; Z(h) = 2 \int_0^h y ds; \quad (V.7)$$

Nous obtenons la loi de comportement généralisée élasto-plastique  $\tilde{\sigma} = f(\tilde{\varepsilon})$ , en fonction du module d'élasticité E et de limite en traction  $\sigma_0$  :

$$\tilde{\sigma} = \sigma_0 \left( \frac{I(c)}{c} + Z(h) - Z(c) \right) \quad (V.8)$$

Avec  $c = \frac{\sigma_0}{E\tilde{\varepsilon}}$ , Montrons que  $\tilde{\sigma}$  est une fonction croissante de  $\tilde{\varepsilon}$ . Il suffit de montrer que c'est une fonction décroissante de c.

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{dc} = \sigma_0 \left( -\frac{I(c)}{c^2} + \frac{1}{c} \frac{dI(c)}{dc} - \frac{dZ(c)}{dc} \right) \quad (V.9)$$

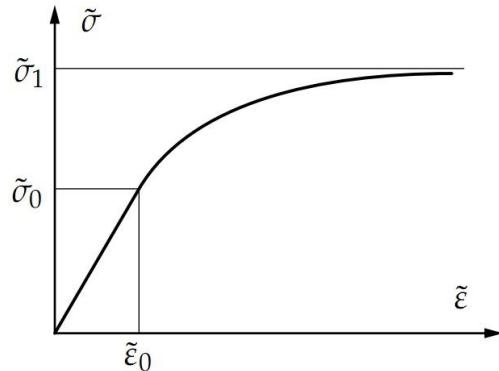
Or :

$$I(c) = 2 \int_0^c y^2 ds = 2 \int_0^c y^2 L(y) dy \text{ et } Z(c) = 2 \int_0^c y ds = 2 \int_0^c y L(y) dy \quad (V.10)$$

Ce qui entraîne :

$$\frac{1}{c} \frac{dI(c)}{dc} = \frac{dZ(c)}{dc} = 2cL(c) \quad (V.11)$$

Ce résultat est conforme à l'intuition car une augmentation de charge ne peut qu'augmenter la zone plastique.

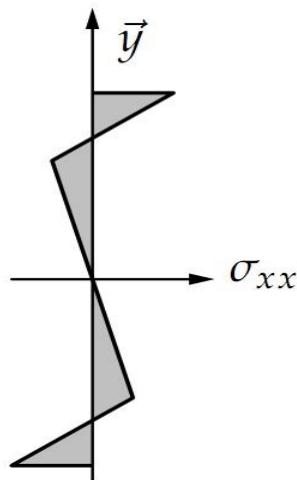


**Figure V.6:** Loi de comportement généralisée  $\tilde{\sigma} = f(\tilde{\varepsilon})$ .

La figure (V.6) représente la loi de comportement généralisée  $\tilde{\sigma} = f(\tilde{\varepsilon})$ . Pour  $c = h$ , on retrouve  $\tilde{\sigma}$  (moment de début de plastification). Pour  $c \rightarrow 0$ , il y a plastification complète de la section. Le moment correspondant est le moment limite  $\tilde{\sigma} = f(\tilde{\varepsilon})$ . Le caractère asymptotique est dû à l'existence d'une mince zone au voisinage de la fibre moyenne qui reste toujours élastique ( $\sigma_{xx} = 0$ ). En flexion pure, la section ne peut pas plastifier complètement. Ce résultat purement théorique n'a pas de réalité physique. Rappelons que la loi de comportement généralisée des poutres longues est un modèle basé sur des hypothèses simplificatrices contradictoires du point de vue physique.

Une décharge élastique conduirait au diagramme des contraintes résiduelles de figure (V.7). On comprend aisément qu'il n'est pas possible d'utiliser ce modèle pour traiter des problèmes cycliques, sans parler de l'introduction de l'écrouissage. Le rapport  $\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_0}$  est le facteur de forme plastique de la section :

$$\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_0} = \frac{hZ(h)}{I} \quad (\text{V.12})$$



**Figure V.7:** superposition des diagrammes élasto-plastique et élastique correspondant à un chargement  $-M$

Il caractérise la réserve vis-à-vis de la plastification totale d'une section donnée. Plus ce rapport est élevé, plus la phase élasto-plastique est grande, autrement dit, un rapport élevé

confère une plus grande sécurité par rapport au chargement élastique limite. En contrepartie, la charge limite élastique sera plus petite, il faut donc trouver le bon compromis.

Le tableau (V.1) indique les facteurs de forme plastiques classés par ordre décroissant pour différentes sections.

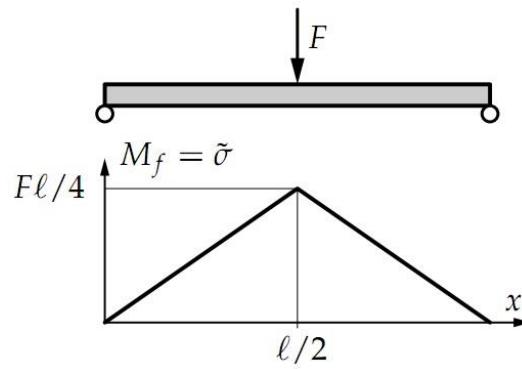
**Tableau V.1:** Facteurs de forme plastiques pour différentes sections.

$\frac{\tilde{\sigma}_0}{\sigma_0}$	$\frac{1}{6}bh^2$	$\frac{\pi R^3}{4}$	$\frac{2}{3}bh^2$	$\pi eR^2$	$h\left(s' + \frac{s}{6}\right)$
$\frac{\tilde{\sigma}_1}{\sigma_0}$	$\frac{1}{3}bh^2$	$\frac{4\pi R^3}{3}$	$bh^2$	$4eR^2$	$h\left(s' + \frac{s}{4}\right)$
$\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_0}$	2	$\frac{16}{3\pi} \approx 1,7$	1,5	$\frac{4}{\pi} \approx 1,27$	$\frac{12 + 3s/s'}{12 + 2s/s'}$

Plus ce rapport tend vers l'unité, meilleure est la section du point de vue élastique (toutes les fibres plastifient en même temps). Dans ce cadre, la section 5 du tableau V.1 est optimale.

## V.5. Flexion simple

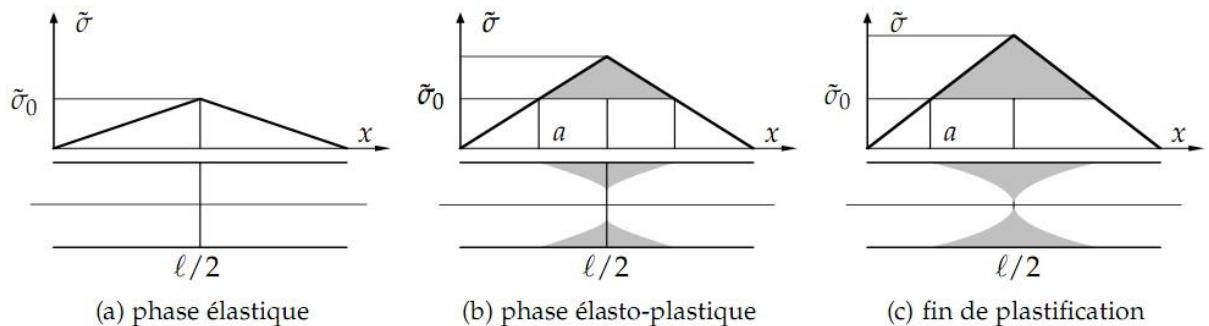
En pratique, il est rare d'obtenir un état de contrainte constant par morceaux. Cela signifie que les zones plastiques sont réduites à des sections dont la position évolue au cours du chargement. Étudions le cas d'une poutre de section rectangulaire sur deux appuis chargée en son centre par une force supposée ponctuelle. Le diagramme du moment de flexion est représenté sur la figure (V.8). Les zones plastiques apparaissent dans la section  $x = \ell/2$  où le moment est maximal. Puis les zones plastiques s'étendent aux sections voisines avec l'augmentation du chargement.



**Figure V.8:** Essai de flexion simple.

Modélisation Pour étudier l'évolution élasto-plastique, nous adoptons la loi de comportement élasto-plastique obtenue en flexion pure. Les effets de l'effort tranchant dans la zone plastique sont négligés.

Le début de la phase élasto-plastique correspond à  $Mf = \tilde{\sigma}_0$  et  $F = \frac{4\tilde{\sigma}_0}{l}$  et la section  $x = \ell/2$  est complètement plastifiée pour  $Mf = \tilde{\sigma}_1$  et  $F = \frac{4\tilde{\sigma}_1}{l}$ . La figure (V.9) représente l'évolution de la zone plastique selon les phases du chargement.



**Figure V.9 :** évolution des zones de plastification en flexion simple

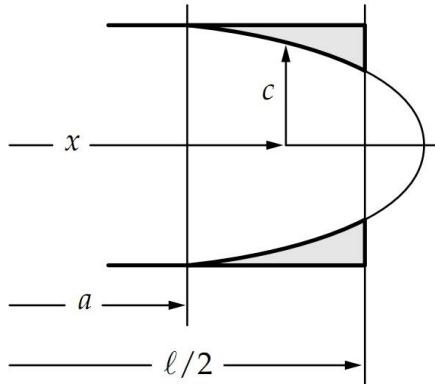
Étude de la zone plastique L'abscisse de la première section plastifiée est simple à exprimer  $a = \frac{2\tilde{\sigma}_0}{F}$ . La forme de cette zone est définie par la cote  $c = \frac{\sigma_0}{E\tilde{\varepsilon}}$ , or pour  $a \leq x \leq l/2$  :

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\sqrt{3\left(1 - \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}_1}\right)}} \Rightarrow c = \frac{\sigma_0}{E\tilde{\varepsilon}_0} \sqrt{3\left(1 - \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}_1}\right)} \Rightarrow c = h \sqrt{3\left(1 - \frac{Fx}{2\tilde{\sigma}_1}\right)} \quad (\text{V.13})$$

Or  $F_1 = \frac{4\tilde{\sigma}_1}{l}$  d'où :

$$c = h \sqrt{3 \left( 1 - \frac{2F}{F_1} \frac{x}{l} \right)} \quad (\text{V.14})$$

La figure (V.10) représente la zone plastique qui est limitée par une parabole d'équation  $c(x)$  définie pour  $F_0 < F \leq F_1$ .



**Figure V.10:** Zone plastique en flexion simple

### ➤ Étude de la déformation

L'étude de la déformation est conduite sur deux zones :

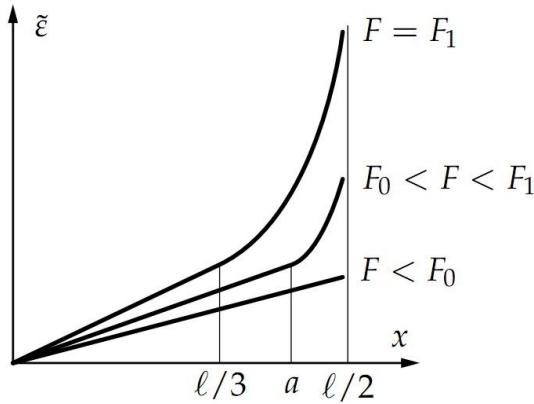
- zone élastique pour  $x \leq a$  :

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\sigma}}{EI} = \frac{F}{2EI} x = \frac{\tilde{\sigma}_0}{EI} \frac{x}{a} = \tilde{\varepsilon}_0 \frac{x}{a} \quad (\text{V.15})$$

- zone élasto-plastique pour  $a \leq x \leq l/2$  :

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}_1} \right)}} \quad (\text{V.16})$$

La figure (V.11) représente l'évolution de la courbure pour les trois phases de chargement de la figure (V.9). Pour  $F = F_1$ , la courbure a un comportement asymptotique et tend vers l'infini. Tout se passe comme si la poutre était formée de deux tronçons articulés.



**Figure V.11:** Essai de flexion pure

Pour obtenir l'expression de la flèche, il faut intégrer les relations qui définissent la courbure en fonction de x.

⊕ **Phase élastique :** Le chargement est tel que  $F \leq F_0$  et la loi de comportement généralisée indique  $\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\sigma}}{EI} = \frac{F}{2EI}x$  avec  $v(0) = 0$  et  $v_x(l/2) = 0$  pour cause de symétrie.

Par conséquent, la flèche prend la forme suivante :

$$v(x) = \frac{Fl^3}{4EI} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{x}{l} \right)^3 - \frac{x}{4l} \right) \quad (\text{V.17})$$

⊕ **Phase élasto-plastique :** Le chargement est alors  $F_0 \leq F \leq F_1$  avec  $a = \frac{2\tilde{\sigma}_0}{F}$ . Les fonctions de répartition sont définies dans les équations (V.15) et (V16). Les quatre constantes sont calculées en écrivant la condition d'appui en  $x = 0$ , la condition de symétrie en  $x = l/2$  et la continuité de la flèche et de la rotation en  $x = a$ . Tous calculs faits, nous obtenons :

- Pour  $x \leq a$

$$v(x) = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{6a} x^3 + \tilde{\varepsilon}_0 a \left( \sqrt{3 - \frac{l}{a}} - \frac{3}{2} \right) x \quad (\text{V.18})$$

- Pour  $a \leq x \leq l/2$  :

$$v(x) = \tilde{\varepsilon}_0 \frac{a^2}{3} \left( 3 - 2 \frac{x}{a} \right)^{3/2} + \tilde{\varepsilon}_0 a \sqrt{3 - \frac{l}{a}} x - \frac{5}{3} \tilde{\varepsilon}_0 a^2 \quad (\text{V.19})$$

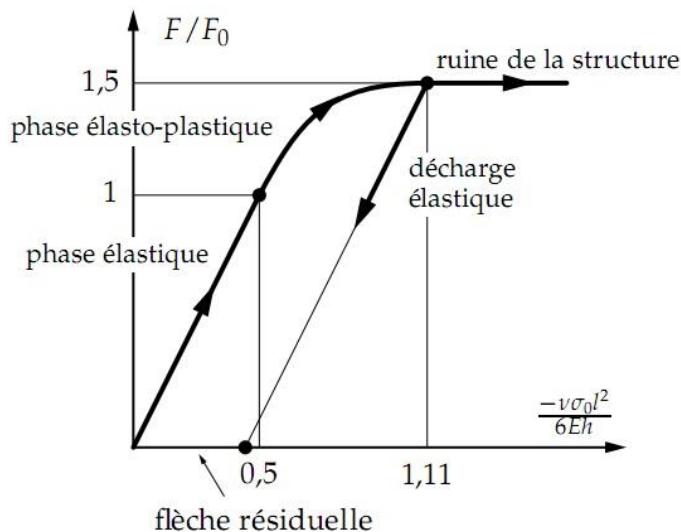
Traçons l'évolution de la flèche en milieu de poutre :

- Pour  $F = F_0$  :

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{F_0 l^3}{48EI} = -\frac{\sigma_0 l^2}{12Eh} \quad (\text{V.20})$$

- Pour  $F = F_1$  :

$$a = \frac{2\tilde{\sigma}_0}{F_1} = \frac{l}{2} \frac{\tilde{\sigma}_0}{\tilde{\sigma}_1} = \frac{l}{3} \Rightarrow v\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{5}{3} \tilde{\sigma}_0 a^2 = -\frac{5\sigma_0 l^2}{27Eh} \quad (\text{V.21})$$



**Figure V.12:** Phases d'évolution et flèche résiduelle

La flèche résiduelle après décharge élastique est :

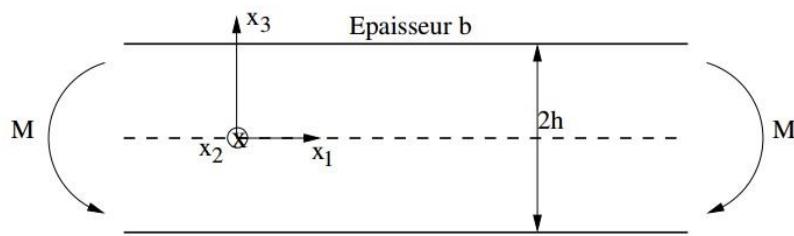
$$v_r\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5\sigma_0 l^2}{27Eh} - \frac{F_1 l^3}{48EI} = \frac{\sigma_0 l^2}{Eh} \left( \frac{5}{27} - \frac{1}{8} \right) \quad (\text{V.22})$$

L'essai de flexion simple que nous venons d'étudier a mis en évidence le comportement asymptotique de la courbure. Les deux parties de la poutre de part et d'autre de la section  $\ell/2$  peuvent tourner, le moment restant constant (matériau parfaitement plastique). Nous modélisons cette propriété par une rotule plastique (rotule avec frottement sec).

## V.6. Exercice

### ➤ Exercice n°1 : Flexion d'une poutre de section rectangulaire

La poutre de la figure V.13 possède une section rectangulaire, de hauteur  $2h$  et de largeur  $b$ . Elle est chargée en flexion pure (cisaillements négligés), et on suppose qu'une section droite de normale  $x_1$  reste droite. Le comportement du matériau qui la constitue est élastique ( $E, v$ ) parfaitement plastique ( $\sigma_y$ ).



**Figure V.13:** Géométrie et chargement de la poutre.

- ✓ Quelle est la distribution de contrainte et de déformation en élasticité ?

### ➤ Solution de l'exercice n°01 :

L'état de flexion pure autour de  $x_2$  d'un barreau d'axe  $x_1$  est caractérisé par une déformation  $\varepsilon_{11}$  linéaire en  $x_3$  et, en élasticité, par une contrainte  $\sigma_{11}$  également linéaire en  $x_3$ . On pose  $\sigma_{11} = kx_3$ . Toutes les autres composantes du tenseur de contrainte sont nulles. Les tenseurs de contrainte et de déformation élastique sont respectivement représentés par les matrices :

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \sigma/E & 0 & 0 \\ 0 & -v\sigma/E & 0 \\ 0 & 0 & -v\sigma/E \end{pmatrix} \quad (\text{V.23})$$

Le vecteur contrainte sur une section courante de normale  $e_1$  se réduit à  $\sigma_{11}e_1$ . On déduit immédiatement de la géométrie de la section ( $0 \leq x_2 \leq b$  et  $-h \leq x_3 \leq h$ ) que la résultante est nulle sur une facette normale à l'axe  $x_1$ . Le moment des efforts intérieurs sur la section de la poutre s'écrit, en tenant compte du fait que les composantes de OM sont  $(0, x_2, x_3)$  :

$$M = \iint (OM \times T) ds = M_2 e_2 + M_3 e_3 \quad (\text{V.24})$$

Avec :

$$M_2 = \iint x_3 \sigma_{11} dx_2 dx_3 = \iint Kx_3^2 dx_2 dx_3 \quad (\text{V.25})$$

$$M_3 = -\iint x_2 \sigma_{11} dx_2 dx_3 = -\iint Kx_2 x_3 dx_2 dx_3 \quad (\text{V.26})$$

La composante  $M_3$  est nulle (intégrale de  $x_3$  entre  $-h$  et  $h$ ). L'expression obtenue pour  $M_2$ , que l'on désignera dans la suite par  $M$  :

$$M = kb \int_{-h}^{+h} x_3^2 dx_3 = \frac{2}{3} k b h^3 \quad (\text{V.27})$$

On peut donc exprimer  $k$  en fonction du moment, et, en posant  $I = 2bh^3 / 3$ , on trouve la valeur courante de  $\sigma_{11}$  sur la section :

$$\sigma_{11} = \sigma(x_3) = Mx_3 / I \quad (\text{V.28})$$

Il s'agit d'une fonction impaire en  $x_3$ , dont la valeur maximale,  $\sigma_m$ , atteinte en  $x_3 = h$ , vaut  $3M/2bh^2$ .

# Bibliographie

**Bibliographie**

- [1] **D. François, A. Pineau et A. Zaoui.** *Comportement mécanique des matériaux*. Hermès, Paris, 1991.
- [2] **B. Halphen et J. Salençon.** *Élastoplasticité*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1987.
- [3] **J. Lemaitre et J.L. Chaboche.** *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985.
- [4] **J. Owen et E. Hinton.** *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*. Pineridge Press, New York, 1980.
- [5] **P. SUQUET.** *Rupture et plasticité*. École Polytechnique, 2004.
- [6] **J.SALENÇON.** *L'élastoplasticité au calcul à la rupture*. Éditions de l'École polytechnique, 2002. ISBN : 9782730209151.
- [7] **J. BESSON, G. CAILLETAUD, J. CHABOCHE et S. FOREST.** *Mécanique non linéaire des matériaux*. Hermès, 2001. ISBN : 9782746202689 (cf.page7).
- [8] **H D. BUI.** « *Évolution de la frontière du domaine élastique des métaux avec l'écrouissage plastique et le comportement élastoplastique d'un agrégat de cristaux cubiques* ». Mémoire de l'Artillerie Française 1 (1971), pages 141–165.
- [9] **R. HILL.** *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon Press, 1967. ISBN : 9780198503675.
- [10] **J. MARIGO.** *Plasticité et rupture*. École Polytechnique, 2011.
- [11] **J. SIMO et T. HUGHES.** *Computational Inelasticity*. Springer, 1998. ISBN : 9780387975207.
- [12] **P. De BUHAN.** *Plasticité et calcul à la rupture*. Presses Ponts et Chaussées, 2007. ISBN : 9782859784324.