République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ibn Khaldoun Tiaret

Faculté des Sciences Appliquées

Département des Sciences et de la Technologie

Polycopié de Mathématiques 4 : Cours et Exercices Supplémentaires

Destiné aux étudiants de deuxième année LMD domaine ST.

Réalisé par :

Dr. TABTI Hamza

Expertisé par :

Dr. ELKHIRI Laid -Université Ibn Khaldoun Tiaret.

Dr. KRIM Ismaiel -Université Ibn Khaldoun Tiaret.

Année Universitaire : 2025/2026.

Table des matières

Introduction

Ce polycopié est destiné aux étudiants de deuxième année Licence L2 (semestre 4), parcours Sciences et Technologie. Il constitue une suite naturelle au polycopié de Mathématiques 3, et aborde des notions plus avancées de l'analyse complexe, ainsi que certaines fonctions spéciales essentielles en physique et en ingénierie.
L'objectif de ce cours est de doter l'étudiant d'outils analytiques puissants pour le calcul différentiel et intégral dans le cadre des fonctions d'une variable complexe. À l'issue de ce module, l'étudiant devra être capable de manipuler des fonctions holomorphes, de comprendre les séries entières, d'appliquer les grands théorèmes de la théorie de Cauchy, et de résoudre des intégrales complexes à l'aide de la méthode des résidus. Une introduction aux fonctions harmoniques et à leur relation avec les fonctions analytiques est également proposée.
Ce document met l'accent sur les résultats essentiels, les méthodes de résolution pratiques, et propose un ensemble d'exemples corrigés suivis d'exercices à résoudre, permettant à l'étudiant de tester sa compréhension. Les démonstrations théoriques sont limitées à l'essentiel afin de favoriser l'apprentissage appliqué.

Structure du polycopié

Ce polycopié s'ouvre sur un bref rappel des propriétés fondamentales des nombres complexes, leur représentation algébrique et géométrique, ainsi que les principales opérations. Cette révision est essentielle pour aborder sereinement les notions avancées qui suivent.

1. Le premier chapitre introduit les fonctions dérivables au sens complexe, appelées fonctions holomorphes, en mettant l'accent sur les conditions de Cauchy-Riemann, nécessaires et suffisantes à la dérivabilité complexe. Ces équations constituent le socle théorique sur lequel s'appuient les chapitres suivants.

2. Ce chapitre approfondit les notions de développement en séries entières, avec une étude rigoureuse du rayon et du domaine de convergence.

L'objectif est de montrer comment certaines fonctions peuvent être représentées localement par une série de puissances, ce qui ouvre la voie à de nombreuses applications analytiques.

3. Ce chapitre expose les théorèmes fondamentaux de l'intégration complexe, notamment le théorème de Cauchy et ses formules intégrales. Ces résultats jouent un rôle clé dans la caractérisation des fonctions holomorphes et dans le calcul d'intégrales complexes.

4. Ce chapitre s'appuie sur les résultats précédents pour présenter plusieurs conséquences majeures de l'holomorphie. On y retrouve le théorème du maximum, le théorème de Liouville, le théorème de Rouché, ainsi que le théorème des résidus, un outil essentiel dans le calcul d'intégrales complexes par la méthode des résidus.

5. Le dernier chapitre se penche sur les fonctions harmoniques, solutions de l'équation de Laplace, très présentes en physique et en ingénierie. On y étudie leur lien profond avec les fonctions holomorphes, via le Laplacien et les équations de Cauchy-Riemann.

Nous espérons que ce document sera un support efficace pour la maîtrise des concepts fondamentaux et des techniques analytiques abordés dans le module Mathématiques 4.

Chapitre 1

Fonctions holomorphes et les conditions de Cauchy-Riemann

1.1 Les nombres complexes

Dans le cadre des nombres réels, certaines équations n'admettent pas de solutions, par exemple

$$x^2 + 1 = 0, \quad x^2 + 3 = 0, \quad x^2 + 2x + 5 = 0.$$

Cependant, en élargissant ce corps en y introduisant le nombre $\sqrt{-1}$, il devient possible de résoudre de telles équations.
On obtient ainsi un nouvel ensemble, appelé **corps des nombres complexes**, dont les éléments peuvent être représentés sous la forme

$$x + iy, \quad \text{où} \quad i = \sqrt{-1}$$

et $x, y \in \mathbb{R}$. Au fil du temps, la nature des nombres complexes a été progressivement clarifiée grâce aux travaux de grands mathématiciens tels que Cardan, Wessel, Argand, Gauss ou encore Hamilton. Par la suite, la théorie des fonctions de variable complexe a été développée par des figures majeures comme Cauchy, Gauss, Riemann, Weierstrass, Dirichlet, Poincaré, entre autres.
Dans ce cours, nous utiliserons principalement la représentation des nombres complexes sous la forme $x + iy$, qui s'avère la plus adaptée à l'étude des fonctions. D'autres formes de représentation seront également introduites ultérieurement.

Définition 1.1.1. *On appelle nombre complexe toute expression de la forme :*

$$z = x + iy; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

dite la forme algébrique de z et i définit par la relation : $i^2 = -1$.
x : La partie réelle de z notée $Re(z)$.
y : La partie imaginaire de z notée $Im(z)$.
On écrit donc :

$$z = Re(z) + iIm(z).$$

Propriétés

Soit $z = x + iy$ et $w = a + ib$; $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

1) L'addition de deux nombres complexes sera définie

$$z + w = x + iy + a + ib = (x + a) + i(y + b).$$

L'addition est donc une opération fermée sur les complexes. Cette addition est commutative, c'est-à-dire si z et w sont deux nombres complexes. alors

$$z + w = w + z.$$

2) La soustraction est définie par

$$z - w = x + iy - a + ib = (x - a) + i(y - b).$$

3) La multiplication s'obtient en multipliant les deux nombres complexes comme s'ils étaient des binômes algébriques en i et en se rappelant que

$$i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1.$$

On définit

$$z \cdot w = (x + iy) \cdot (a + ib) = (xa - yb) + i(xb + ay).$$

multiplication est aussi commutative

$$z \cdot w = w \cdot z.$$

4) On pourra donc définir **la division** de deux nombres complexes ainsi

$$\frac{z}{w} = \frac{x + iy}{a + ib} = \frac{(x + iy)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{(x + iy)(a - ib)}{a^2 + b^2}; \quad w \neq 0.$$

Définition 1.1.2. (**Conjugué**) *On appelle conjugué de z le nombre :*

$$\overline{z} = x - iy; \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.1.3. (**Module**) *Soit $z = x + iy$; $\quad x, y \in \mathbb{R}$, donc :*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La forme trigonométrique

Définition 1.1.4. *Soit $z = x + iy$; $\quad x, y \in \mathbb{R}$.*
On appelle argument de z l'angle entre l'axe réel et le segment $[0, z]$ et on note : $\theta = arg(z)$; $\quad -\pi < \theta \leq \pi$. Nous voyons d'après figure 1.1 que :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Donc $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Cette écriture est appelée la forme trigonométrique de z.

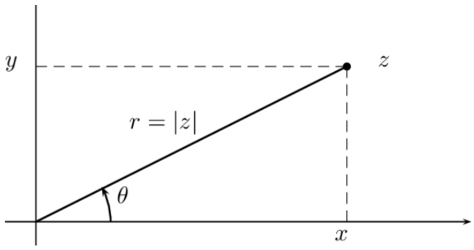


FIGURE 1.1 – Le plan complexe $\mathbb{C}$

Remarque 1.1.1. *L'argument d'un nombre complexe z n'est pas unique puisque $arg(z) = \theta + 2k\pi$; $-\pi < \theta \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ est aussi argument de z. θ est appelé l'argument principal de z.*

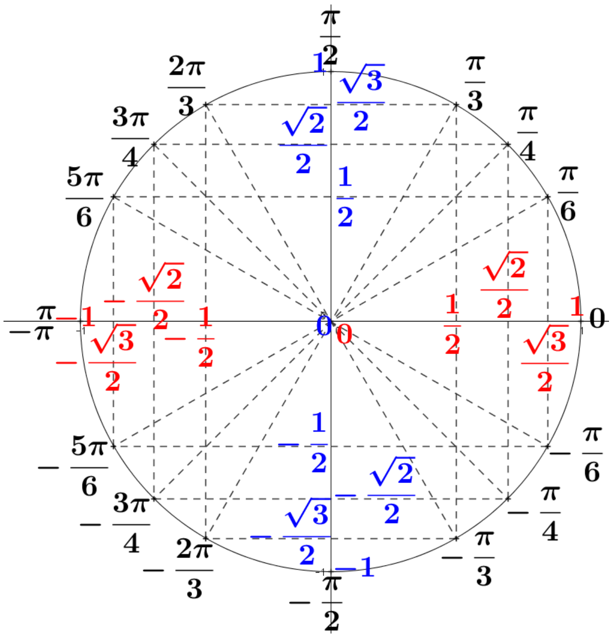


FIGURE 1.2 – Le cerle trigonométrique sur $]-\pi, \pi]$.

Définition 1.1.5. **(La formule d'Euler)** *Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe définit par :*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta; \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

La forme exponentielle

Définition 1.1.6. *Tout nombre complexe z s'écrit de la forme :*

$$z = re^{i\theta}; \quad r = |z| \ \text{ et } \ \theta = arg(z).$$

Exemple 1.1.1. *Écrire sous forme algébrique, trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants :*
1) $z_1 = 3$, ***2)*** $z_2 = 1+i$, ***3)*** $z_3 = -i$, ***4)*** $z_4 = -1+i\sqrt{3}$.

Solution. *On a :*

1) $z_1 = 3$ *:*

- z_1 *est écrit sous forme algébrique* $\begin{cases} Re(z_1) = 3 \\ Im(z_1) = 0. \end{cases}$

Le module $|z_1| = 3$ *et l'argument* θ *vérifie :* $\begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0. \end{cases}$

$\Longrightarrow \theta = 0 + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}.$

Donc la forme trigonométrique et la forme exponentielle de z_1 *sont respectivement :*

$$z_1 = 3\big(\cos 0 + i \sin 0\big) = 3e^{i0}.$$

2) $z_2 = 1 + i$ *:*

- z_2 *est écrit sous forme algébrique* $\begin{cases} Re(z_2) = 1 \\ Im(z_2) = 1. \end{cases}$

Le module $|z_2| = \sqrt{2}$ *et l'argument* θ *vérifie :* $\begin{cases} \cos\theta = \sqrt{2}/2 \\ \sin\theta = \sqrt{2}/2. \end{cases}$

$\Longrightarrow \theta = \pi/4 + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}.$

Donc la forme trigonométrique et la forme exponentielle de z_2 *sont respectivement :*

$$z_2 = \sqrt{2}\Big[\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)\Big] = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

3) $z_3 = -i$ *:*

- z_3 *est écrit sous forme algébrique* $\begin{cases} Re(z_3) = 0 \\ Im(z_3) = -1. \end{cases}$

Le module $|z_3| = 1$ *et l'argument* θ *vérifie :* $\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = -1. \end{cases}$

$\Longrightarrow \theta = -\pi/2 + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}.$

Donc la forme trigonométrique et la forme exponentielle de z_3 *sont respectivement :*

$$z_3 = 1\Big[\cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2)\Big] = 1e^{-i\pi/2}.$$

4) $z_4 = -1 + i\sqrt{3}$ *:*

- z_4 *est écrit sous forme algébrique* $\begin{cases} Re(z_4) = -1 \\ Im(z_4) = \sqrt{3}. \end{cases}$

Le module $|z_4| = 2$ *et l'argument* θ *vérifie :* $\begin{cases} \cos\theta = -1/2 \\ \sin\theta = \sqrt{3}/2. \end{cases}$

$\Longrightarrow \theta = 2\pi/3 + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}.$

Donc :

$$z_4 = 2\Big[\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3)\Big] = 2e^{2i\pi/3}.$$

1.2 Les fonctions élémentaires

1.2.1 La fonction exponentielle e^z

On définit l'exponentielle d'un nombre complexe z ; $z = x + iy$; $\quad x, y \in \mathbb{R}$
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$
$\quad z \mapsto f(z)$ avec $f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$; $\quad x, y \in \mathbb{R}$.

Propriétés

1) $Re(e^z) = e^x \cos y$ et $Im(e^z) = e^x \sin y$.

2) $\left|e^z\right| = e^x$ et $arg(e^z) = y + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

3) $e^z \neq 0$; $\forall z \in \mathbb{C}$.

1.2.2 Les fonctions trigonométriques

A partir de l'exponentielle e^z, on définit les fonctions cosinus, sinus et tangente :

$$\begin{cases} \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \end{cases}$$

$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$; $z \neq \pi/2 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore valable dans le cas complexe.

1) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$; $\forall z \in \mathbb{C}$.

2) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$.

3) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$.

4) $\cos(-z) = \cos z$ et $\sin(-z) = -\sin z$.

5) $\cos z = 0$ si $z = \pi/2 + k\pi$ et $\sin z = 0$ si $z = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 1.2.1. *Pour $x \in \mathbb{R}$ les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont bornées : $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$. Par contre pour $z \in \mathbb{C}$ on peut avoir $\left|\cos z\right| > 1$ et $\left|\sin z\right| > 1$.*

1.2.3 Les fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont définies aussi à partir de e^z :

$$\begin{cases} \cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}. \end{cases}$$

Ona aussi $\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$; $z \neq (\pi/2 + k\pi)i$; $k \in \mathbb{Z}$.

Les propriétés suivantes sont encore vérifiées :

1) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$; $\forall z \in \mathbb{C}$.

2) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$.

3) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$.

4) $\cosh(-z) = \cosh z$ et $\sinh(-z) = -\sinh z$.

5) $\cosh z = 0$ si $z = (\pi/2 + k\pi)i$ et $\sinh z = 0$ si $z = k\pi i$; $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 1.2.2. *On a les relations suivantes :*
1) $\cos(iz) = \cosh z$ ***2)*** $\sin(iz) = i \sinh z$

3) $\cosh(iz) = \cos z$ ***4)*** $\sinh(iz) = i \sin z$.

Propriétés

1) $\cos z = \cos x \cosh y + i(-\sin x \sinh y)$.

2) $\sin z = \sin x \cosh y + i(\cos x \sinh y)$.

3) $\cosh z = \cosh x \cos y + i(\sinh x \sin y)$.

4) $\sinh z = \sinh x \cos y + i(\cosh x \sin y)$.

1.2.4 Le logarithme complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Le logarithme complexe d'un nombre complexe z est donné par :

$$\log z = \ln |z| + i(\theta + 2k\pi); \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ici $-\pi < \theta \leq \pi$.

Exemple 1.2.1. *Calculer les nombres complexes suivants :*
1) $\log 2$, ***2)*** $\log(1+i)$,
3) $\log(1+i\sqrt{3})$, ***4)*** $\log(-1)$.

Solution. *On a*

1) $\log 2$ *:*
$\log(2) = \ln |2| + i[0 + 2k\pi] = \ln 2 + i(2k\pi)$ *;* $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\log(1+i)$ *:*
$\log(1+i) = \ln |1+i| + i[\frac{\pi}{4} + 2k\pi] = \ln \sqrt{2} + i\big(\pi/4 + 2k\pi\big)$ *;* $k \in \mathbb{Z}$.

3) $\log(1+i\sqrt{3})$ *:*
$\log(1+i\sqrt{3}) = \ln|1+i\sqrt{3}| + i[\frac{\pi}{3}+2k\pi] = \ln 2 + i\big(\pi/3+2k\pi\big)$ *;* $k \in \mathbb{Z}$.
4) $\log(-1)$ *:*
$\log(-1) = \ln|-1| + i[\pi+2k\pi] = i\pi(2k+1)$ *;* $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 1.2.2. *Résoudre les équations suivantes :*
1) $2i\sin z + 3e^{-iz} = i$,
2) $2\cosh z + 3e^{-z} = 2$.

Solution. *Résolutions d'équations :*

1) $2i\sin z + 3e^{-iz} = i$ *:*

$$2i\sin z + 3e^{-iz} = i \Longrightarrow 2i\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) + 3e^{-iz} = i \Longrightarrow e^{iz} + 2e^{-iz} = i$$
$$\stackrel{\times e^{iz}}{\Longrightarrow} e^{2iz} - ie^{iz} + 2 = 0.$$

Posons $e^{iz} = M$ *; donc :* $M^2 - iM + 2 = 0 \Longrightarrow \Delta = -1-8 = -9 = (3i)^2$.

$$\begin{cases} M_1 = 2i \Longrightarrow e^{iz} = 2i \Longrightarrow iz = \log(2i) = \ln 2 + i(\pi/2+2k\pi), \\ M_2 = -i \Longrightarrow e^{iz} = -i \Longrightarrow iz = \log(-i) = \ln 1 + i(-\pi/2+2k\pi). \end{cases}$$

Donc :

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln 2 \;\; et \;\; z_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2) $2\cosh z + 3e^{-z} = 2$ *:*

$$2\cosh z + 3e^{-z} = 2 \Longrightarrow 2\left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\right) + 3e^{-z} = 2 \Longrightarrow e^{z} + 4e^{-z} = 2$$
$$\stackrel{\times e^{z}}{\Longrightarrow} e^{2z} - 2e^{z} + 4 = 0.$$

Posons $e^{z} = M$ *; donc :* $M^2 - 2M + 4 = 0 \Longrightarrow \Delta = 4-16 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$.

$$\begin{cases} M_1 = 1+\sqrt{3}i \Longrightarrow e^{z} = 1+\sqrt{3}i \Longrightarrow z = \log(1+\sqrt{3}i) = \ln 2 + i(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi), \\ M_2 = 1-\sqrt{3}i \Longrightarrow e^{z} = 1-\sqrt{3}i \Longrightarrow z = \log(1-\sqrt{3}i) = \ln 2 + i(-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi). \end{cases}$$

1.3 Les fonctions holomorphes

1.3.1 Limite d'une fonction

On dit que $f(z)$ a pour limite w quand z tend vers z_0 si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta > 0$ tel que $|f(z) - w| < \varepsilon$ pour $o < |z - z_0| < \eta$. On écrit

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w.$$

Exemple 1.3.1. *Calculer les limites suivantes si elle existent.*

1) $\lim\limits_{z\to -1} \dfrac{z^2-1}{z+1}$.

2) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{Re(z)}{z}$.

Solution. *1) On a*

$$\lim_{z\to -1} \frac{z^2-1}{z+1} = \lim_{z\to -1}(z-1) = -2.$$

2) Cette limite n'existe pas. Pour la preuve, on va supposer que la limite existe selon l'axe des x, on obtient alors

$$\lim_{z\to 0} \frac{Re(z)}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+i0} = 1.$$

Supposons maintenant que la limite existe selon l'axe des y, on aurait

$$\lim_{z\to 0} \frac{Re(z)}{z} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0+iy} = 0.$$

Puisque la limite n'est pas unique donc elle n'existe pas.

Corollaire 1.3.1. *On évidement*

$$\lim_{z\to z_0} z = z_0 \quad \textit{existe} \quad \lim_{z\to z_0} c^{te} = c^{te}.$$

Propriétés

Soit $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_1$ et $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = w_2$. Alors

1) $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z) + g(z)] = w_1 + w_2$

2) $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z) - g(z)] = w_1 - w_2$.

3) $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = w_1 \cdot w_2$.

4) $\lim\limits_{z\to z_0} c^{te} \cdot f(z) = c^{te} \cdot w_1$.

1.3.2 Continuité

On dit que f est continue au point z_0 dans un domaine D si est seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ pour tout $z \in D$ satisfont $o < |z - z_0| < \eta$. On écrit

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \text{existe} = f(z_0).$$

Remarque 1.3.1. *On dit que $f : D \to \mathbb{C}$ est continue sur D si elle est continue en tout point de ce domaine.*

Théorème 1.3.1. *Soit f et g deux fonctions continues. Alors*

1) *$f + g$ fonction continue.*

2) *$f + g$ fonction continue.*

3) *$f - g$ fonction continue.*

4) *$f \cdot g$ fonction continue.*

5) *$\dfrac{f}{g}$ fonction continue avec $g \neq 0$.*

Dans le cas général toute fonction polynôme est continue et toute fonction rationelle est continue si le dénominateur$\neq 0$.

1.3.3 Dérivabilité

Définition 1.3.1. *Soit $f : D \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe (dérivable au sens complexe) au point z_0 si :*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = \text{existe}.$$

Ici D un domaine simplement connexe.

On va donner quelques exemples des fonctions usuelles.

Exemple 1.3.2. *$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $f(z) = z$.*

Solution. *On a*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} 1 = f'(z_0) = 1.$$

Exemple 1.3.3. *$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $f(z) = z^2$.*

Solution. *On a*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = f'(z_0) = 2z_0.$$

Définition 1.3.2. *Soit $f : D \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe sur D si elle est holomorphe en tout point de D.*

Théorème 1.3.2. *Si f est holomorphe en z_0 alors f est continue en z_0.*

Démonstration. Notons que

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}[f(z)-f(z_0)] &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\\ &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\\ &= 0\cdot f'(z_0)=0.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

□

Remarque 1.3.2. *La réciproque n'est pas vraie. Par exemple* $f(z)=|z|^2$ *est continue par tout mais n'a pas de dérivée sauf au point* 0.

1.4 Les conditions de Cauchy-Riemann

Théorème 1.4.1. (**Les conditions de Cauchy-Riemann**) *:*
Soit $f : D \to \mathbb{C}$
$$z \mapsto f(z) = P(x,y) + iQ(x,y); \quad x, y \in \mathbb{R}$$
avec $P = Re(f)$ *et* $Q = Im(f)$.

$$f \text{ est holomorphe sur } D \Longleftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}.\end{cases}$$

Alors : $f'(z) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + i\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Ici $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ *sont continues sur* D.

Remarque 1.4.1. *Aucune fonction à valeurs réelles est holomorphe sauf si elle est constante.*

Exemple 1.4.1. *Vérifier que les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites par les fonctions suivantes :*

1) $f(z) = z^2$. ***2)*** $f(z) = e^z$.
3) $f(z) = \overline{z}$. ***4)*** $f(z) = |z|^2$.

Solution. *On a*
1) $f(z) = z^2$ *:*
$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, *on peut conclure que :* $Re(f) = P(x,y) = x^2 - y^2$ *et* $Im(f) = Q(x,y) = 2xy; \quad x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 2x \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2x \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \ \ et \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2y \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2y \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(P,Q) vérifie les conditions de Cauchy-Riemann $\Longrightarrow$ f est holomorphe $\forall z \in \mathbb{C}$.

2) *$f(z) = e^z$:*
$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$, on peut conclure que : $Re(f) = P(x,y) = e^x \cos y$ et $Im(f) = Q(x,y) = e^x \sin y; \quad x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = e^x \cos y \\ \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = e^x \cos y \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^x \sin y \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(P,Q) vérifie les conditions de Cauchy-Riemann $\Longrightarrow$ f est holomorphe $\forall z \in \mathbb{C}$.

3) *$f(z) = \overline{z}$:*
$f(z) = x - iy \Longrightarrow Re(g) = P(x,y) = x$ et $Im(g) = Q(x,y) = -y$.

$$Alors : \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 1 \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} \neq \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

$\Longrightarrow$ f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

4) *$f(z) = |z|^2$:*
$f(z) = x^2 + y^2 \Longrightarrow Re(g) = P(x,y) = x^2 + y^2$ et $Im(g) = Q(x,y) = 0$.

$$Alors : \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 2x \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} \neq \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

$\Longrightarrow$ f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

1.4.1 Les conditions de Cauchy-Riemann exprimées en coordonnés polaires

Théorème 1.4.2. *Soit* $f : D - \{0\} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto f(z) = P(r,\theta) + iQ(r,\theta); \quad r,\theta \in \mathbb{R}$$

avec $P = Re(f)$ *et* $Q = Im(f)$.

$$f \text{ est holomorphe sur } D - \{0\} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial Q}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta}. \end{cases}$$

Ici $\dfrac{\partial P}{\partial r}$, $\dfrac{\partial P}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial r}$ *et* $\dfrac{\partial Q}{\partial \theta}$ *sont continues sur* $D - \{0\}$.

Théorème 1.4.3. *En coordonnés polaires, si* f *est holomorphe alors*

$$f'(z) = (\cos\theta - i\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial r}.$$

1.4.2 Les dérivées $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$

À partir de

$$z = x + iy, \qquad \bar{z} = x - iy,$$

on déduit que

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \qquad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Admettons que $f(x,y)$ possède des dérivées partielles continues f_x et f_y. En appliquant formellement les règles de différentiation partielle, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}.$$

On a :

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2i}.$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{1.1}$$

De la même manière :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}},$$

mais

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2i}.$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{1.2}$$

Nous définissons ainsi les deux **opérateurs différentiels** :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{1.4}$$

Ces deux opérateurs se révèlent très utiles en analyse complexe et permettent de reformuler les conditions de Cauchy-Riemann ainsi que les critères d'holomorphie.
À partir des relations (1.1) et (1.2), on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right).$$

Nous définissons donc deux autres opérateurs utiles :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right). \tag{1.6}$$

Application : Montrons que l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

est équivalente aux conditions de **Cauchy–Riemann**.

En effet, en utilisant (1.2) :

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Or si $f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$, on obtient :

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} + i\frac{\partial P}{\partial y} + i^2\frac{\partial Q}{\partial y}\right),$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Donc, les parties réelle et imaginaire doivent s'annuler séparément, ce qui donne :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ce sont précisément les conditions de **Cauchy–Riemann**.

Exemple 1.4.2. *La fonction suivante f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}^*$?*

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{z} + zRe(z).$$

Solution. *Écrivons f en fonction de z et $\bar{z}$:*

$$\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad \Longrightarrow \quad z\,\Re(z) = \frac{z(z+\bar{z})}{2} = \frac{z^2+z\bar{z}}{2}.$$

Ainsi

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{z^2+z\bar{z}}{2}.$$

Sur $\mathbb{C}^*$, le terme $1/z$ est holomorphe et vérifie $\partial(1/z)/\partial\bar{z} = 0$. En revanche,

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{z^2+z\bar{z}}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(z^2) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(z\bar{z}) = 0 + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}.$$

Donc, pour tout $z \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z) = \frac{z}{2} \neq 0,$$

ce qui montre que f n'est pas *holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.*

Formules de dérivation

Soit f et g deux fonctions holomorphes. Donc

1) $\dfrac{d}{dz}c^{te} = 0.$

2) $\dfrac{d}{dz}(f+g) = \dfrac{df}{dz} + \dfrac{dg}{dz}.$

3) $\dfrac{d}{dz}(f\cdot g) = \dfrac{df}{dz}\cdot g + \dfrac{dg}{dz}\cdot f.$

4) $\dfrac{d}{dz}(f/g) = \Big(\dfrac{df}{dz}\cdot g - \dfrac{dg}{dz}\cdot f\Big)/g^2\,;\ g \neq 0.$

5) $\dfrac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}\,; \quad n \in \mathbb{N}.$

1.5 Exercices supplémentaires

Exercice 1.1. ***(i)*** *Trouver les parties réelles et imaginaires, modules et arguments des nombres complexes suivants :*

1) $z_1 = -2$ ***2)*** $z_2 = 3\Big(\dfrac{1+i}{1-i}\Big)^5$

3) $z_3 = \dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$; $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ***4)*** $z_4 = -2\, e^{\frac{\pi}{4}i}$.

(ii) *Déduire les formes algébriques, trigonométriques et exponentielles pour les nombres complexes précédents.*

Exercice 1.2. *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *Exprimer* $\mathfrak{Re}(iz)$, $\mathfrak{Im}(iz)$, $\mathfrak{Re}(i\overline{z})$, $\mathfrak{Re}(z^2)$, $\mathfrak{Im}(z^3)$ *en fonction de* $\mathfrak{Re}(z)$ *et* $\mathfrak{Im}(z)$.

Exercice 1.3. ***1)*** *Trouver les parties réelles et imaginaires des fonctions suivantes :*

a) $f(z) = e^{-z}$, ***b)*** $g(z) = \cos z$, ***c)*** $h(z) = \sin z$, ***d)*** $k(z) = \cosh z$.

2) *Déterminer le module des fonctions complexes précédentes.*

3) *Trouver toutes les valeurs "z" telles que :*

a) e^{-z} *soit imaginaire pure,* ***b)*** $\cos z$ *soit réelle,*

c) $\sin z$ *soit imaginaire pure,* ***d)*** $\cosh z$ *soit réelle.*

Exercice 1.4. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes :*

1) $e^{-z} = 1 + i\sqrt{3}$ ***2)*** $2i\sin z - e^{-iz} = 1$

3) $2\cos z + e^{-iz} = 2$ ***4)*** $2\cosh z + e^{-z} = 2$

5) $2\sinh z + 3e^{-z} = -i$ ***6)*** $\sin z = i\sinh z$.

Exercice 1.5. *Calculer les limites suivantes si elle existent.*

1) $\displaystyle\lim_{z\to -1} \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z+1}$.

2) $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{z^6 + 1}{z^2 + 1}$.

Exercice 1.6. *Montrer que les limites suivantes n'existent pas.*

1) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|}$. ***2)*** $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$.

Exercice 1.7. *Étudier la continuité des fonctions suivantes.*

1) $f(z) = \overline{z}$.

2) $g(z) = \mathfrak{Re}(z)$.

3) $h(z) = \mathfrak{Im}(z)$.

4) $k(z) = |z-1|$.

Exercice 1.8. *Parmi les fonctions suivantes, le quelles sont holomorphes ? Si c'est le cas, écrire leur expression en fonction de z.*

1) $f(z) = e^x \cos y + 4x^2 - 4y^2 - 5y + 9 + i(e^x \sin y + 8xy + 5x - 1)$,
2) $g(z) = (\overline{z})^2 + i\big[Re(z)Im(z) + 1\big]$,

3) $h(z) = \ln|z| + i \arctan \dfrac{z - \overline{z}}{i(z+\overline{z})}$,
4) $k(z) = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2 + \overline{z}}$.

Exercice 1.9. ***I)*** *Vérifier que les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites par les fonctions suivantes :*

1) $f(z) = \cos z$, ***2)*** $g(z) = \sinh z$,

3) $h(z) = \exp(z^2)$, ***4)*** $k(z) = \dfrac{1}{z}$.

II) *Calculer $f'(z)$, $g'(z)$, $h'(z)$ et $k'(z)$ par deux méthodes différentes.*

Chapitre 2

Séries entières. Rayon de convergence. Domaine de convergence. Développement en séries entières. Fonctions Analytiques

2.1 Les séries entières

Définition 2.1.1. *On appelle série entière de la variable complexe z, toute série de la forme :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

$a_0, \ldots ,a_n$: appelés coefficients de la série ; $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$.

Généralités

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. On pose :

1) $D\big(0, R\big) = \Big\{z \in \mathbb{C}/ \quad |z| < R\Big\}$.

2) $\overline{D\big(0, R\big)} = \Big\{z \in \mathbb{C}/ \quad |z| \leq R\Big\}$.

3) $C\big(0, R\big) = \Big\{z \in \mathbb{C}/ \quad |z| = R\Big\}$.

4) $D\big(z_0, R\big) = \Big\{z \in \mathbb{C}/ \quad |z - z_0| < R\Big\}$ avec $z_0 \in \mathbb{C}$.

2.1.1 Le rayon de convergence R

Théorème 2.1.1. *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *la série entière. Il existe un seul nombre réel positif fini ou infini* R *qui vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} \text{Si } |z| < R, & \text{la série converge} \\ \text{Si } |z| > R, & \text{la série diverge} \\ \text{Si } |z| = R, & \text{sur le cercle, on ne peut rien conclure.} \end{cases}$$

Définition 2.1.2. (**Détermination de rayon de convergence**) *:*

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière.*

$$\text{Si} \begin{cases} \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \\ \text{ou bien} \\ \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \end{cases} \Longrightarrow R = \frac{1}{l}.$$

Exemple 2.1.1. *Pour les séries entières suivantes, déterminer le rayon de convergence* R *:*

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{5^n}$, ***2)*** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$, ***3)*** $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)! \cdot z^n$,

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+3} \cdot z^n$, ***5)*** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^4} \cdot z^n$, ***6)*** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \cdot z^n$.

Solution. *Le but est de calculer le rayon de covergence* R *:*

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{5^n}$:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{5^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} \Longrightarrow R = 5.$$

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+2)!}{(n+3)(n+2)!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+3} = 0 \Longrightarrow R = +\infty.$$

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)! \cdot z^n$:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)!(n+2)}{(n+1)!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (n+2) = +\infty \Longrightarrow R = 0.$$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+3} \cdot z^n$:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n+3}{n+4} = 1 \Longrightarrow R = 1.$$

5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^4} \cdot z^n$:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \times \left(\frac{n}{n+1} \right)^4 = 1 \Longrightarrow R = 1.$$

6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \cdot z^n$:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \times \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1 \Longrightarrow R = 1.$$

2.1.2 Le domaine de convergence D

Théorème 2.1.2. *Soit R le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, alors :*

1) *Si $R = 0 \Rightarrow D = \{0\}$,*

2) *Si $R = +\infty \Rightarrow D = \mathbb{C}$.*

Remarque 2.1.1. *Si le rayon de convergence R de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est compris strictement entre 0 et $+\infty$, alors :*

$$\begin{cases} \text{Si } |z| < R, & \text{la série converge} \\ \text{Si } |z| > R, & \text{la série diverge} \\ \text{Si } |z| = R, & \text{sur le cercle, on ne peut rien conclure.} \end{cases}$$

Donc le domaine de convergence est le $D\big(0, R\big)$ à vérifier la nature du série si $z \in C\big(0, R\big)$.

Exemple 2.1.2. *Pour les séries entières suivantes, déterminer le rayon de convergence R et le domaine de convergence D :*

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, *2)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1}}{n!} z^n$,

Solution. *Le but est de calculer le rayon de convergence R et après on conclut le le domaine de convergence D.*

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{1} = 1 \Longrightarrow R = 1.$$

1-b) *Le domaine de convergence D :*

Remarque : Pour une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$; *de rayon convergence* $0 < R < +\infty$, *on a :*

$$\begin{cases} Si\ \ |z| < 1, & \textit{la série converge} \\ Si\ \ |z| > 1, & \textit{la série diverge} \\ Si\ \ |z| = 1, & \textit{On ne peut rien dire.} \end{cases}$$

Si $|z| = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} |z^n| = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum z^n$ *diverge si* $|z| = 1$.

Donc le domaine de convergence est :

$$D\big(0,1\big) = \Big\{z \in \mathbb{C}/ \quad |z| < 1\Big\}.$$

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1}}{n!} z^n$:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n+1} = 0 \Longrightarrow R = +\infty.$$

Donc le domaine de convergence est $\mathbb{C}$.

2.1.3 Propriétés des séries entières

Théorème 2.1.3. *La somme d'une série entière* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *de rayon de convergence* $R > 0$ *est une fonction continue et holomorphe à l'intérieur de disque de convergence* $D\big(0,R\big)$.

Exemple 2.1.3. *Calculer la somme de cette série entière :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Solution. *On va calculer la somme sur le domaine de convergence :*
C'est une série géométrique de raison $q = z$ *qui converge* $\forall z \in D\big(0,1\big)$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}; \quad \forall |z| < 1.$$

2.2 Développement en séries entières

Définition 2.2.1. (**Développement en séries entières**)
Soit $f : D \to \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière s'il existe $R > 0$ tel que :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n; \quad \forall x \in D\big(0, R\big).$$

Proposition 2.2.1. *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et soit : $f : D \to \mathbb{C}$ la fonction à variable complexe z définie par : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Alors :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n; \quad \forall z \in D\big(0, R\big).$$

Exemple 2.2.1. *Développer les fonctions suivantes en séries entières :*
1) $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$, ***2)*** $f(z) = \dfrac{1}{2-3z}$, ***3)*** $f(z) = e^z$,
4) $f(z) = e^{-z}$, ***5)*** $f(z) = \sin z$, ***6)*** $f(z) = \cos z$.

Solution. *On va développer les fonctions suivantes en séries entières :*
1) $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$:

Soit $\omega \in D\big(0, 1\big)$. On sait que : $\dfrac{1}{1-\omega} = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n$, *si* $|\omega| < 1$.

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} \overset{\omega=-z}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n \qquad si\ |-z| < 1$$

$$\Longrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot z^n \qquad si\ |z| < 1.$$

2) $f(z) = \dfrac{1}{2-3z}$:

$$\frac{1}{2-3z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\dfrac{3z}{2}}\right) \overset{\omega=\frac{3z}{2}}{=} \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3z}{2}\right)^n \qquad si\ \left|\frac{3z}{2}\right| < 1$$

$$\Longrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n \cdot z^n}{2^{n+1}} \qquad si\ |z| < \frac{2}{3}.$$

3) $f(z) = e^z$:
On peut appliquer ici la **Proposition** *2.2.1. On obtient le suivant :*
Puisque : $f^{(n)}(z) = e^z \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. *Donc :*

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

4) $f(z) = e^{-z}$:
Avec la même proposition, on sait que :
$f^{(n)}(z) = (-1)^n e^{-z} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. *Donc :*

$$e^{-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot z^n; \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

5 et 6) $\sin z$ *et* $\cos z$:
On va utiliser ici la formule d'Euler :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x; \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} x^n \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{i^{2p}}{(2p)!} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{i^{2p+1}}{(2p+1)!} x^{2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} + i \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= Re(e^{ix}) + iIm(e^{ix}). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} \cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ \sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{cases}$$

Ceci implique que :

$$\begin{cases} \cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \\ \sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}. \end{cases}$$

2.3 Fonctions analytiques

Définition 2.3.1. *Soit* $f : D \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto f(z).$$

f est dite analytique sur $D \iff f$ est développable en série entière.

Exemple 2.3.1. *Montrer que les fonctions suivantes sont analytiques sur leurs domaines :*

1) $f(z) = \dfrac{1}{1+2z}$, ***2)*** $g(z) = \dfrac{1}{5-7z}$, ***3)*** $h(z) = e^{iz}$,
4) $j(z) = e^{-2z}$, ***5)*** $k(z) = \cosh z$, ***6)*** $L(z) = \sinh z$.

Solution. *On va développer les fonctions suivantes en séries entières :*

1) $f(z) = \dfrac{1}{1+2z}$:

Dans ce cas, on peut développer f en série entière à l'aide de la série géométrique. Rappelons d'abord que, pour tout $\omega \in D(0,1)$, on a

$$\frac{1}{1-\omega} = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n, \qquad \text{valable si } |\omega| < 1.$$

$$\frac{1}{1+2z} = \frac{1}{1-(-2z)} \overset{\omega=-2z}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} (-2z)^n \qquad \text{si } |-2z| < 1$$

$$\Longrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n \cdot z^n \qquad \text{si } |z| < 1/2.$$

Donc : $f : D\big(0, 1/2\big) \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto f(z) = \frac{1}{1+2z} \text{ est une fonction analytique.}$$

2) $g(z) = \dfrac{1}{5-7z}$:

$$\frac{1}{5-7z} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\dfrac{7z}{5}}\right) \overset{\omega=\frac{7z}{5}}{=} \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{7z}{5}\right)^n \qquad \text{si } \left|\frac{7z}{5}\right| < 1$$

$$\Longrightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7^n \cdot z^n}{5^{n+1}} \qquad \text{si } |z| < \frac{5}{7}.$$

Donc : $g : D\big(0, 5/7\big) \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto g(z) = \frac{1}{5-7z} \text{ est une fonction analytique.}$$

3) $h(z) = e^{iz}$:
On peut appliquer ici la **Proposition** *2.2.1. On obtient le suivant :*

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} \cdot z^n; \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Donc : $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$
$z \mapsto h(z) = e^{iz}$ *est une fonction analytique.*

4) $j(z) = e^{-2z}$:
On peut appliquer ici la **Proposition** *2.2.1. On obtient le suivant :*

$$e^{-2z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(-1)^n}{n!} \cdot z^n; \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Donc : $j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$
$z \mapsto j(z) = e^{-2z}$ *est une fonction analytique.*

5) $k(z) = \cosh z$:
On va utiliser ici l'identité suivante :

$$\cosh z = \cos(iz); \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Alors :

$$\cosh z = \cos(iz) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot i^{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Donc : $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \mapsto k(z) = \cosh z$ *est une fonction analytique.*

6) $L(z) = \sinh z$:
On va utiliser ici l'identité suivante :

$$\sinh z = \frac{1}{i} \sin(iz); \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Alors :

$$\sinh z = i \sin(iz) = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot i^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Donc : $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \mapsto L(z) = \sinh z$ *est une fonction analytique.*

2.4 Exercices supplémentaires

Exercice 2.1. *Pour les séries entières suivantes, déterminer le rayon de convergence R :*

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}}$, ***2)*** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(3n)!}$, ***3)*** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n) \cdot z^n$,

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^6} \cdot z^n$, ***5)*** $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln n}}{n^3} \cdot z^n$, ***6)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n}{\sqrt{n}} \cdot z^n$,

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arcsin(1/n)}{2^n} \cdot z^n$, ***8)*** $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n} \cdot z^n$, ***9)*** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{\pi^n} \cdot z^n$.

Exercice 2.2. *Montrer que les fonctions suivantes sont analytiques :*

1) $f(z) = \dfrac{1}{4+3z}$, ***2)*** $g(z) = \dfrac{1}{7-9z}$, ***3)*** $h(z) = e^{-z}$,

4) $I(z) = \cosh(2z)$, ***5)*** $J(z) = \sinh(5z)$.

Exercice 2.3. *Montrer que la série entière* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *et sa série dérivée* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ *ont le* même *rayon de convergence.*

Exercice 2.4. *Montrer que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

a une valeur finie en tout point intérieur à son cercle de convergence ou sur celui-ci, mais que ce n'est pas vrai pour la série dérivée.

Chapitre 3

Théorie de Cauchy

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux méthodes d'intégration des fonctions d'une variable complexe. Nous commencerons par définir les notions de chemins et d'arcs dans le plan complexe, qui servent de base pour l'étude des intégrales curvilignes.
Une partie essentielle de ce chapitre sera consacrée à la **théorie de Cauchy**, qui joue un rôle fondamental dans l'analyse complexe. Nous y aborderons notamment le *théorème de Cauchy* et la *formule intégrale de Cauchy*, deux résultats majeurs qui permettent de relier la valeur d'une fonction analytique à ses intégrales sur des contours fermés.

3.1 Théorème de Cauchy

3.1.1 Les intégrales curvilignes

Définition 3.1.1. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On appelle* ***arc*** *toute application continue*

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Le point $\gamma(a)$ est appelé origine de l'arc, et $\gamma(b)$ en est l'extrémité.

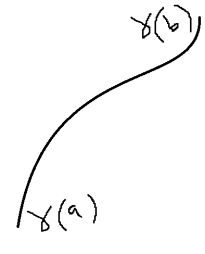


FIGURE 3.1 – Arc

Définition 3.1.2. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et soit*

$$\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$$

une fonction différentiable définie par

$$t \longmapsto \gamma(t) = x(t) + i\, y(t).$$

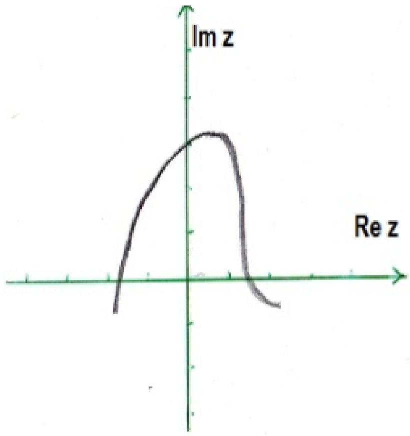
L'ensemble

$$\gamma([a,b]) = \{\gamma(t) \mid t \in [a,b]\},$$

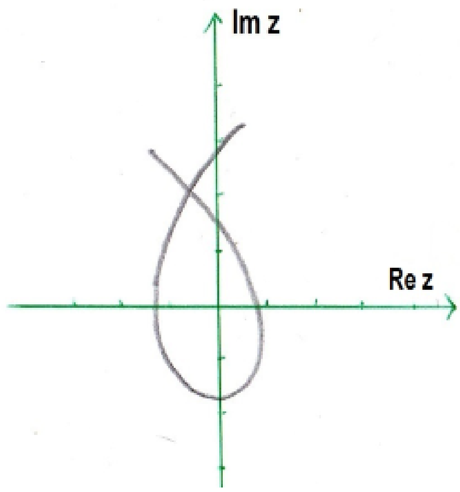
*noté C, est appelé **chemin**, et γ est appelé **paramétrage** de ce chemin. Les points $z_0 = \gamma(a)$ et $z_n = \gamma(b)$ sont respectivement l'origine et l'extrémité du chemin.*

Définition 3.1.3. *Si les points initial et final d'un chemin coïncident, on dit que ce chemin est **fermé** ou qu'il forme un **lacet**.*

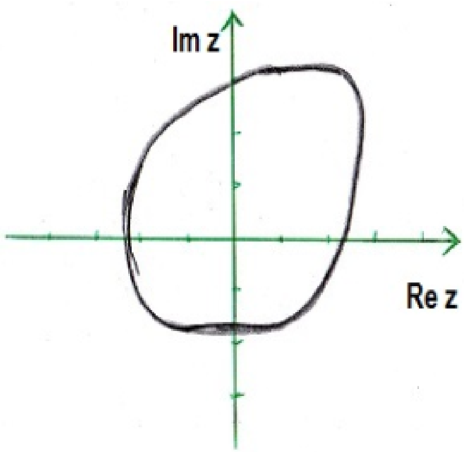
Exemple 3.1.1. *On considère les chemins suivants :*



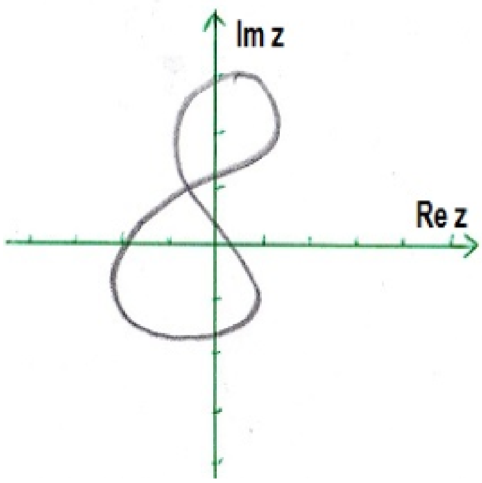
(a)



(b)



(c)



(d)

(a) *Chemin simple non fermé ;*

(b) *Chemin non simple non fermé ;*

(c) *Chemin simple fermé ;*

(d) *Chemin non simple fermé.*

Le cercle, le triangle et le carré sont des exemples de chemins fermés et simples, que l'on appelle également des lacets.

Définition 3.1.4. *Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ et "C" le chemin représenté par l'application suivante :* $z : [a, b] \to \mathbb{C}$
$$t \mapsto z(t).$$
Ici $z(a) = A$ et $z(b) = B$ l'origine et l'extrémité de chemin "C" respectivement et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue, donc :

$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f[z(t)]\, z'(t)\, dt.$$

D un domaine simplement connexe.

Notation 4.1

Si la courbe C est **fermée** et orientée **positivement**, on adopte la notation suivante :

$$\oint_C f(z)\, dz$$

au lieu de

$$\int_C f(z)\, dz.$$

Propriétés sur les intégrales

Soit f et g deux fonctions continues le long de chemin C. Alors :

1) $\displaystyle\int_C [f(z) \pm g(z)]\, dz = \int_C f(z)\, dz \pm \int_C g(z)\, dz.$

2) $\displaystyle\int_C \lambda \cdot f(z)\, dz = \lambda \int_C f(z)\, dz\,;\ \lambda \in \mathbb{C}.$

3) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz.$

Longueur d'un chemin

Définition 3.1.5. *Soit C un chemin paramétré par une fonction continue*

$$z : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto z(t) = x(t) + i\, y(t),$$

*où $z'(t) = x'(t) + i\, y'(t)$ existe et est continue sur $[a, b]$. Alors, la **longueur** L du chemin C est donnée par :*

$$L = \int_a^b |z'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt.$$

Exemple 3.1.2. *Soit*

$$C = \{z(\theta) \in \mathbb{C} : z(\theta) = 3e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Déterminons la longueur L de C.

Solution. *On a*

$$z'(t) = 3ie^{i\theta} \quad et \quad |z'(\theta)| = |3ie^{i\theta}| = 3.$$

Ainsi,

$$L_C = \int_0^{2\pi} |z'(\theta)|\, d\theta = \int_0^{2\pi} 3\, d\theta = 6\pi.$$

Théorème de Green (forme générale)

Théorème. Soit C une courbe fermée simple orientée positivement (sens antihoraire) dans le plan, et soit D la région délimitée par C. Si $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont des fonctions continues, admettant des dérivées partielles continues dans un ouvert contenant D, alors :

$$\oint_C P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Exemple 3.1.3. *Calculons l'intégrale curviligne :*

$$\oint_C (x^2 - y^2)\, dx + 2xy\, dy,$$

où C est le cercle de rayon 1 centré à l'origine, orienté positivement.

Solution. *En utilisant le théorème de Green, on identifie :*

$$P(x,y) = x^2 - y^2, \quad Q(x,y) = 2xy.$$

On a :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2y,$$

et donc :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2y - (-2y) = 4y.$$

Ainsi, l'intégrale devient :

$$\iint_D 4y\, dA,$$

où D est le disque unité.
En coordonnées polaires ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$), avec $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$, on a $dA = r\, dr\, d\theta$. L'intégrale s'écrit donc :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 4(r\sin\theta) r\, dr\, d\theta = 4 \left(\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta \right) \left(\int_0^1 r^2 dr \right).$$

On obtient :

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta = [-\cos\theta]_0^{2\pi} = 0,$$

et donc :

$$\oint_C (x^2 - y^2) dx + 2xy dy = 0.$$

Intégrales de fonctions analytiques

En analyse complexe, le théorème de Green peut être appliqué à l'étude des fonctions analytiques. Si $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ est analytique, elle satisfait les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

L'intégrale de $f(z)$ le long d'un chemin fermé C s'écrit :

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_C (P + iQ)(dx + idy) = \oint_C (P\, dx - Q\, dy) + i \oint_C (Q\, dx + P\, dy).$$

En appliquant le théorème de Green, on obtient :

$$\oint_C f(z)\, dz = \iint_D \left(\frac{\partial(-Q)}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + i \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA.$$

Comme $f(z)$ est analytique, ces intégrales sont nulles, ce qui conduit au résultat fondamental :

$$\oint_C f(z)\, dz = 0.$$

Théorème 3.1.1. (**Théorème de Cauchy**) *: Soit $f : int(C) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe (analytique) et C un chemin fermé, donc :*

$$\int_C f(z)\ dz = 0.$$

Exemple 3.1.4. *Soit*

$$C = \{z(\theta) \in \mathbb{C} : z(\theta) = e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Calculer

$$\oint_C f(z)\, dz, \quad avec \quad f(z) = z^3.$$

Solution. *On a*

$$dz = z'(\theta)\, d\theta = ie^{i\theta}\, d\theta.$$

Donc,

$$\oint_C z^3\, dz = \int_0^{2\pi} e^{3i\theta}\, ie^{i\theta}\, d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{4i\theta}\, d\theta = \left[\frac{1}{4} e^{4i\theta} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Remarque 3.1.1. *Le chemin $[z_0, z_1]$; z_0,$z_1 \in \mathbb{C}$.*
Le chemin "C" est un segment de droite donc :
$z : [0, 1] \to \mathbb{C}$
$\quad t \mapsto z(t) = (1 - t)z_0 + tz_1.$
Ici $z(0) = z_0$ et $z(1) = z_1$.

Remarque 3.1.2. *Le chemin C est un cercle de centre a_0 et de rayon R. On note $C(a_0, R)$; $a_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$ donc :*
$z : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$
$\quad \theta \mapsto z(\theta) = a_0 + Re^{i\theta}$.
$z(0) = z(2\pi) \Longrightarrow$ *le cercle C est un chemin fermé.*

Exemple 3.1.5. *Calculer les intégrales curvilignes suivantes :*
1) $\displaystyle\int_C Im(z)\, dz$ *; où C : est le segment de droite $[0, 1+i]$.*
2) $\displaystyle\int_C \overline{z}\, dz$ *; où C : est le cercle $|z| = 2$.*

Solution. *On a*

1) $\displaystyle\int_C Im(z)\, dz$ *; où C : est le segment de droite $[0, 1+i]$.*

$z : [0, 1] \to \mathbb{C}$
$\quad t \longmapsto z(t) = (1-t)(0) + t(1+i) = t + it$ *et ceci implique que :*
$dz = (1+i)\, dt$ *et* $Im(z) = t$. *Donc on obtient :*

$$\begin{aligned}\int_C Im(z)\, dz &= \int_0^1 t(1+i)\, dt \\ &= (1+i)\int_0^1 t\, dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

2) $\displaystyle\int_C \overline{z}\, dz$ *; où C : est le cercle $|z| = 2$.*

$z : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$
$\quad \theta \longmapsto z(\theta) = 2e^{i\theta}$ *et ceci implique que :*
$dz = 2ie^{i\theta}\, d\theta$ *et* $\overline{z} = 2e^{-i\theta}$. *Donc on obtient :*

$$\begin{aligned}\int_C \overline{z}\, dz &= \int_0^{2\pi} 2e^{-i\theta} 2ie^{i\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 4i\, d\theta \\ &= 8\pi i.\end{aligned}$$

3.2 La Formule Intégrale de Cauchy

La formule intégrale de Cauchy constitue l'un des résultats les plus remarquables de l'analyse complexe. Elle démontre qu'une fonction analytique est entièrement déterminée à l'intérieur d'un contour fermé simple dès lors que ses valeurs sont connues sur ce contour. Ce résultat, issu directement du théorème de Cauchy, confère à ce dernier une puissance exceptionnelle dans l'étude des fonctions holomorphes.

Théorème 3.2.1. *: Soit $f : int(C) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe (analytique), C un chemin fermé simple et $a \in int(C)$, donc :*

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a).$$

Exemple 3.2.1. *Calculer ces intégrales en utilisant la formule intégrale de Cauchy :*

1) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z}{z-i}\,dz,$ *2)* $\displaystyle\int_{|z+2|=1} \frac{e^{iz}}{2z+\pi}\,dz,$

3) $\displaystyle\int_{|z-1/2|=1} \frac{e^{z}}{z^2-1}\,dz,$ *4)* $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-3z+2}\,dz.$

Solution. *On a*

1) On a la fonction $f(z) = z$ qui est holomorphe à $int(C)$ car $f'(z) = 1$ et C est un chemin fermé car $C = C(0,2)$.

$$i \overset{?}{\in} int(C)$$

On a : $\big|i\big| = 1 < 2 \Longrightarrow i \in int(C)$. Donc :

$$\int_C \frac{z}{z-i}\,dz = 2\pi i f\big(i\big) = -2\pi.$$

2) Premièrement, on va transformer notre intégrale à cette forme : $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{2z+\pi}\,dz = \frac{1}{2}\int_C \frac{e^{iz}}{z+\pi/2}\,dz$. Ici la fonction $f(z) = e^{iz}$ qui est holomorphe à $int(C)$ car $f'(z) = ie^{iz}$ et C est un chemin fermé car $C = C(-2,1)$.

$$-\pi/2 \overset{?}{\in} int(C)$$

On a : $\big|-\pi/2+2\big| = 1 < 1 \Longrightarrow -\pi/2$ inint(C). Donc :

$$\frac{1}{2}\int_C \frac{e^{iz}}{z+\pi/2}\,dz = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i f\big(-\pi/2\big) = \pi.$$

3) $\displaystyle\int_{|z-1/2|=1} \frac{e^z}{z^2-1}\,dz$

$z^2-1=(z-1)(z+1)$. *Donc on a deux problèmes* $a_0=1$ *et* $a_1=-1$. *Il reste de vérifier que :*

$$a_0,\ \ a_1 \overset{?}{\in} int(C)$$

$$\begin{cases} |1-1/2|=|1/2|=1/2<1 \Longrightarrow 1\in int(C) \\ |-1-1/2|=|-3/2|=3/2>1 \Longrightarrow -1\notin int(C). \end{cases}$$

Donc la fonction : $f(z)=\dfrac{e^z}{z+1}$ *qui est holomorphe à* $int(C)$ *car* $-1\notin int(C)$ *et* C *est un chemin fermé ;* $C=C(1/2,1)$. *Donc :*

$$\begin{aligned}\int_C \frac{e^z}{z^2-1}\,dz &= \int_C \frac{e^z/(z+1)}{z-1}\,dz \\ &= 2\pi i f(1)=e\pi i.\end{aligned}$$

4) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-3z+2}\,dz$

On a : $g(z)=\dfrac{\cos(\pi z)}{z^2-3z+2}$ *est holomorphe si* $z\neq 1$ *et* $z\neq 2$.

$$1\ ,\ 2\in int(C)\ ;\ C:|z|=3\ ?$$

$$\begin{cases} |1|=1<3 \Longrightarrow 1\in int(C) \\ |2|=2<3 \Longrightarrow 2\in int(C) \end{cases}$$

Donc il faut décomposer $\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ *en deux éléments simples.*

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{a}{z-2}+\frac{b}{z-1}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

$$\Longrightarrow \int_C \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)(z-2)}\,dz=\int_C \frac{\cos(\pi z)}{z-2}\,dz-\int_C \frac{\cos(\pi z)}{z-1}\,dz$$

$f(z)=\cos(\pi z)$ *est holomorphe car* $f'(z)=-\pi\sin(\pi z)$ *à l'intérieur de* C *qui est un chemin fermé (cercle). Donc :*

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\cos(\pi z)}{z^2-3z+2}\,dz &= \int_C \frac{\cos(\pi z)}{z-2}\,dz-\int_C \frac{\cos(\pi z)}{z-1}\,dz \\ &= 2\pi i\Big[\cos(2\pi)-\cos(\pi)\Big] \\ &= 4\pi i.\end{aligned}$$

Remarque 3.2.1. *Dans le cas général, on a :*

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Ici $f : int(C) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe (analytique), C un chemin fermé, $a \in int(C)$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3.2.2. *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_C \frac{e^z}{(z-1)^3}\,dz; \quad C : |z+i| = 2.$$

Solution. *On a*
On a la fonction $f(z) = e^z$ qui est holomorphe à $int(C)$ car $f'(z) = e^z$ et C est un chemin fermé car $C = C(-i, 2)$.

$$1 \overset{?}{\in} int(C)$$

On a : $|1+i| = \sqrt{2} < 2 \Longrightarrow 1 \in int(C)$. Donc on peut appliquer la formule précédente en remplaçant n par 2 :

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{e^z}{(z-1)^3}\,dz &= \int_C \frac{e^z}{(z-1)^{2+1}}\,dz \\
&= 2\pi i \frac{f''(1)}{2!} \\
&= e\pi i.
\end{aligned}$$

Exemple 3.2.3. *Calculer*

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^{2025}}\,dz.$$

Solution. *La fonction $f(z) = e^z$ est une fonction entière. En appliquant la formule intégrale de Cauchy généralisée, on obtient :*

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^{2025}}\,dz = \frac{2\pi i}{2024!} f^{(2024)}(0).$$

Or, la $2024^{\text{ème}}$ dérivée de e^z est $f^{(2024)}(z) = e^z$, donc $f^{(2024)}(0) = 1$. Ainsi,

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^{2025}}\,dz = \frac{2\pi i}{2024!}.$$

3.3 Exercices supplémentaires

Exercice 3.1. *Évaluer l'intégrale curviligne*

$$\int_C z\,dz$$

le long du chemin C reliant $z = 0$ à $z = 4 + 2i$, dans les cas suivants :

i) Le chemin C est défini par le paramétrage

$$z(t) = t + 2it, \quad 0 \leq t \leq 4.$$

ii) Le chemin C est formé de deux segments : le premier reliant 0 à $2i$, et le second reliant $2i$ à $4 + 2i$.

Exercice 3.2. *Évaluer les intégrales :*

1. $\displaystyle\int_C z^4\,dz$*, où :*
   a) C est le segment de droite allant de 0 à $2 + i$.
   b) C est formé du segment de l'axe des x allant de 0 à 2, puis du segment de droite parallèle à l'axe des y et allant de 2 à $2 + i$.
2. $\displaystyle\int_C z\,dz$ *de $1 + 2i$ à $2 + 3i$ selon la courbe donnée par les équations :*

$$x = t^4 + 1, \quad y = t^4 - 3t^3 + t^2 + 2t + 2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

3. $\displaystyle\int_C \overline{z}\,dz$*, où C est le cercle $|z - 2| = 1$ parcouru dans le sens positif.*
4. $\displaystyle\int_C Im(z)\,dz$ *sur :*
   a) le cercle $|z - i| = 1$,
   b) le triangle de sommets 0, 1, i, parcouru dans le sens positif.
5. $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z}$ *autour du carré de sommets $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$, parcouru dans le sens positif.*
6. $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z^2(z+1)}\,dz$*, où C est le cercle :*
   a) $|z| = 3$,
   b) $|z| = \frac{1}{2}$, parcouru dans le sens positif.

Exercice 3.3. *Soit la courbe $C = \{z(\theta) \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, le cercle unité parcouru dans le sens direct. Évaluer l'intégrale*

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z - z_0}\,dz,$$

où $z_0 \in \mathbb{C}$, dans les cas suivants :

i) lorsque z_0 *est* ***à l'extérieur*** *de* C *,*

ii) lorsque z_0 *est* ***à l'intérieur*** *de* C*.*

Exercice 3.4. *Calculer ces intégrales par la formule intégrale de Cauchy :*

1) $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z^7}\,dz$*, où* C *est le cercle* $|z-1|=2$*, dans le sens positif.*

2) $\displaystyle\int_C \frac{z}{(z-1)^2(2z-1)(z+1)}\,dz$*, où* C *est le cercle :*

a) $|z-i|=2$,

b) $|z-1+i|=\frac{3}{2}$,

dans le sens positif.

3) $\displaystyle\int_C \frac{z}{(z+1)^3}\,dz$*, où* C *est le cercle :*

a) $|z|=\frac{1}{2}$,

b) $|z-i|=1$,

dans le sens positif.

4) $\displaystyle\int_C \frac{\sin 2z+\cos z}{(z-\pi)^7}\,dz$*, où* C *est le cercle* $|z|=4$ *décrit dans le sens positif.*

5) $\displaystyle\int_C \frac{z^2+1}{(1-z^2)^3}\,dz$*, où* C *est le cercle :*

a) $|z|=\frac{1}{2}$,

b) $|z|=2$,

dans le sens positif.

6) $\displaystyle\int_C \frac{e^{2z}}{(z^2+1)^2}\,dz$*, où* C *est le cercle* $|z|=2$*, dans le sens positif.*

Exercice 3.5. *Soit* C *le cercle* $|z|=4$*, parcouru dans le sens direct. Calculer les intégrales suivantes :*

i)

$$I_1=\int_C \frac{\cos(\pi z)}{z^4(z-5)}\,dz,$$

ii)

$$I_2=\int_C \frac{e^{2z}}{(z+2)^3}\,dz.$$

Chapitre 4

Applications

Dans ce chapitre, nous présentons plusieurs applications fondamentales de l'analyse complexe qui illustrent la puissance des fonctions holomorphes et des outils associés. Nous débutons par l'étude de l'équivalence entre l'holomorphie et l'analyticité, avant d'aborder des résultats essentiels tels que le théorème du maximum, le théorème de Liouville, ainsi que le théorème de Rouché. Une attention particulière sera portée au théorème des résidus, qui constitue une méthode efficace pour le calcul d'intégrales complexes. Enfin, nous montrerons comment exploiter la méthode des résidus pour évaluer des intégrales réelles simples ou généralisées de manière élégante et rapide.

4.1 Propriétés analytiques des fonctions holomorphes

Bien que la dérivation par rapport à une variable complexe soit formellement semblable à celle effectuée par rapport à une variable réelle, elle entraîne des conséquences fondamentalement différentes sur le comportement des fonctions considérées.

Théorème 4.1.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine contenant le disque fermé $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$, et soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors, pour tout z vérifiant $|z - z_0| < r$, f admet le développement en série de Taylor suivant :*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

où les coefficients a_k sont donnés par :

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta,$$

C_r désignant le cercle de centre z_0 et de rayon r, parcouru dans le sens positif (trigonométrique).

Démonstration. Soit $z \in D(z_0, r)$. D'après la formule intégrale de Cauchy, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta,$$

où C_r désigne le cercle de centre z_0 et de rayon r parcouru positivement. On écrit

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

Pour $|z - z_0| < |\zeta - z_0| = r$, on peut développer la fraction géométrique :

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

En substituant dans la formule de Cauchy, on obtient :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \sum_{k=0}^{+\infty} (z - z_0)^k \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta \right].$$

En posant

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta,$$

on obtient donc

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Enfin, la relation

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

découle soit de la formule intégrale de Cauchy pour la k-ième dérivée d'une fonction holomorphe, soit de la théorie des séries entières. □

Exemple 4.1.1. *Il est possible de choisir une détermination holomorphe des fonctions*

$$z \mapsto \log(1 + z) \quad \text{et} \quad z \mapsto (1 + z)^p$$

dans $\mathbb{C} \backslash]-1, 1]$. *Pour les déterminations qui prennent des valeurs réelles sur l'axe réel, on obtient les développements suivants :*

$$\log(1 + z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k, \quad |z| < 1,$$

et

$$(1+z)^p = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!} z^k, \quad |z| < 1.$$

De plus, en intégrant terme à terme la série de $(1+z^2)^{-1}$*, on obtient :*

$$\arctan z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}, \quad |z| < 1.$$

4.2 Théorème du Maximum

Théorème 4.2.1. (**Le principe du module maximum**) *: Soit* $D \subset \mathbb{C}$ *un domaine (ouvert et connexe) borné, et soit* $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ *une fonction continue, analytique sur* D*. Alors*

$$\max_{z\in D} |f(z)| = \max_{z\in\partial D} |f(z)|.$$

En d'autres termes, $|f|$ *atteint son maximum uniquement sur la frontière* ∂D *et jamais à l'intérieur du domaine* D*.*

Démonstration. Puisque $\overline{D}$ est fermé et borné dans $\mathbb{C}$, il est compact. La fonction continue $|f(z)|$ atteint donc son maximum en au moins un point $z_0 \in \overline{D}$. D'après le principe du maximum pour les fonctions analytiques, si f n'est pas constante, ce maximum ne peut pas être atteint à l'intérieur de D. Il s'ensuit que la valeur maximale de $|f(z)|$ est nécessairement atteinte sur la frontière ∂D.

□

Exemple 4.2.1. *Déterminer le maximum de* $f(z) = 2z + 7i$ *sur le disque* $|z| \leq 3$*.*

Solution. *On a :*

$$|2z+7i|^2 = (2z+7i)(2\overline{z}-7i) = 4|z|^2 + 28\,\mathrm{Im}(z) + 49.$$

D'après le principe du maximum, la valeur maximale de $|2z+7i|$ *est atteinte sur la frontière* $|z| = 3$*. Ainsi :*

$$\max_{|z|\leq 3} |2z+7i| = \max_{|z|=3} \sqrt{4|z|^2 + 28\,\mathrm{Im}(z) + 49}.$$

La valeur de $\mathrm{Im}(z)$ *est maximale lorsque* $z = 3i$*, ce qui donne :*

$$|2(3i) + 7i| = |13i| = 13.$$

Donc :

$$\max_{|z|\leq 3} |2z+7i| = 13.$$

Exemple 4.2.2. *Trouver le maximum et le minimum de* $f(z) = z^3 - 1$ *sur le disque* $|z| \leq 1$.

Solution. *D'après le principe du maximum, il suffit d'étudier* $|z^3 - 1|$ *sur le bord* $|z| = 1$. *En posant* $z = e^{i\theta}$, *on obtient :*

$$|z^3 - 1| = |e^{3i\theta} - 1|.$$

Ainsi :

$$\max_{|z|\leq 1} |z^3 - 1| = \max_{\theta\in[0,2\pi]} |e^{3i\theta} - 1| = |-1-1| = 2,$$

et

$$\min_{|z|\leq 1} |z^3 - 1| = \min_{\theta\in[0,2\pi]} |e^{3i\theta} - 1| = |1-1| = 0.$$

4.3 Théorème de Liouville

Théorème 4.3.1. (**Inégalité de Cauchy**) *: Soit* f *une fonction holomorphe sur le disque* $D(z_0, R)$, *avec* $R > 0$. *Alors* f *admet un développement en série entière sur ce disque :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R.$$

De plus, pour tout $0 < r < R$, *on a l'inégalité de Cauchy :*

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!\, M_r}{r^n},$$

où

$$M_r = \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Démonstration. Considérons le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par

$$\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta},$$

où $0 < r < R$.
Le coefficient a_n du développement en série de Taylor de f autour de z_0 est donné par :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

En paramétrant $\zeta = z_0 + re^{i\theta}$, $d\zeta = ire^{i\theta} d\theta$, on obtient :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{n+1}}\, ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Ainsi, en prenant les modules :

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{M}{r^n},$$

où

$$M = \sup_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|.$$

Or, la formule de Cauchy pour les dérivées donne :

$$f^{(n)}(z_0) = n!\, a_n.$$

On en déduit :

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!\, M}{r^n}, \quad \forall\, 0 < r < R.$$

□

Théorème 4.3.2. *Si f est holomorphe (analytique) sur $\mathbb{C}$ et bornée alors f est constante.*

Démonstration. Soit $f(z)$ une fonction entière et bornée, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
D'après l'inégalité de Cauchy, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout $r > 0$, on a

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}.$$

En faisant tendre $r \to +\infty$, on obtient

$$|f'(z_0)| \to 0.$$

Ainsi, $f'(z_0) = 0$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, ce qui implique que f est constante.

□

Remarque 4.3.1. *Il est important de noter que les fonctions entières non constantes ne peuvent pas être bornées sur tout le plan complexe. Ceci découle directement du théorème de Liouville, qui stipule qu'une fonction entière et bornée doit être constante. Par conséquent, les polynômes non constants, la fonction exponentielle e^z, ainsi que les fonctions trigonométriques et hyperboliques, ne peuvent pas rester bornées sur $\mathbb{C}$.*

Exemple 4.3.1. *Soit f une fonction holomorphe sur le plan complexe $\mathbb{C}$ et supposons que*

$$|f(z)| \leq M|z|, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

où $M > 0$. Montrer que $f(z)$ est un polynôme de degré ≤ 1 sur $\mathbb{C}$.

Solution. *Définissons la fonction*

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & \text{si } z \neq 0, \\ 0, & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Cette fonction g est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée (puisque $|g(z)| \leq M$). D'après le théorème de Liouville, g est constante sur $\mathbb{C}$, donc

$$\frac{f(z)}{z} = \beta, \quad \beta \in \mathbb{C}.$$

Ainsi, $f(z) = \beta z$, ce qui prouve que $f(z)$ est un polynôme de degré ≤ 1 sur le corps complexe $\mathbb{C}$.

Théorème 4.3.3 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** *Soit f un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients réels ou complexes. Alors, l'équation*

$$f(z) = 0$$

admet au moins une racine dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Démonstration. Considérons le polynôme

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

avec $a_n \neq 0$.
Supposons, par l'absurde, qu'il n'existe aucun $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = 0$. Nous allons montrer que cette hypothèse conduit à une contradiction.
On peut factoriser $f(z)$ sous la forme :

$$f(z) = z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right).$$

Lorsque $|z| \to +\infty$, les termes $\frac{a_k}{z^{n-k}}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$ tendent vers 0, donc

$$\lim_{|z| \to +\infty} \frac{f(z)}{z^n} = a_n \neq 0.$$

Ainsi, $|f(z)| \to +\infty$ lorsque $|z| \to +\infty$.
Comme f est une fonction continue et que $|f(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to \infty$, il existe un rayon $R > 0$ tel que $|f(z)| \geq |f(0)|$ pour tout $|z| \geq R$. Le minimum de $|f(z)|$ sur le disque fermé $\overline{D(0,R)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ est donc atteint en un point z_0 de ce disque, d'après le théorème des valeurs extrêmes.
Si z_0 se trouvait sur la frontière $|z| = R$, ce minimum serait au moins $|f(0)| > 0$. Mais si z_0 se trouvait à l'intérieur du disque, comme f est analytique et ne s'annule pas, le principe du minimum pour les fonctions holomorphes impliquerait que $|f(z)|$ est constant, et donc f serait constante, ce qui contredirait $\deg f = n \geq 1$.
Ainsi, notre supposition est fausse et il existe un $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = 0$.
De plus, sur le même cercle $|z| = R$ et à l'intérieur de celui-ci, la fonction

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

serait continue sur le compact $\overline{D(0,R)}$ et donc nécessairement bornée. En conséquence, $g(z)$ serait bornée sur tout le plan $\mathbb{C}$, et d'après le théorème de Liouville, $g(z)$ serait constante.
Cela impliquerait que $f(z)$ est également constante, ce qui contredit l'hypothèse que f est un polynôme de degré $n \geq 1$. Cette contradiction montre donc que notre supposition initiale — $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ — est fausse.
Il existe donc au moins une racine $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que $f(z_0) = 0$. Le théorème est ainsi démontré.

□

Corollaire 4.3.1. *Si $f(z)$ est un polynôme de degré $n \geq 1$, alors l'équation*

$$f(z) = 0$$

admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$, en comptant les multiplicités.

Démonstration. D'après le Théorème fondamental de l'algèbre, l'équation $f(z) = 0$ possède au moins une racine $z_1 \in \mathbb{C}$. On peut alors factoriser

$$f(z) = (z - z_1)Q_1(z),$$

où $Q_1(z)$ est un polynôme de degré $n - 1$.
En appliquant de nouveau le Théorème fondamental de l'algèbre à $Q_1(z)$, on obtient une deuxième racine z_2 telle que

$$Q_1(z) = (z - z_2)Q_2(z),$$

avec $Q_2(z)$ de degré $n - 2$.
En répétant ce procédé n fois, on arrive à la décomposition

$$f(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

ce qui prouve que $f(z) = 0$ possède exactement n racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leur multiplicité.

□

4.4 Théorème de Rouché

Théorème 4.4.1. *Soient f et g deux fonctions analytiques à l'intérieur et sur un lacet C. Si, pour tout $z \in C$, on a*

$$|g(z)| < |f(z)|,$$

alors $f + g$ et f possèdent le même nombre de zéros (en comptant les multiplicités) à l'intérieur de C.

Exemple 4.4.1. *Soit $f(z) = z^4 + 8z + 10$. Combien de zéros (comptés avec multiplicité) f possède-t-elle dans le disque $|z| < 1$?*

Solution. *1. Étude sur le disque $|z| < 1$. Sur le cercle $|z| = 1$, nous avons*

$$|z^4| = 1, \quad |8z + 10| \geq \big| |10| - |8z| \big| = |10 - 8| = 2.$$

Ainsi,

$$|z^4| < |8z + 10|.$$

En appliquant le théorème de Rouché avec

$$g(z) = 8z + 10,$$

nous concluons que $f(z)$ et $g(z)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur du disque $|z| < 1$. Comme $g(z) = 8z + 10$ est un polynôme de degré 1, il possède exactement un zéro. ***Donc, f a exactement un zéro dans $|z| < 1$.***

Exemple 4.4.2. *Soit $f(z) = z^5 + 4z + 1$. Déterminer le nombre de zéros de f (comptés avec multiplicité) dans le disque unité $|z| < 1$.*

Solution. *Nous choisissons la fonction de comparaison $g(z) = 4z$. Sur le cercle unité $|z| = 1$, nous avons*

$$|g(z)| = 4|z| = 4.$$

De plus,

$$|f(z) - g(z)| = |z^5 + 1| \leq |z^5| + |1| = 2.$$

Ainsi, sur $|z| = 1$,

$$|f(z) - g(z)| \leq 2 < 4 = |g(z)|.$$

Par le ***théorème de Rouché*** *les fonctions f et g possèdent le même nombre de zéros à l'intérieur du disque unité $|z| < 1$.*
Or, $g(z) = 4z$ possède un seul zéro en $z = 0$. Donc, f possède un zéro dans le disque unité.

4.5 Théorème des Résidus

L'une des applications les plus remarquables de l'intégration complexe, et plus particulièrement du théorème de Cauchy, réside dans la possibilité d'exploiter les outils de l'analyse complexe pour évaluer des intégrales ou des séries réelles qui seraient extrêmement difficiles, voire impossibles, à calculer à l'aide des seules méthodes de l'analyse réelle.
La théorie des résidus fournit une méthode élégante et efficace pour ces calculs, en permettant de transformer l'évaluation de certaines intégrales en la somme des résidus des pôles d'une fonction holomorphe dans un domaine donné.

4.5.1 Points singuliers

Jusqu'à présent, nous avons étudié les fonctions uniquement en des points et des domaines où elles sont analytiques. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux *points singuliers* d'une fonction.

Définition 4.5.1. *Un point z_0 est dit **point singulier** d'une fonction $f(z)$ si f n'est pas analytique en z_0, alors qu'il existe dans tout voisinage de z_0 au moins un point où f est analytique.*

Dans cette section, nous nous restreignons aux **points singuliers isolés**.

Définition 4.5.2. *Un point singulier z_0 est **isolé** si $f(z)$ n'est pas analytique en z_0 mais l'est en tout autre point d'un certain voisinage de z_0, c'est-à-dire dans un voisinage annulaire de z_0.*

Exemple : La fonction

$$f(z) = \frac{1}{z-1}$$

admet un point singulier isolé en $z = 1$.
En revanche, la fonction

$$f(z) = \left(\sin\frac{1}{z}\right)^{-1}$$

possède un nombre infini de points singuliers autour de $z = 0$, en particulier aux points

$$z = \frac{1}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Ainsi, $z = 0$ n'est pas un point singulier isolé.
Il arrive parfois qu'il soit possible de **corriger** une fonction en un point singulier isolé en redéfinissant simplement la fonction en ce point. Dans ce cas, on dit que le point singulier est **amovible**.

Exemple 4.5.1. *Considérons la fonction*

$$f(z) = \frac{z^2-1}{z-1}.$$

Cette fonction n'est pas définie en $z = 1$. Cependant, on peut la prolonger analytiquement en remarquant que

$$\frac{z^2-1}{z-1} = z+1, \quad \textit{pour } z \neq 1.$$

On peut donc définir

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2-1}{z-1}, & \textit{si } z \neq 1, \\ z+1, & \textit{si } z = 1, \end{cases}$$

et la fonction devient ainsi analytique en $z = 1$.

4.5.2 Point singulier essentiel et pôles

Une manière efficace de décrire les points singuliers d'une fonction analytique consiste à utiliser son développement en **série de Laurent**. Une série de Laurent autour d'un point z_0 s'écrit sous la forme :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

où les coefficients b_n et a_n sont des nombres complexes.

La première somme $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$ est appelée la **partie principale** de la série, tandis que la seconde somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est appelée la **partie analytique**.

- Si le nombre de coefficients b_n non nuls est infini, alors z_0 est appelé un **point singulier essentiel** de $f(z)$.
- Par extension, le terme **point singulier essentiel** peut également être employé pour désigner un point singulier non isolé.
- Si le nombre de coefficients b_n non nuls est fini et égal à N, on dit que la fonction $f(z)$ possède un **pôle d'ordre** N en z_0.

Regardons à présent la série correspondant à une fonction possédant un pôle d'ordre n en z_0 :

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{c_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots .$$

4.5.3 Les Résidus

Supposons que z_0 est un point singulier isolé (essentiel ou pôle) d'une fonction $f(z)$ qui est par ailleurs analytique dans un anneau autour de z_0. On peut alors développer $f(z)$ en série de Laurent autour de z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Le coefficient b_1 de $(z - z_0)^{-1}$ dans cette série est appelé le **résidu de** f **en** z_0 et se note :

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = b_1.$$

Le calcul des résidus joue un rôle central dans le théorème des résidus, qui permet d'évaluer des intégrales complexes en reliant la valeur d'une intégrale sur un contour à la somme des résidus des singularités situées à l'intérieur de ce contour.

$$Res(g,a) = f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

Ici $a \in int(C)$.

Remarque : Si f est holomorphe dans un domaine D, sauf en des singularités isolées z_k, on peut exprimer le résidu $\mathrm{Res}(f, z_k)$ de plusieurs façons, suivant la nature de la singularité :

— Pour un **pôle simple** en z_0,

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

— Pour un **pôle d'ordre** $m \geq 2$,

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\big[(z-z_0)^m f(z)\big].$$

Exemple 4.5.2. *Calculer les résidus des fonctions suivants :*

1) $f(z) = \dfrac{z^3}{z+i}$.

2) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$.

3) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+2)^3}$.

Solution. *On a*

1) $f(z) = \dfrac{z^3}{z+i}$.

Ici $a = -i$ *et* $m = 1$. *Alors :*

$$Res(f, -i) = \lim_{z\longrightarrow -i}(z+i)f(z) = i.$$

2) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$.

Ici $a = 1$ *et* $m = 2$. *Alors :*

$$Res(f, 1) = \lim_{z\longrightarrow 1}\frac{d}{dz}\Big[(z-1)^2 f(z)\Big] = e.$$

3) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+2)^3}$.

Ici $a = -2$ *et* $m = 3$. *Alors :*

$$Res(f, -2) = \frac{1}{2!}\lim_{z\longrightarrow -2}\frac{d^2}{dz^2}\Big[(z+2)^3 f(z)\Big] = 1.$$

Théorème 4.5.1. (Théorème des Résidus) *: Soit $f : int(C) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sauf en un nombre fini de points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et C un chemin fermé. Alors :*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, a_k).$$

Ici $a_1, a_2, \ldots, a_n \in int(C)$.

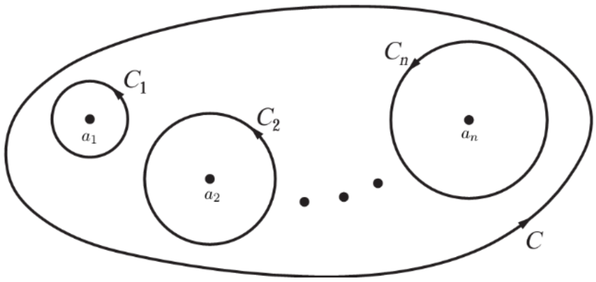


FIGURE 4.1 – Domaine et contour pour le théorème des résidus

Exemple 4.5.3. *Calculer l'intégrale suivante avec le théorème des résidus :*

$$\int_C \frac{1}{z^2(z-1)^3}\,dz; \quad C : |z| = 2.$$

Solution. *On a*
$f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-1)^3}$ *est holomorphe si $z \neq 0$ et $z \neq 1$, alors 0 est un pôle double et 1 est un pôle triple. Donc :*

$$\int_C \frac{1}{z^2(z-1)^3}\,dz = 2\pi i\Big[Res(f,0) + Res(f,1)\Big].$$

$Res(f,0) = \lim\limits_{z \longrightarrow 0} \dfrac{d}{dz}\Big[z^2 f(z)\Big] = -3.$

$Res(f,1) = \dfrac{1}{2!}\lim\limits_{z \longrightarrow 1} \dfrac{d^2}{dz^2}\Big[(z-1)^3 f(z)\Big] = 3.$
Donc :

$$\int_C \frac{1}{z^2(z-1)^3}\,dz = 2\pi i\big[-3+3\big] = 0.$$

Exemple 4.5.4. *Calculer l'intégrale*

$$I = \int_C \frac{\cos(\pi z)}{z^2 - 2z}\,dz,$$

où le contour C est le cercle $|z| = 1$.

Solution. *On factorise le dénominateur :*

$$z^2 - 2z = z(z-2).$$

Ainsi, la fonction considérée est

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z(z-2)}.$$

Les pôles de $f(z)$ sont $z = 0$ et $z = 2$. Le contour $C : |z| = 1$ contient seulement le pôle $z = 0$.

D'après le théorème des résidus, *on a*

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0).$$

Calcul du résidu en $z = 0$ *: Puisque $z = 0$ est un pôle simple, on utilise la formule*

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\cos(\pi z)}{z - 2}.$$

En évaluant la limite, on obtient

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{\cos(0)}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

Conclusion :

$$I = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i.$$

Exemple 4.5.5. *Calculer l'intégrale*

$$I = \int_C \frac{2z+1}{z^2+9}\, dz,$$

où le contour C est le cercle $|z - i| = 3$.

Solution. *Le dénominateur $z^2 + 9 = 0$ admet deux pôles simples en*

$$z = 3i \quad \textit{et} \quad z = -3i.$$

Le contour $C : |z - i| = 3$ est centré en i et de rayon 3. On observe que :

$$|3i - i| = |2i| = 2 < 3 \quad \Rightarrow \quad 3i \in C,$$

et

$$|-3i - i| = |-4i| = 4 > 3 \quad \Rightarrow \quad -3i \notin C.$$

Ainsi, seul le pôle $z = 3i$ est à l'intérieur de C.

En appliquant le théorème des résidus, on obtient :

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{2z+1}{z^2+9},\, z = 3i\right).$$

Calcul du résidu en $z = 3i$ ***:*** *Puisque le pôle est simple,*

$$\operatorname{Res}\left(\frac{2z+1}{z^2+9},\, z = 3i\right) = \lim_{z \to 3i} (z - 3i) \frac{2z+1}{(z-3i)(z+3i)} = \lim_{z \to 3i} \frac{2z+1}{z+3i}.$$

En évaluant en $z = 3i$,

$$\text{Res} = \frac{2(3i)+1}{3i+3i} = \frac{6i+1}{6i} = \frac{1}{6i} + 1 = 1 - \frac{i}{6}.$$

Conclusion :

$$I = 2\pi i\left(1 - \frac{i}{6}\right) = 2\pi i - \frac{2\pi i^2}{6} = 2\pi i + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi i.$$

Exemple 4.5.6. *Calculer l'intégrale*

$$I = \int_C \frac{1}{z^3 + 4z^2}\, dz,$$

où le contour C est le cercle $|z| = 2$.

Solution. *On commence par factoriser le dénominateur :*

$$z^3 + 4z^2 = z^2(z+4).$$

Ainsi,

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 4z^2} = \frac{1}{z^2(z+4)}.$$

Les pôles de $f(z)$ sont :

$$z = 0 \quad \textit{(pôle d'ordre 2)}, \quad z = -4 \quad \textit{(pôle simple)}.$$

Le cercle $C : |z| = 2$ contient $z = 0$ mais pas $z = -4$.

D'après le théorème des résidus, l'intégrale est donnée par

$$I = 2\pi i\, \text{Res}(f, 0).$$

Calcul du résidu en $z = 0$: *Puisque $z = 0$ est un pôle d'ordre 2, on utilise la formule :*

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left[z^2 f(z)\right] = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+4}\right).$$

On a

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+4}\right) = -\frac{1}{(z+4)^2}.$$

Donc

$$\text{Res}(f, 0) = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}.$$

Conclusion :

$$I = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{16}\right) = -\frac{\pi i}{8}.$$

4.6 Calcul d'intégrales par la méthode des Résidus

Le calcul d'intégrales définies peut souvent être réalisé en exploitant le *théorème des résidus*, appliqué à une fonction appropriée et à un contour judicieusement choisi dans le plan complexe. Le choix de ce contour est souvent l'étape la plus délicate et requiert une certaine ingéniosité.

4.6.1 Intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} \Re(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$

L'idée principale est de convertir l'intégrale trigonométrique de la forme $\int_0^{2\pi} \Re(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$ en une intégrale complexe sur un chemin qui est le cercle unité $|z| = 1$. La paramétrisation d'un cercle est $z = e^{i\theta}$; $\theta \in [0, 2\pi]$.
Donc : $\cos\theta = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$ et $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$.
L'intégrale devienne :

$$\int_{|z|=1} \Re\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, a_k)$$

avec a_1, a_2, …, $a_n \in int(C) \iff |a_k| < 1\ \forall n \in \{1, \ldots, n\}$.

Remarque 4.6.1. $\Re$ *est une fonction rationnelle.*

Exemple 4.6.1. *Calculer les intégrales suivantes avec le théorème des résidus :*
1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3\sin\theta}$, *2)* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$.

Solution. *On a*

1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3\sin\theta}$ *:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3\sin\theta} = \int_C \frac{dz/iz}{5 + 3(z - z^{-1})/2i} = 2\int_C \frac{1}{3z^2 + 10iz - 3}\, dz.$$

Où C est le cercle unité. La fonction à intégrer présente deux pôles simples :
$3z^2 + 10iz - 3 = 0 \Longrightarrow \Delta = -100 + 36 = -64 = (8i)^2$.

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-10i + 8i}{6} = -\dfrac{i}{3} \\ z_2 = \dfrac{-10i - 8i}{6} = -3i \notin int(C) \end{cases}$$

Seul le pôle $-\dfrac{i}{3}$ *est à l'intérieur de* C *car* $\left(\left|-\dfrac{i}{3}\right|=\dfrac{1}{3}<1\right)$.

$f(z)=\dfrac{1}{3z^2+10iz-3}$. *Alors nous devons calculer le résidu en* $-\dfrac{i}{3}$ *:*

$$Res\big(f,-i/3\big)=\lim_{z\longrightarrow -i/3}\frac{(z+i/3)}{3(z+3i)(z+i/3)}=\frac{1}{8i}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\sin\theta} &= 2\int_C f(z)\,dz\\ &= 2\cdot 2\pi i\cdot Res\big(f,-i/3\big)\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ *:*

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}=\int_C\frac{dz/iz}{2+(z+z^{-1})/2}=\frac{2}{i}\int_C\frac{1}{z^2+4z+1}\,dz.$$

Où C *est le cercle unité. La fonction à intégrer présente deux pôles simples :*

$z^2+4z+1=0\Longrightarrow\Delta=16-4=12=(2\sqrt{3})^2.$

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{-4+2\sqrt{3}}{2}=-2+\sqrt{3}\\ z_2=\dfrac{-4-2\sqrt{3}}{2}=-2-\sqrt{3}\notin int(C)\end{cases}$$

Seul le pôle $-2+\sqrt{3}$ *est à l'intérieur de* C *car* $\left(|-2+\sqrt{3}|=2-\sqrt{3}<1\right)$.

$f(z)=\dfrac{1}{z^2+4z+1}$. *Alors nous devons calculer le résidu en* $-2+\sqrt{3}$ *:*

$$Res\big(f,-2+\sqrt{3}\big)=\lim_{z\longrightarrow -2+\sqrt{3}}\frac{(z+2-\sqrt{3})}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta} &= \frac{2}{i}\int_C f(z)\,dz\\ &= \frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot Res\big(f,-2+\sqrt{3}\big)\\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Exemple 4.6.2. *Calculer*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5 + 3\cos\theta}\, d\theta.$$

Solution. *Nous utilisons la transformation complexe $z = e^{i\theta}$ avec $|z| = 1$. Alors,*

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

L'intégrale devient

$$I = \int_C \frac{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}{5 + \frac{3}{2}(z + \frac{1}{z})} \cdot \frac{dz}{iz},$$

où C est le cercle unité $|z| = 1$. En simplifiant, on obtient

$$I = \int_C \frac{z^2 + 1}{iz(3z^2 + 10z + 3)}\, dz.$$

1. Pôles de la fonction. *La fonction*

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{iz(3z^2 + 10z + 3)}$$

a pour pôles :

$$z = 0, \quad z = -3, \quad z = -\frac{1}{3}.$$

Les pôles situés à l'intérieur du cercle unité $|z| < 1$ sont $z = 0$ et $z = -\frac{1}{3}$.

2. Résidus.

Résidu en $z = 0$:

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2 + 1}{i(3z^2 + 10z + 3)} = \frac{1}{3i}.$$

Résidu en $z = -\frac{1}{3}$: *On écrit*

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{iz(z + 3)(3z + 1)}.$$

Ainsi

$$\text{Res}(f, -\tfrac{1}{3}) = \lim_{z\to -\frac{1}{3}} (z + \tfrac{1}{3}) f(z) = \frac{(-\frac{1}{3})^2 + 1}{i(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3} + 3) \cdot 3}.$$

On a $(-\frac{1}{3})^2 + 1 = \frac{1}{9} + 1 = \frac{10}{9}$ et $-\frac{1}{3} + 3 = \frac{8}{3}$. Donc

$$\text{Res}(f, -\tfrac{1}{3}) = \frac{\frac{10}{9}}{i(-\frac{1}{3})(\frac{8}{3}) \cdot 3} = \frac{10/9}{-\frac{8}{3}i} = -\frac{10}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{i} = \frac{5}{12}i.$$

3. Théorème des résidus. *On a*

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \left[\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, -\tfrac{1}{3})\right].$$

Donc

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{3i}+\frac{5}{12}i\right).$$

Comme $\frac{1}{3i} = -\frac{i}{3}$, *il vient*

$$\frac{1}{3i}+\frac{5}{12}i = -\frac{i}{3}+\frac{5i}{12} = \frac{-4i+5i}{12} = \frac{i}{12}.$$

Ainsi

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5+3\cos\theta}\,d\theta = 2\pi i \cdot \frac{i}{12} = -\frac{\pi}{6}.$$

4. Conclusion. *Par conséquent,*

$$\boxed{I = -\frac{\pi}{6}.}$$

4.6.2 Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

Soit $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes premiers entre eux. Aucun des zéros de Q n'étant réel. Supposons en outre que l'on ait :

$$deg\ Q \geq 2 + deg\ P.$$

La formule suivante est valable, les a_k étant les zéros de Q ; $Im(a_k) > 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\big(f, a_k\big). \tag{4.1}$$

Exemple 4.6.3. *Calculer les intégrales suivantes avec le théorème des résidus :*

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$, ***2)*** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$.

Solution. *On a*

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ *:*

$f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$. *Donc :* $P(z) = 1$ *et* $Q(z) = z^2+1$ *et* $deg\ Q = 2 \geq 2 + deg\ P = 2 + 0 = 2$. *Les racines de* Q *sont* i *et* $-i$ *donc aucune n'est réelle, la formule 4.1 est donc applicable.*
Seul le pôle i *a de partie imaginaire strictement positive car* $Im(i) = 1 > 0$.
Alors nous devons calculer le résidu en i *:*

$$Res(f, i) = \lim_{z \longrightarrow i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} \;=\; 2\pi i \cdot Res(f, i) = \pi.$$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$ *:*

$f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$. *Donc :* $P(z) = 1$ *et* $Q(z) = (z^2+4)^2$ *et* *deg* $Q = 4 > 2 +$ *deg* $P = 2 + 0 = 2$. *Les racines de* Q *sont* $2i$ *et* $-2i$ *donc aucune n'est réelle, la formule 4.1 est donc applicable. Seul le pôle* $2i$ *a de partie imaginaire strictement positive car* $Im(2i) = 2 > 0$. *Alors nous devons calculer le résidu en* $2i$ *qui est un pôle double :*

$$Res(f, 2i) = \frac{1}{1!} \lim_{z \longrightarrow 2i} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+2i)^2}\right] = \lim_{z \longrightarrow i} \frac{-2}{(z+2i)^3} = \frac{2}{27i}.$$

D'où : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = 2\pi i \cdot Res(f, 2i) = \frac{4\pi}{27}.$

Exemple 4.6.4. *Calculer l'intégrale*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Solution. *La fonction* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$ *est paire. Ainsi,*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Considérons la fonction complexe

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}.$$

La fonction $f(z)$ *satisfait les conditions d'application du théorème des résidus. Nous avons*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \sum \mathrm{Res}(f; a_k),$$

où la somme est prise sur les pôles a_k *de* $f(z)$ *situés dans le demi-plan supérieur* ($\mathrm{Im}\, a_k > 0$)*.*

Étape 1 : Détermination des pôles. *Les pôles de $f(z)$ sont les racines de $1+z^4=0$, c'est-à-dire*

$$z_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Ainsi,

$$a_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad a_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad a_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad a_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

Les pôles dans le demi-plan supérieur sont a_0 et a_1.

Étape 2 : Calcul des résidus. *Pour un pôle simple a_k,*

$$\operatorname{Res}(f; a_k) = \lim_{z\to a_k} (z-a_k) f(z) = \lim_{z\to a_k} \frac{z-a_k}{1+z^4} = \frac{1}{4a_k^3}.$$

Donc,

$$\operatorname{Res}(f; a_0) = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}}, \quad \operatorname{Res}(f; a_1) = \frac{1}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}}.$$

Étape 3 : Calcul de l'intégrale. *On obtient*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f; a_0) + \operatorname{Res}(f; a_1)\right) = 2\pi i \left(\frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} \right).$$

Après simplification,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Finalement,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Intégrales du type $\int_0^{+\infty} e^{i\beta x} f(x)\, dx,\ \beta \in \mathbb{R}$

Théorème 4.6.1. *Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels, de degrés respectifs m et n, tels que $n \geq m+1$ et*

$$Q(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soit $\beta > 0$ et la fonction

$$f(z) = \frac{e^{i\beta z} P(z)}{Q(z)}.$$

Alors, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\beta x)\, dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(\beta x)\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}(f; a_k),$$

où les a_k sont les pôles de f situés dans le demi-plan supérieur.

Exemple 4.6.5. *Évaluer l'intégrale*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + b^2}\, dx, \quad b > 0.$$

Solution. *Nous utilisons le Théorème 4.6.1. Considérons la fonction complexe :*

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + b^2},$$

et posons $a = 1$. Ainsi, nous définissons :

$$g(z) = \frac{z e^{iz}}{z^2 + b^2}.$$

Le seul pôle de $g(z)$ dans le demi-plan supérieur est en $z = ib$. Le résidu en ce point est :

$$\operatorname{Res}\big(g, ib\big) = \lim_{z \to ib} (z - ib) \frac{z e^{iz}}{z^2 + b^2} = \frac{ib\, e^{-b}}{2ib} = \frac{e^{-b}}{2}.$$

Par le théorème des résidus, nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + b^2}\, dx = i\pi e^{-b}.$$

En prenant la ***partie imaginaire****, nous avons :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + b^2}\, dx = \pi e^{-b}.$$

Or, l'intégrale $\frac{x \sin x}{x^2+b^2}$ est une fonction paire, donc :

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + b^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-b}.$$

De même, en prenant la ***partie réelle****, on obtient :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + b^2}\, dx = 0,$$

ce qui est évident car l'intégrale est impaire.

Exemple 4.6.6. *Calculer l'intégrale*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1 + x^2)^2}\, dx.$$

Solution. *La fonction sous l'intégrale est paire, donc :*

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1 + x^2)^2}\, dx.$$

Considérons la fonction complexe :

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} = \frac{e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}.$$

Nous pouvons appliquer le théorème des résidus à cette fonction, car elle satisfait les conditions nécessaires.
Ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2}\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f; i),$$

où $z = i$ est un pôle d'ordre 2.

Calcul du résidu au pôle $z = i$. *Pour un pôle d'ordre 2, nous avons :*

$$\operatorname{Res}(f; i) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 f(z) \right].$$

Comme

$$(z-i)^2 f(z) = \frac{e^{iz}}{(z+i)^2},$$

nous obtenons :

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\right] = \frac{ie^{iz}}{(z+i)^2} - \frac{2e^{iz}}{(z+i)^3}.$$

En évaluant en $z = i$, on a $z + i = 2i$, donc :

$$\begin{aligned} Res(f;i) &= \frac{ie^{ii}}{(2i)^2} - \frac{2e^{ii}}{(2i)^3} = \frac{ie^{-1}}{-4} - \frac{2e^{-1}}{-8i} \\ &= -\frac{ie^{-1}}{4} + \frac{e^{-1}}{4i} = -\frac{ie^{-1}}{4} - \frac{ie^{-1}}{4} \\ &= -\frac{ie^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. *Ainsi :*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2}\, dx &= 2\pi i \cdot Res(f;i) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{ie^{-1}}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{e}. \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2e}.$$

4.6.3 Intégrales de la forme $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathcal{Q}(x)\,dx$

Théorème 4.6.2. *Considérons l'intégrale*

$$I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\mathcal{Q}(x)\,dx,$$

où $\alpha > 0$ est un réel strictement positif et $\mathcal{Q}$ est une fraction rationnelle n'ayant aucun pôle réel positif ou nul, telle que $\mathcal{Q}(0) \neq 0$ et

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}|\mathcal{Q}(x)| = 0.$$

Si $\mathcal{Q} = \dfrac{P}{S}$, où P et S sont deux polynômes, on suppose que

$$\deg P < \deg S - \alpha.$$

On introduit alors la fonction complexe

$$f(z) = (-z)^{\alpha-1}\mathcal{Q}(z).$$

En appliquant le théorème des résidus, on obtient

$$I = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{a_k} \operatorname{Res}\big((-z)^{\alpha-1}Q(z), a_k\big)\,,$$

où la somme est prise sur tous les pôles a_k de la fraction rationnelle $\mathcal{Q}$.

Exemple 4.6.7. *Calculer l'intégrale*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)}.$$

Solution. *On reconnaît une intégrale du type*

$$I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}Q(x)\,dx,$$

avec

$$\alpha - 1 = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3},$$

et

$$Q(z) = \frac{1}{1+z}.$$

La fonction Q possède un seul pôle simple en $z = -1$.
En appliquant la formule générale, on obtient

$$I = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \operatorname{Res}\big[(-z)^{\alpha-1}Q(z),\, z=-1\big]\,.$$

Calculons le résidu en $z = -1$:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{(-z)^{-1/3}}{1+z},\, z=-1\right] = \lim_{z\to-1}(z+1)\frac{(-z)^{-1/3}}{1+z} = 1.$$

Donc :

$$\begin{aligned} I = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)} &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \operatorname{Res}\big[(-z)^{\alpha-1}Q(z),\, z=-1\big] \\ &= \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Exemple 4.6.8. *Calculer l'intégrale*

$$B = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

Solution. *On reconnaît une intégrale du type*

$$B = \int_0^\infty x^{\alpha-1}Q(x)\,dx,$$

avec

$$\alpha - 1 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2},$$

et

$$Q(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

La fonction Q possède deux pôles simples en $z = i$ et en $z = -i$..
En appliquant la formule générale, on obtient

$$B = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\Bigg(\operatorname{Res}\big[(-z)^{\alpha-1}Q(z),\, z=i\big] + \operatorname{Res}\big[(-z)^{\alpha-1}Q(z),\, z=-i\big] \Bigg).$$

Calculons le premier résidu en $z = i$:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{(-z)^{-1/2}}{(z+i)(z-i)},\, z=i\right) = \lim_{z\to i} \frac{(-z)^{-1/2}}{z+i} = \frac{e^{i\pi/4}}{2i}.$$

Calculons le deuxième résidu en $z = -i$:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{(-z)^{-1/2}}{(z+i)(z-i)},\, z=-i\right) = \lim_{z\to -i} \frac{(-z)^{-1/2}}{z-i} = -\frac{e^{-i\pi/4}}{2i}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} B &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\Bigg(\operatorname{Res}\big[(-z)^{\alpha-1}Q(z),\, z=i\big] + \operatorname{Res}\big[(-z)^{\alpha-1}Q(z),\, z=-i\big] \Bigg) \\ &= \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left(\frac{e^{i\pi/4}}{2i} - \frac{e^{-i\pi/4}}{2i}\right) \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

4.7 Exercices supplémentaires

Exercice 4.1. *Montrer que si f est analytique dans le disque $|z| \leq 1$ et satisfait*

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|},$$

alors, pour tout entier $n \geq 1$, on a l'estimation

$$|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 4.2. *Soit f une fonction holomorphe et non constante sur $\mathbb{C}$, telle que*

$$|f(z)| \geq 1, \quad \forall |z| > 1.$$

Montrer que f admet au moins un zéro dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4.3. *Trouver toutes les fonctions $f(z)$ analytiques dans tout le plan complexe et vérifiant les conditions $|f(z)| < 1$ pour tout z et $f(z) = 1 + i$ pour tout z réel.*

Exercice 4.4. *Soit $f(z)$ analytique sur le disque $|z| \leq a$, avec $a > 0$, et supposons que $|f(z)| \leq M$ pour tout z tel que $|z| \leq a$. Montrer que*

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{M \cdot a \cdot n!}{(a - |z|)^{n+1}},$$

pour tout z tel que $|z| < a$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.5. *Pour chaque fonction $f(z)$ ci-dessous et le domaine D, déterminer*

$$\max_{z \in D} |f(z)|,$$

ainsi que les points $z \in D$ où cette valeur est atteinte.

1. $f(z) = 3iz - 2, \quad D : |z| \leq 4.$
2. $f(z) = z^2 - z, \quad D : |z| \leq 2.$
3. $f(z) = z^2 - 3z + 2, \quad D : |z| \leq 1.$
4. $f(z) = (2iz + 3)^3, \quad D : |z| \leq 3.$
5. $f(z) = e^z, \quad D : |z - i| \leq 2.$

Exercice 4.6. *1. Soit $f(z)$ analytique dans tout le plan complexe et supposons que*

$$\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z} = 0.$$

Montrer que f est constante.

Suggestion : *Poser*

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

et utiliser le théorème de Liouville.

2. *Soit $f(z)$ analytique dans tout le plan complexe et supposons que*

$$Im\big(f(z)\big) \leq 0$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Suggestion : *Poser*

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - i}$$

et utiliser le théorème de Liouville.

Exercice 4.7. *Combien le polynôme $f(z) = z^4 - 5z + 1$ a-t-il de zéros dans le disque $|z| < \frac{1}{4}$?*

Exercice 4.8. *Montrer que le polynôme $p(z) = 2z^5 + 8z - 1$ a ses 5 zéros à l'intérieur du cercle $|z| = 2$ et qu'un seul d'entre eux est situé à l'intérieur du cercle $|z| = 1$.*

Exercice 4.9. *Soit la fonction polynomiale*

$$f(z) = z^4 - z^2 - 2z + 2.$$

(1) En vous inspirant de la preuve du théorème fondamental de l'algèbre*, montrer que f admet exactement quatre zéros dans $\mathbb{C}$.*

(2) Déterminer explicitement les zéros de f.

Exercice 4.10. *Utiliser le théorème des résidus pour calculer les intégrales suivantes sur les contours indiqués :*

1) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{2z-1}{z^4-1}\,dz$, ***2)*** $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{(z+1)^2}\,dz$, ***3)*** $\displaystyle\int_{|z|=1/2} \frac{\tan z}{z}\,dz$,

4) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2-3z}\,dz$, ***5)*** $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{e^{iz}}{z^3+1}\,dz$, ***6)*** $\displaystyle\int_{|z-3i|=3} \frac{1}{z^2+4z+13}\,dz$.

Exercice 4.11. *Calculer les intégrales trigonométriques suivantes :*

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta, \qquad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\sin\theta}\,d\theta, \qquad I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta,$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{10-6\cos\theta}\,d\theta, \qquad I_5 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta, \qquad I_6 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta}\,d\theta,$$

$$I_7 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+3\cos\theta}\,d\theta, \qquad I_8 = \int_0^{2\pi} \frac{3\sin\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta, \qquad I_9 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-3\cos\theta}\,d\theta.$$

Exercice 4.12. *Calculer les intégrales généralisées suivantes :*

1) $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx,$ ***2)*** $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x-1}{x^4+5x^2+4}\,dx,$

3) $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx,$ ***4)*** $I_4 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx,$

5) $I_5 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx,$ ***6)*** $I_6 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx,$

7) $I_7 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-6x+25}\,dx,$ ***8)*** $I_8 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+9)(x^2+1)}\,dx,$

9) $I_9 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2(x^4+1)}\,dx,$ ***10)*** $I_{10} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx.$

Exercice 4.13. *Calculer les intégrales suivantes :*

1) $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\,dx,$ ***2)*** $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5}\,dx,$

3) $I_3 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+4}\,dx,$ ***4)*** $I_4 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{(x^4+1)^2}\,dx,$

5) $I_5 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^6+1}\,dx,$ ***6)*** $I_6 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2-2x+2}\,dx,$

7) $I_7 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-6x+25}\,dx,$ ***8)*** $I_8 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{(x^2+9)(x^2+1)}\,dx,$

9) $I_9 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2\sin x}{(x^2+1)^2(x^4+1)}\,dx,$ ***10)*** $I_{10} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

Exercice 4.14. *Utiliser le théorème des résidus pour calculer les intégrales réelles suivantes :*

1) $A = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}},$ ***2)*** $B = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+2)(x+4)}\,dx,$

3) $C = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+4)},$ ***4)*** $D = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x+1}\,dx,$

5) $E = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+2x+2}\,dx,$ ***6)*** $F = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\,dx.$

Chapitre 5

Les fonctions harmonique

5.1 Définitions et Notations

Définition 5.1.1. *Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, et $P : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que P est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D (et on note $P \in \mathcal{C}^2(D)$) si :*
— *les dérivées partielles premières*

$$\frac{\partial P}{\partial x} \quad et \quad \frac{\partial P}{\partial y}$$

existent et sont continues sur D,
— *les dérivées partielles secondes*

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}$$

existent et sont continues sur D.
Dans ce cas, on dit que P est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, c'est-à-dire que toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 existent et sont continues sur D.

Définition 5.1.2. *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, et soit $P \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$. On dit que P est harmonique sur D si elle satisfait l'équation de Laplace suivante :*

$$\nabla^2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Notation 5.1.1. *L'expression*

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

est appelée le ***Laplacien*** *de la fonction P. Ainsi, une fonction P est harmonique si et seulement si $\Delta P = 0$.*

Exemple 5.1.1. *Démontrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :*
1) $P(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2$; $\quad x, y \in \mathbb{R}$.
2) $P(x, y) = e^x \cos(y) \quad x, y \in \mathbb{R}$.

Solution. *On a*

1) $P(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 2x \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 6x + 2. \end{cases} \quad et \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -6xy - 2y \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -6x - 2. \end{cases} \quad \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

2) $P(x,y) = e^x \cos(y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = e^x \cos(y) \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = e^x \cos(y). \end{cases} \quad et \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin(y) \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -e^x \cos(y). \end{cases} \quad \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Donc les deux fonctions sont harmoniques.

Remarque 5.1.1. *Soit* $f : D \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto f(z) = P(x,y) + iQ(x,y); \quad x, y \in \mathbb{R}$$

avec $P = Re(f)$ *et* $Q = Im(f)$.

f *est holomorphe sur* $D \Longrightarrow P$ *et* Q *sont des fonctions harmoniques.*

Démonstration. Soit $f = P + iQ$ une fonction holomorphe sur un domaine $D \subset \mathbb{C}$. Alors les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites dans D, à savoir :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Nous allons montrer que la partie réelle P est harmonique.

En dérivant la première équation par rapport à x et la deuxième par rapport à y, on obtient :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}.$$

Puisque les dérivées croisées sont égales (les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^2$), on a :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0,$$

ce qui montre que P est harmonique sur D.

De même, en dérivant les équations de Cauchy-Riemann de manière appropriée, on peut montrer que :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0,$$

ce qui prouve que la partie imaginaire Q est également harmonique.

□

Exemple 5.1.2. *Démontrer que La partie réelle et imaginaire P et Q de la fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,;\ f(z) = z^2$ sont des fonctions harmoniques.*

Solution. *On a*

1) $P(x,y) = x^2 - y^2$ *:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 2. \end{cases} \quad et \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2y \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -2. \end{cases} \quad \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

2) $Q(x,y) = 2xy$ *:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 2y \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \quad et \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0. \end{cases} \quad \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Donc les deux fonctions sont harmoniques.

5.2 Conjuguée harmonique

Remarque 5.2.1. *D'un autre coté si on a une fonction P harmonique sur partie de $\mathbb{R}^2$ donc on peut trouver une autre fonction harmonique s'appelle la* ***conjuguée harmonique*** *Q (à partir des conditions de Cauchy-Riemann) telle que :*

$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$$

est holomorphe sur $D \subset \mathbb{C}$.

Exemple 5.2.1. ***I)*** *Démontrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :*

1) $P(x,y) = 5x^2 - 5y^2 - 3y + 1\,; \quad x, y \in \mathbb{R}.$

2) $P(x,y) = -y^3 + 3x^2y + 7x + 1 \quad x, y \in \mathbb{R}.$

II) *Trouver la fonction Q pour que f soit holomorphe ; $f = P + iQ$.*

III) *Si $f(0,0) = 1 + 2i$, exprimer $f(z)$ en fonction de z.*

IV) *Calculer $f'(z)$ par deux méthodes.*

Solution. *On a*

I-1) $P(x,y) = 5x^2 - 5y^2 - 3y + 1$ *:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 10x \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 10. \end{cases} \quad et \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -10y - 3 \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -10. \end{cases} \quad \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

II-1) *Puisque f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ alors le couple (P,Q) vérifie les conditions de Cauchy-Riemann, c'est à dire :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \cdots\cdots (1) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

De l'équation (1) *on tire* $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 10x$*, d'où :*

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \int 10x \; dy \\ &= 10xy + C(x). \end{aligned}$$

D'une part d'autre part on a :
$(2) \Longrightarrow -10y - 3 = -\big[10y + C'(x)\big] \Longleftrightarrow -C'(x) = -3$
$\Longrightarrow C(x) = \displaystyle\int 3 \; dx = 3x + c \; ; \; c \in \mathbb{R}$. *Finalement :*

$$Q(x,y) = 10xy + 3x + c \; ; \; c \in \mathbb{R}.$$

III-1) *On a* $f(z) = f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y) \cdots\cdot(3)$ *telle que :*
$f(0,0) = 1{+}2i \Longrightarrow f(0,0) = P(0,0){+}iQ(0,0) \Longrightarrow 1{+}ic = 1{+}2i \Longrightarrow c = 2.$
En substituant ceci dans (3)*, on obtient :*

$$\begin{aligned} f(z) &= 5x^2 - 5y^2 - 3y + 1 + i(10xy + 3x + 2) \\ &= 5z^2 + 3iz + 1 + 2i. \end{aligned}$$

IV-1) *La dérivée de f :*

<u>*Méthode 01(directe)*</u> *:* $f'(z) = 10z + 3i$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

<u>*Méthode 02*</u> *: Puisque f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc :*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} \\ &= 10x + i(10y + 3) \\ &= 10z + 3i. \end{aligned}$$

I-2) $P(x,y) = -y^3 + 3x^2y + 7x + 1$ *:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 6xy + 7 \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 6y. \end{cases} \quad et \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -3y^2 + 3x^2 \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 6y. \end{cases} \quad \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

II-2) *Conjuguée harmonique Q :*
De l'équation (1) *on tire* $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 6xy + 7$, *d'où :*

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \int (6xy+7)\,dy \\ &= 3xy^2 + 7y + C(x). \end{aligned}$$

D'une part d'autre part on a :
$(2) \Longrightarrow -3y^2 + 3x^2 = -\left[3y^2 + C'(x)\right] \Longleftrightarrow -C'(x) = 3x^2$
$\Longrightarrow C(x) = -\displaystyle\int 3x^2\,dx = -x^3 + c\ ;\ c \in \mathbb{R}$. *Finalement :*

$$Q(x,y) = -x^3 + 3xy^2 + 7y + c\ ;\ c \in \mathbb{R}.$$

III-2) *On a* $f(z) = f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y) \cdots\cdot(3)$ *telle que :*
$f(0,0) = 1+2i \Longrightarrow f(0,0) = P(0,0)+iQ(0,0) \Longrightarrow 1+ic = 1+2i \Longrightarrow c = 2.$
En substituant ceci dans (3), *on obtient :*

$$\begin{aligned} f(z) &= -y^3 + 3x^2y + 7x + 1 + i(-x^3 + 3xy^2 + 7y + 2) \\ &= -iz^3 + 7z + 1 + 2i. \end{aligned}$$

IV-2) *La dérivée de f :*

Méthode 01(directe) : $f'(z) = -3iz^2 + 7,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Méthode 02 : *Puisque f est holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *donc :*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} \\ &= 6xy + 7 + i(-3x^2 + 3y^2) \\ &= -3iz^2 + 7. \end{aligned}$$

5.3 Exercices supplémentaires

Exercice 5.1. *Démontrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :*
1) $P(x,y) = 3x^2 - 3y^2 - 2xy - 2y + 5\ ;\quad x,y \in \mathbb{R}$.
2) $P(x,y) = e^{-2xy}\sin\left(x^2 + y^2\right)\quad x,y \in \mathbb{R}$.
3) $P(x,y) = 2x^3 - 3y^2x + 3x^2y - y^3\quad x,y \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.2. *Montrer que les fonctions données sont harmoniques et trouver la fonction analytique* $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ *la plus générale pour laquelle :*
1) $Q(x,y) = xy$

2) $Q(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$
3) $P(x,y) = 3x^2y - y^3$
4) $P(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$, *avec* $x^2 + y^2 \neq 0$.

Exercice 5.3. *Obtenir l'équation de Laplace en coordonnées polaires* (r, θ).

Exercice 5.4. *Déterminer les relations que doivent vérifier les constantes* a, b, c, d, e *pour que la fonction suivante soit harmonique :*

$$P(x,y) = ax^4 + bx^4y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^3.$$

Trouver ensuite une fonction analytique $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ *correspondante.*

Exercice 5.5. *Sous quelles conditions le polynôme suivant est-il harmonique ?*

$$P(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy + dy^3.$$

Exercice 5.6. ***I)*** *Démontrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :*
1) $P(x,y) = 3x^3 - 9xy^2 - 4xy + 3\,;\quad x, y \in \mathbb{R}$.
2) $P(x,y) = 2x^4 + 2y^4 - 12x^2y^2 - 2y + 3 \;\; x, y \in \mathbb{R}$.

II) *Trouver la fonction* Q *pour que* f *soit holomorphe ;* $f = P + iQ$.

III) *Si* $f(0,0) = 3 - i$, *exprimer* $f(z)$ *en fonction de* z.
IV) *Calculer* $f'(z)$ *par deux méthodes.*

Exercice 5.7. *Soit* $U = \Big\{ z \in \mathbb{C} / \quad -\pi < x < \pi, \quad y \in \mathbb{R} \Big\}$. *Si* $z \in U$ *posons*

$$P(x,y) = \frac{\sin x}{\cos x + \cosh y}.$$

• *Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe* f *vérifiant* $f(0) = 0$ *et* $P = Re(f)$.

Bibliographie

[1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1953.

[2] K. Allab, Éléments d'Analyse : fonction d'une variable réelle. *O.P.U*, 2002.

[3] A. Angot, Compléments de mathématiques. *Maisons Masson*, 1982.

[4] J. Arnaudiès, Séries entières, séries de Puiseux, séries de Fourier-Et compléments sur les fonctions presque-périodiques, 2e cycle universitaire, agrégations de mathématiques. *Ellipses Marketing*, 1999.

[5] S. Balac, L. Chupin, Analyse et algèbre : Cours de mathématiques de deuxième année avec exercices corrigés et illustrations avec Maple. *PPUR presses polytechniques*, 2008.

[6] A. F. Beardon, *Complex Analysis*, Wiley, 1979.

[7] H. Catan, *Théorie Élémentaire des Fonctions Analytiques d'une ou Plusieurs Variables Complexes*, Hermann, Paris, 1985.

[8] R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill, 1960.

[9] P. Dyke, An introduction to Laplace transforms and Fourier series. *Springer*, 2014.

[10] M. El-Amrani, Suites et séries numériques, Suites et séries de fonctions. *Ellipses*, 2011.

[11] D. Fredon, M. Bridier, Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur. *Dunod*, 2003.

[12] S. Guerre-Delabrière, Suites, séries, intégrales : Cours et exercices corrigés niveau L2. *Ellipses*, 2009.

[13] G. J. O. Jameson, *A First Course in Complex Analysis*, Chapman and Hall, 1970.

[14] J. Kuntzmann, *Variable Complexe*, Hermann, Paris, 1967. Manuel de premier cycle.

[15] B. Malgrange, Équations Différentielles Linéaires et Transformation de Fourier : Une Introduction . *Sociedade Brasileira de Mathematica*, 1989.

[16] J. P .Marco, P. Thieullen, J. A. Weil, Mathématiques L2 : Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés. *Pearson*, 2007.

[17] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, History of Mathematics web site, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/.

[18] N. Piskounov, Calcul différentiel et intégral, Tome 1 et 2. *Éditions Mir, Moscou 1980 ou Édition Ellipses*, 1993.

[19] W. Rudin, *Analyse Réelle et Complexe*, Masson, Manuel de deuxième cycle, Paris, 1975.

[20] M. R. Spiegel, *Variables Complexes : Cours et Problèmes*, Série Schaum, vol. 12, New York, 1973.