



UNIVERSITÉ IBN-KHALDOUN DE TIARET
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE



Méthodes Numériques Approfondies

Polycopié de cours avec exercices

Dr. Aboshighiba Hicham
2021 - 2022

Méthodes Numériques Approfondies

Polycopié de cours avec exercices- Génie Mécanique - Énergétique

Dr. Aboshighiba Hicham

2021 - 2022

Sommaire

1	Equations du premier ordre	2
1.1	Introduction	2
1.2	Série de Taylor	3
1.2.1	Développement en série de Taylor	3
1.2.2	Exemple :	4
1.3	Approximation des dérivées du premier ordre	4
1.3.1	Notations :	6
1.4	Approximation des dérivées du deuxième ordre	6
1.4.1	Notation indicielle	7
1.5	Méthode d'Euler	7
1.5.1	Exemple de démonstration :	8
1.5.2	Solution :	8
1.6	Méthodes de Runge-Kutta	10
1.7	Systèmes d'EDO	12
1.7.1	Systèmes homogènes	12
1.7.2	Systèmes non homogènes	12
1.8	Méthodes à pas multiples	13
1.8.1	Méthodes avec pas constant	13
1.8.2	Quelques méthodes à pas multiple	13
1.8.3	Méthodes d'Adams-Bashforth	14
1.8.4	Méthodes d'Adams-Moulton	14
1.9	Méthode de prédiction-correction	14
1.10	Équation de la couche limite laminaire	15
1.11	Exercices :	16
1.11.1	Exercice 1 :	16
1.11.2	Exercice 2 :	16
2	Méthodes des différences finies	17
2.1	Le principe de la méthode	17
2.2	Procédure	17
2.2.1	La discrétisation :	18
2.2.2	L'approximation :	18
2.2.3	L'application de l'approximation :	18
2.2.4	L'application des conditions aux limites :	18
2.2.5	Résoudre le système d'équations algébriques linéaires	19
2.2.6	Poste traitement :	19
2.3	Classification des équations aux dérivées partielles :	20
2.4	Classification des conditions aux limites :	21
2.5	Résolution d'un problème de conduction en 2D stationnaire	21
2.5.1	La discrétisation :	22

2.5.2	L'approximation	22
2.5.3	L'application de l'approximation	22
2.5.4	L'application des conditions aux limites	23
2.5.5	Poste traitement	24
2.6	Exercices :	25
3	Equations paraboliques	26
3.1	Equations paraboliques	26
3.1.1	Le Schéma Explicite	26
3.1.2	Schéma implicite	27
3.1.3	Schéma Crank-Nicholson	28
3.1.4	ADI de Peaceman-Racheford	28
3.2	Exercice	29
4	Equations hyperboliques	30
4.1	Introduction	30
4.1.1	L'équation d'advection	30
4.2	Méthode des caractéristiques	31
4.3	Equation de Burger	31
4.3.1	Schema de Lax-Friedrichs	32
4.3.2	Schema de Saute-Mouton	32
4.3.3	Schema de Lax-Wendroff	32
4.3.4	Schema d'Engquist-Osher	33
4.3.5	Schema de Godunov	34
4.3.6	Schemas de Lerat-Peyret	34
4.4	Ondes sonores	34
4.4.1	Le schéma theta	36
4.4.2	Schéma de Lax	36
4.4.3	Schéma Saute-Mouton	36
4.4.4	Schéma de Lax-Wendroff	36
5	Méthode des Volumes Finis	37
5.1	Avantages et inconvénients vis-à-vis des différences finies	37
5.2	Application à la MDF	37
5.3	La convection	38
5.3.1	Algorithme SIMPLE	38
5.3.2	Algorithme SIMPLER	39
5.3.3	Algorithme SIMPLEQ	39
5.3.4	Algorithme PISO	39
5.3.5	Algorithme QUICK	39
5.3.6	Algorithme TEAMKE pour le turbulent	39
5.4	Comment choisir ?	40
5.5	Exercice	40
A	Solution des exercices proposés	41
A.1	Chapitre 1	41
A.1.1	Exercice 1.1 :	41
A.1.2	Exercice 1.2.a :	41
A.1.3	Exercice 1.2.b :	42
A.1.4	Exercice 1.2.c :	42
A.2	Chapitre 2	42

A.2.1	Exercice 2.1 :	42
A.2.2	Exercice 2.2 :	43
A.2.3	Exercice 2.3 :	45
A.3	Chapitre 3	46
A.3.1	Exercice 3.1 :	46
A.4	Chapitre 5	47
A.4.1	Exercice 5.1 :	47

Avant Propos

Le contenu de ce cours intitulé « **Méthodes Numériques Approfondies** » est compatible avec le programme harmonisé de 2016 - 2017 de 1ère année Master Énergétique (Génie Mécanique).

Bien que le cours soit destiné aux étudiants de cette spécialité, il peut aussi être utile pour tous les scientifiques confrontés à des problèmes conduisant à la résolution des équations aux dérivées partielles n'ayant pas de solutions analytiques connues.

Le cours est accompagné de quelques exemples résolus d'une manière typique, et d'autres exercices à la fin des chapitres. Les solutions des exercices proposés sont incluses dans la section **Annexes** à la fin du polycopié.

Ce document pédagogique est divisé en cinq chapitres. Plusieurs points sont déjà abordé en tronc-commun ST dans la matière méthodes numériques (ou ce qui était appelé dans l'ancienne nomenclature "Analyse Numériques") comme par exemple : les séries de Taylor, la méthode d'Euler et la méthode de Runge-Kutta. Aussi, une matière entièrement dédiée à la méthode des volumes finis est traitée en détail durant tout le semestre S2. Pour cela, ces points seront traités moins en détails par rapport au autres

Pour une meilleure présentation le polycopié est rédigé en utilisant LaTeX, les schémas par le logiciel Visio et les programmes et leurs figures associées par Matlab.

Introduction

Une équation différentielle est une équation qui fait intervenir une fonction inconnue et ses dérivées. Donc elle exprime les relations qui lient les variations des différentes grandeurs physiques dans un phénomène donné. Pour cela, elles sont très importantes pour la physique, la mécanique en particulier. Mais elles sont aussi, souvent, impossible à résoudre analytiquement. La solution pour contourner ce problème est d'utiliser les méthodes numériques pour obtenir des solutions approchées pratiques. Ceci est l'objectif de ce cours.

Le cours est organisé en cinq chapitres. Pour introduire l'étudiant progressivement au sujet du cours le premier chapitre traite la résolution des équations différentielles ordinaires du 1er ordre ou les EDO. Les points mentionnés dans le canevas harmonisé de 2016-2017 à propos de ce chapitre sont déjà traités en tronc-commun ST dans la matière méthodes numériques (ou ce qui était appelé dans l'ancienne nomenclature "Analyse Numériques") comme par exemple : les séries de Taylor, la méthode d'Euler et la méthode de Runge-Kutta. La base principale des méthodes numériques traitées dans les chapitres suivants étant les séries de Taylor et le principe de la méthode d'Euler, ces deux points ont été traités plus en détails avec une série d'exercices résolus à la fin.

Dans le deuxième chapitre la méthode des différences finies est introduite, pour la résolution des équations aux dérivées partielles EDP. Le premier type d'équation traité sont les équations elliptiques.

Ensuite, les équations paraboliques et les équations hyperboliques sont abordées dans les deux chapitres suivants. Les équations paraboliques sont rencontrées en énergétique notamment lorsqu'on traite des problèmes de transfert thermique instationnaires. Les équations hyperboliques surgissent dans les problèmes ayant un caractère ondulatoire comme l'aéro-acoustique. Le problème de stabilité qui apparaît lors du traitement de ces deux types d'équations est aussi analysé.

Le dernier chapitre est consacré à l'introduction de la Méthode des volumes finis qui est comparée à celle des différences finies pour le traitement des géométries compliquées et les problèmes de convection. Le chapitre est purement descriptif vu qu'une matière entièrement dédiée à la méthode des volumes finis est traitée en détail durant tout le semestre S2.

Chapitre 1

Equations du premier ordre

Dans ce chapitre consacré au traitement des équations différentielles ordinaires du premier ordre, nous allons d'abord introduire les notions de base comme les équations différentielles et les séries de Taylor. Ensuite, on parlera des méthodes numériques les plus connues pour les résoudre, à savoir la méthode d'Euler et celle de Runge-Kutta.

1.1 Introduction

Une équation différentielle est une équation qui fait intervenir une fonction inconnue et ses dérivées. Donc elle exprime les différentes relations qui lient **les variations** des différentes grandeurs physique dans un phénomène donné. Elle peut être totale si la fonction est à une variable, ou partielle si la fonction est à plusieurs variables. Le nombre des dimensions de l'équation différentielle partielle est le nombre des variables indépendantes (entre elles) dont elle dépend. L'ordre de l'équation différentielle est le degré le plus grand des dérivées qu'elles la composent.

L'intérêt de leur étude est primordiale car elles régissent tous les phénomènes physiques. Cependant, leur résolution est généralement difficile.

Les équations différentielles peuvent être linéaires ou non linéaires. La classification des équations différentielles en linéaire et non-linéaire est importantes vu qu'il est nettement plus difficile de résoudre les équations non- linéaire analytiquement et qu'il faut faire attention lors de leur traitement numérique aux problèmes de stabilité et de la sélection des conditions aux limites.

~~On simplifie~~ ; si on arrive à écrire l'équation sous cette forme :

$$b(x) + a_0(x)f(x) + a_1(x)f'(x) + a_2(x)f''(x) + \dots + a_n(x)f^{(n)}(x) = 0 \quad (1.1)$$

qui ressemble à un polynôme où $b(x)$ et les $a_i(x)$ sont des fonctions continues de x et les $f^{(n)}(x)$ sont les dérivées successives de la fonction f par rapport à x . Il faut noter que toutes les puissances de f sont égales à 1 et que la dérivée de la fonction n'est pas composée avec une autre fonction. Ceci signifie que ces équations sont linéaires :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T(x)}{dx^2} &= 0 \\ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 2 \frac{df(x)}{dx} + f(x) &= 0 \\ \frac{du(t)}{dt} - \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \cos(t) &= 0 \\ u' - u'' e^x &= 0 \end{aligned}$$

Et que celles là ne le sont pas :

$$\begin{array}{ll} y(x) \frac{dy(x)}{dx} - x = 0 & \text{à cause du produit de la fonction avec sa dérivée} \\ f'' + 2f' + \sin(f) = 0 & \text{à cause de la composition avec la fonction sinus} \\ u' - u'' + u^2 = 0 & \text{à cause de la puissance} \\ \sqrt{f} + \dot{f} = e^x & \text{à cause de la racine qui est la puissance de } 1/2 \text{ donc} \end{array}$$

Dans le traitement numérique des équations différentielles, on distingue les méthodes à pas séparés (ou à un seul pas) qui permettent de calculer y_{n+1} à partir de la seule connaissance de y_n et les méthodes à pas liés (ou à pas multiples) qui nécessitent la connaissance de $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n+1}$ pour calculer y_{n+1} . Les méthodes numériques de résolution (dites à différences finies) sont fondées sur le développement de Taylor.

1.2 Série de Taylor

L'idée de développer une fonction analytique en une série polynomiale infinie remonte au 4eme siècle avant JC (490-430 AJ). Zénon d'Elée le philosophe grecque (présocratique) rêvait de ça sans pouvoir le réaliser. Beaucoup de travaux sur ça se sont poursuivis menés par les Indiens (Asie) et les Chinois. Mais ce n'est qu'après la publication des travaux de Brook Taylor (1685-1731) que le rêve s'est réalisé. En 1715 Taylor a publié sa formule générale pour l'obtention de la sommation.

L'intérêt du développement est de transformer toute fonction continue et différentiable même non linéaire en une série polynomiale.

1.2.1 Développement en série de Taylor

Soit la fonction $f(x)$ infiniment différentiable (c'est à dire qu'on peut dériver à l'infinie) de la variable réelle (ou complexe) x .

Si la fonction est définie au voisinage d'un point x_0 , son développement en série de Taylor est donné en ce voisinage par l'expression :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0 + \Delta x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \Delta x + f''(x_0) \frac{\Delta x^2}{2} + f'''(x_0) \frac{\Delta x^3}{3!} + \\ &\quad + f^{(4)}(x_0) \frac{\Delta x^4}{4!} + \dots \end{aligned} \tag{1.2}$$

Qui peut être écrite aussi :

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(x_0) \frac{(\Delta x)^i}{i!} \tag{1.3}$$

Où $f^{(i)}(x_0)$ est la i^{eme} dérivée de la fonction $f(x)$ évaluée au point x_0 , et $i!$ la factorielle de i c'est-à-dire : $i! = i \times (i-1) \times (i-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

Il faut noter que la série n'est pas une approximation mais une transformation exacte à condition de prendre tous les termes jusqu'à l'infinie.

Remarque :

si $x_0 = 0$ alors la série est appelée Série de Maclaurin

1.2.2 Exemple :

On va trouver le développement de la fonction e^x au voisinage de zéro $x_0 = 0$

$$x_0 = 0 \Rightarrow f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, f'''(x) = e^x, \dots, f^{(i)}(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, f'''(0) = 1, \dots, f^{(i)}(0) = 1$$

D'après l'équation précédant

$$e^x = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + f''(x_0)\frac{\Delta x^2}{2} + f'''(x_0)\frac{\Delta x^3}{3!} + f^{(4)}(x_0)\frac{\Delta x^4}{4!} + \dots$$

$$e^x = x^0 + x^1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Puisque l'évaluation numérique d'une sommation à l'infinie est impossible, on va se limiter à un nombre de terme raisonnable puis on va tester la précision de chaque approximation :

$$\begin{aligned} i=0 &\rightarrow f_1(x) \approx 1 \\ i=1 &\rightarrow f_2(x) \approx 1+x \\ i=2 &\rightarrow f_3(x) \approx 1+x+\frac{1}{2}x^2 \\ &\vdots \\ i=4 &\rightarrow f_5(x) \approx 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4 \end{aligned}$$

On remarque sur la figure 1.3 que toutes les approximations passent par le point $p(0,1)$ qui représente $p(x_0, f(x_0))$.

On remarque aussi que plus on s'éloigne de $x_0 = 0$ plus l'écart entre les approximations et la fonction e^x augmente. Aussi, plus le degré de l'approximation est grand (i) moins l'écart est grand.

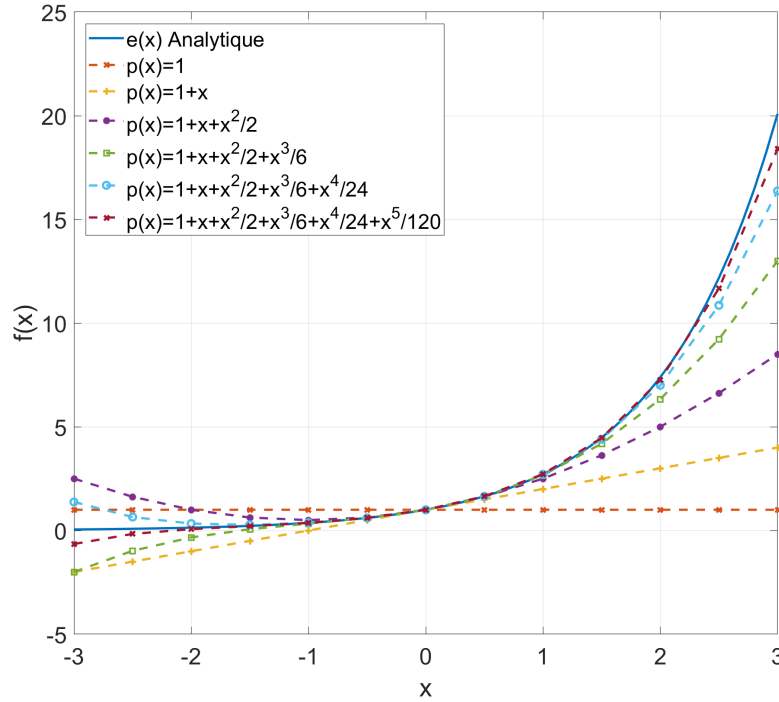
1.3 Approximation des dérivées du premier ordre

Nous avons vu que la fonction $f(x)$ qui est infiniment différentiable au voisinage d'un point x_0 , peut être approximée en ce voisinage par le développement en série de Taylor :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0 + \Delta x) \\ &= f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x + \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{\Delta x^2}{2} + \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x=x_0} \frac{\Delta x^3}{3!} + \\ &\quad + \left. \frac{d^4f}{dx^4} \right|_{x=x_0} \frac{\Delta x^4}{4!} + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

En adoptant l'approximation d'ordre 1 on peut écrire :

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x \quad (1.5)$$


 FIGURE 1.1 – Comparaison des différentes approximations de la fonction : e^x

Cette équation peut être transformée :

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1.6)$$

Si x est infiniment proche de x_0 (càd $\Delta x \rightarrow 0$) ceci donne la définition même de la dérivée. Cette approximation de la dérivée a été obtenue en considérant un point x plus grand que x_0 (ou à droite de x_0).

Une autre approximation peut être obtenue en considérant un point x à gauche de x_0 en remplaçant Δx par $-\Delta x$ dans le développement en série de Taylor :

$$\begin{aligned} f_-(x) &= f(x_0 - \Delta x) \\ &= f(x_0) - \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x + \frac{d^2 f}{dx^2} \bigg|_{x=x_0} \frac{\Delta x^2}{2} - \frac{d^3 f}{dx^3} \bigg|_{x=x_0} \frac{\Delta x^3}{3!} + \\ &\quad + \frac{d^4 f}{dx^4} \bigg|_{x=x_0} \frac{\Delta x^4}{4!} - \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

En adoptant l'approximation d'ordre 1 on peut écrire :

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (1.8)$$

La première approximation est appelée **l'approximation ascendante** de la dérivée, quant à la deuxième elle est appelée **l'approximation descendante**.

Une troisième approximation peut être obtenue en considérant la soustraction de l'équation 1.7 de l'équation 1.4 :

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x) = 0 + 2 \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x + 0 + 2 \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x=x_0} \frac{\Delta x^3}{3!} + 0 + \dots \quad (1.9)$$

En adoptant l'approximation d'ordre 2 on peut écrire :

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x) = 2 \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x \quad (1.10)$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (1.11)$$

Cette dernière approximation (d'ordre 2 donc plus précise) est appelée **l'approximation centrée** de la dérivée.

1.3.1 Notations :

Dans certains ouvrages les 3 approximations sont notées comme suit :

- * L'approximation ascendante : $f'_+(x_0)$ ou $D_+ f(x_0)$
- * L'approximation descendante : $f'_-(x_0)$ ou $D_- f(x_0)$
- * L'approximation centrée : $f'_0(x_0)$ ou $D_0 f(x_0)$

1.4 Approximation des dérivées du deuxième ordre

Nous avons vu que l'approximation de la dérivée de la fonction $f(x)$ infiniment différentiable à gauche d'un voisinage x_0 peut être écrite par le schéma ascendant comme :

$$f'_+ \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1.12)$$

En utilisant cette expression nous pouvons trouver l'approximation ascendante de la deuxième dérivée (dérivée d'ordre 2) par :

$$f''_+(x_0) = (f'_+)'_+(x_0) \approx \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)'_+ \quad (1.13)$$

$$f''_+(x_0) \approx \frac{1}{\Delta x} \left[(f(x_0 + \Delta x))'_+ - (f(x_0))'_+ \right] \quad (1.14)$$

$$f''_+(x_0) \approx \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right] \quad (1.15)$$

$$f''_+(x_0) \approx \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - 2f(x_0 + \Delta x) + f(x_0)}{\Delta x^2} \quad (1.16)$$

En utilisant le schéma descendant on trouve :

$$f''_-(x_0) = (f'_-)'_-(x_0) \approx \left(\frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \right)'_- \quad (1.17)$$

$$f''_-(x_0) \approx \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0 - 2\Delta x)}{\Delta x} \right] \quad (1.18)$$

$$f''_-(x_0) \approx \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - 2f(x_0 - \Delta x) + f(x_0)}{\Delta x^2} \quad (1.19)$$

Pour le schéma centré on a :

$$f''_0(x_0) = (f'_0)'_0(x_0) \approx \left(\frac{f'_+(x_0) - f'_-(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \right) \quad (1.20)$$

$$f''_0(x_0) \approx \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \right] \quad (1.21)$$

$$f''_0(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (1.22)$$

1.4.1 Notation indicielle

On considérant une subdivision de l'intervalle $[x_a, x_b]$ en n segment de longueurs Δx_i : $\Delta x_1 = [x_1, x_2]$, $\Delta x_2 = [x_2, x_3]$, ..., $\Delta x_n = [x_n, x_{n+1}]$.

Souvent on considère des pas Δx_i égaux, ce qui permet d'écrire :

$$x_a = x_1, x_2 = x_1 + \Delta x, x_3 = x_2 + \Delta x, \dots, x_{n+1} = x_n + \Delta x,$$

Et :

$$f(x_1) = f_1, f(x_2) = f(x_1 + \Delta x) = f_2, \dots, f(x_{n+1}) = f(x_n + \Delta x) = f_{n+1}$$

Par conséquent les approximations des dérivées peuvent être écrites :

L'ordre de la dérivé	Ascendant	Descendant	Centré
f'_i	$\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$	$\frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$	$\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$
f''_i	$\frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{\Delta x^2}$	$\frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{\Delta x^2}$	$\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}$

1.5 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est une méthode à pas séparé du premier ordre. Elle consiste à remplacer la dérivé par un schéma d'approximation.

La résolution du problème :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.23)$$

conduit au schéma

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \end{cases} \quad (1.24)$$

Cette méthode du premier ordre est convergente, car l'erreur de consistance vaut :

$$|y(x_i) - y_i| = \frac{1}{2}h^2 f'(c, y_i) \quad (1.25)$$

avec $c \in [x_{i-1}, x_i]$

Mais le schéma explicite est souvent instable. Par exemple, si la fonction f est $f(x, y) = -ay$ avec $a > 0$, la méthode d'Euler donne :

$$y_{i+1} = y_i - ahy_i = (1 - ah)y_i \quad (1.26)$$

le schéma est instable dès que $h > 2/a$. En pratique, la méthode d'Euler n'est pas utilisée, car elle n'offre pas une précision suffisante.

1.5.1 Exemple de démonstration :

Parce que la méthode d'Euler est la base principale de la méthode des différences finies, on va l'exposer plus en détails par cette exemple :

Résoudre par la méthode d'Euler le problème régi par :

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} + f^2 = 0 & x \in [0, 1] \\ f(0) = 1 & x = 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

1.5.2 Solution :

L'idée de la méthode d'Euler est de subdiviser l'intervalle $[0, 1]$ en une série de segments finis. La fonction est représentée sur les nœuds et sa dérivée approximée entre ces nœuds :

Le remplacement de la fonction continue par sa valeur nodale donne :

$$f^2 = f_i^2$$

L'approximation de la dérivée par le schéma ascendant donne :

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

Δx : étant la distance qui sépare deux points (nœuds) successifs.

L'équation différentielle devient :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} &\approx -f_i^2 \\ \Rightarrow f_{i+1} &\approx f_i - \Delta x f_i^2 \end{aligned} \quad (1.28)$$

La première valeur de la fonction recherchée étant connue : $f_1 = f(0) = 1$. on peut calculer la valeur suivante par le schéma donné par l'équation 1.27 tel que :

$$\Rightarrow f_2 \approx f_1 - \Delta x f_1^2$$

Une fois la nouvelle valeur f_2 calculée, on procède à la suivante c.à.d f_3 :

$$\Rightarrow f_3 \approx f_2 - \Delta x f_2^2$$

et ainsi de suite jusqu'à la dernière valeur f_n . Si on prend $\Delta x = 0.2$ ce qui donne un nombre de nœuds égal à $n = 6$ On peut comparer le résultat obtenu avec la solution analytique donnée par :

$$f^{exacte}(x) = 1/(1+x) \quad (1.29)$$

i	x_i	f_i^{exacte}	f_i^{Euler}
1	0	1	1.0000
2	0.2	0.8333	0.8000
3	0.4	0.7143	0.6720
4	0.6	0.6250	0.5817
5	0.8	0.5556	0.5140
6	1	0.5000	0.4612

TABLE 1.1 – Comparaison entre la solution analytique et celle d'Euler

```
% nettoyage
clear
clc

%% initiation des vecteurs
DX=0.2;
X=0:DX:1;
Fexact=1./(1+X);
N=length(X);
Fnum=zeros(1,N);

%% Debut des calculs
Fnum(1)=1; % premiere valeur c'est une donnée

%% boucle des calculs
for i=2:N
    Fnum(i)=Fnum(i-1)-DX*Fnum(i-1).^2;
end

%% Calcul de l'erreur
V_Erreur=abs(Fexact-Fnum)*100./Fexact;
Erreur_Moyenne=mean(V_Erreur)

%% Graphiques
plot(X,Fexact,'b*-','MarkerSize',12,'LineWidth',2.4)
hold on
plot(X,Fnum,'rd-','MarkerSize',12,'LineWidth',2.4)
    xlabel('X')
    ylabel('f(x)')
    set(gca,'FontSize',20)
    legend('Solution Exacte','Solution Numérique')
    grid on
```

FIGURE 1.2 – Script Matlab de l'exercice de démonstration méthode d'Euler

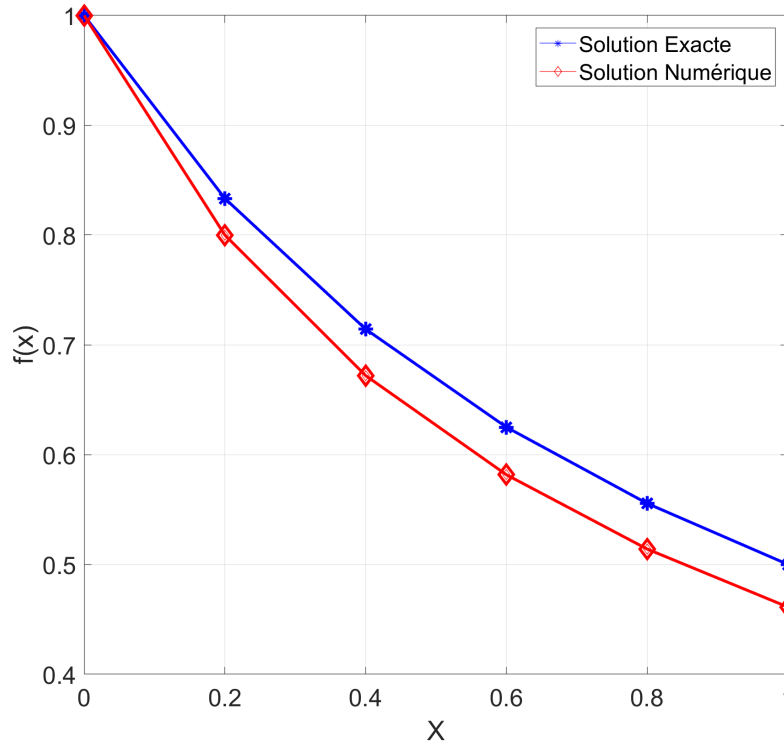


FIGURE 1.3 – Comparaison entre la solution analytique et celle d'Euler

1.6 Méthodes de Runge-Kutta

Carl Runge et Martin Kutta ont proposé en 1895 de résoudre le problème :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.30)$$

en introduisant un schéma numérique de la forme

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h_i \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot \Phi(x_i, y_i, h_i) \end{cases} \quad (1.31)$$

où la fonction d'incrémentation Φ est une approximation de $f(x, y)$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Supposons r un entier, A une matrice dont les éléments au-dessus de la diagonale sont nuls et $b = (b_1, \dots, b_r)$ un vecteur, l'algorithme de Runge-Kutta est donné par :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot (b_1 k_1 + \dots + b_r k_r) \\ x_{i+1} = x_i + h \\ k_j = f(x_i + c_j h, y_i + h(a_{j1} k_1 + \dots + a_{jr} k_r)) \end{cases} \quad (1.32)$$

Le vecteur b vérifie $b_1 + \dots + b_r = 1$. Les coefficients c_i sont les sommes des éléments d'une ligne de la matrice A . Les éléments supérieurs de A sont nuls $a_{ij} = 0$ si $j \geq i$.

Le pas h peut facilement varier (h_i). Une méthode de Runge-Kutta est entièrement déterminée par la donnée de l'entier r , du vecteur b et de la matrice A .

Méthodes d'ordre 1

Pour $b = 1$ et $a_{11} = 0$, l'algorithme $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$ se réduit à la méthode d'Euler.

Méthodes d'ordre 2

Pour déterminer toutes les méthodes d'ordre 2, cherchons une fonction Φ de la forme

$$\Phi = b_1 k_1 + b_2 k_2 \quad (1.33)$$

où les coefficients k_1 et k_2 sont donnés par

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + ch, y_i + ahk_1) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Développons y_{i+1} au voisinage du point (x_i, y_i) ,

$$y_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + f(x_i, y(x_i)) \right) \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)) \quad (1.35)$$

De même, développons k_2 au voisinage de (x_i, y_i)

$$y_{i+1} = y_i + hb_1 k_1 + hb_2 \left(f(x_i, y_i) + hc \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + ahf(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) \right) + O(h^2) \quad (1.36)$$

En identifiant les deux expressions, il vient :

$$\begin{cases} y(x_i) = y_i \\ f(x_i, y_i) = (b_1 + b_2) f(x_i, y_i) \\ \frac{1}{2} f'_x + \frac{1}{2} f'_y f = b_2 (cf'_x + af'_y f) \end{cases} \quad (1.37)$$

On en déduit que $b_1 + b_2 = 1$ et $b_2 c = b_2 a = 1/2$. Soit en posant $b_2 = \theta$ et $b_1 = 1 - \theta$ et $c = a = 1/2$, on retrouve les trois cas standards. La méthode d'Euler s'obtient pour $\theta = 0$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (1.38)$$

La méthode de Heun (ou d'Euler-Cauchy) est obtenue pour $\theta = 1/2$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(k_1 + k_2)/2 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1) \end{cases} \quad (1.39)$$

La méthode de Runge-Kutta (proprement dite) est obtenue pour $\theta = 1$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hk_2 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1) \end{cases} \quad (1.40)$$

Plusieurs méthodes de Runge-Kutta d'ordre supérieur (jusqu'à 8) ont été développées par la suite.

1.7 Systèmes d'EDO

Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{i,j} : I \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$ et $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues.

L'objectif est de trouver des fonctions : $x_1, \dots, x_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, n fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \quad (1.41)$$

On peut écrire ce système sous la forme matricielle

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t) \quad (1.42)$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \text{ et } F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

En général il peut y avoir une infinité de solutions de cette équation. Soient $t_0 \in I$ et $X^0 \in \mathbb{R}^n$ données, avec

$$X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ \vdots \\ x_n^0(t) \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

Le but est de trouver X solution de l'équation 1.42 satisfaisant la condition initiale 1.44. Autrement dit, existe-t-il X fonction dérivable définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + F(t) \\ X(t_0) = X^0 \end{cases} \quad (1.45)$$

pour tout $t \in I$

1.7.1 Systèmes homogènes

Le système 1.41 est dit homogène si $F \equiv 0$, c'est à dire

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (1.46)$$

et nous avons l'existence et l'unicité des solutions de ce système.

1.7.2 Systèmes non homogènes

Revenons au système non homogène 1.41 avec F non nulle. Soient $X^1, \dots, X^n$ un ensemble de solutions du problème homogène et X_p une solution particulière 1.41. Alors toute solution X de 1.41 est de la forme

$$X(t) = X_p + \sum_{i=1}^n c_i X^i(t) \quad (1.47)$$

avec $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

1.8 Méthodes à pas multiples

On s'intéresse à la résolution numérique du problème relatif à une équation différentielle :

$$y' = f(t, y), \quad (t, y) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}.$$

Si $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une subdivision de $[t_0, t_0 + T]$ de pas successifs $h_n = t_{n+1} - t_n$, on appelle méthode numérique à $r + 1$ pas toute méthode numérique de la forme

$$y_{n+1} = \Psi(t_n, y_n, h_n; \dots; t_{n-r}, y_{n-r}, h_{n-r}) \quad (1.48)$$

L'intérêt de ces méthodes est qu'on peut obtenir un ordre élevé pour une complexité de calcul inférieure à celle des méthodes de Runge-Kutta. Cependant, il faut s'assurer que la stabilité numérique reste suffisamment bonne.

1.8.1 Méthodes avec pas constant

On suppose ici que le pas $h_n = h$ est constant. On s'intéresse aux méthodes à $r + 1$ pas permettant un calcul récurrent des points (t_n, y_n) et des pentes $f_n = f(t_n, y_n)$ sous la forme

$$(M) \begin{cases} y_{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq r} \alpha_i y_{n-i} + h \sum_{0 \leq i \leq r} \beta_i f_{n-i} \\ t_{n+1} = t_n + h \\ f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases} \quad (1.49)$$

où les $\alpha_i, \beta_i, 0 \leq i \leq r$ sont des constantes réelles.

Démarrage de l'algorithme :

Le point initial (t_0, y_0) étant donné, l'algorithme ne peut démarrer que si les valeurs : $(y_1, f_1), \dots, (y_r, f_r)$ ont déjà été calculées.

Ce calcul ne peut être fait que par une méthode à un pas pour (y_1, f_1) , au plus 2 pas pour $(y_2, f_2), \dots$ au plus r pas pour (y_r, f_r) .

L'initialisation des r premières valeurs $(y_i, f_i), 1 \leq i \leq r$, sera généralement faite à l'aide d'une méthode de Runge Kutta d'ordre supérieur ou égal à celui de la méthode.

1.8.2 Quelques méthodes à pas multiple

Méthode de Nyström : C'est la méthode à 2 pas définie par

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf_n, \quad n \geq 1 \quad (1.50)$$

On a ici $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \beta_0 = 2, \beta_1 = 0$. Le principe de cette méthode est analogue à celui de la méthode du point milieu.

Méthode de Milne : C'est la méthode à 4 pas définie par

$$y_{n+1} = y_{n-3} + h \left(\frac{8}{3}f_n - \frac{4}{3}f_{n-1} + \frac{8}{3}f_{n-2} \right) \quad (1.51)$$

On vérifie qu'elle est stable, d'ordre 4, mais comme pour la méthode de Nyström la stabilité n'est pas très bonne à cause des racines de module 1 du polynôme caractéristique $\lambda^4 - 1 = 0$

1.8.3 Méthodes d'Adams-Bashforth

L'algorithme de la méthode d'Adams-Bashforth à $r + 1$ pas (en abrégé AB_{r+1}) va donc s'écrire :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r} f_{n-i}, & n \geq r \\ t_{n+1} = t_n + h_n \\ f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases} \quad (1.52)$$

L'intérêt de cette méthode provient de sa relative simplicité et du fait qu'une seule évaluation de la fonction f est nécessaire à chaque étape (contrairement aux méthodes de Runge-Kutta qui en réclamaient plusieurs).

1.8.4 Méthodes d'Adams-Moulton

L'idée est la même que celle des méthodes d'Adams-Bashforth, mais on approxime ici $f(t, z(t))$ par son polynôme d'interpolation aux points $t_{n+1}, t_n, \dots, t_{n-r}$; le point t_{n+1} est donc pris en plus.

On considère le polynôme $p_{n,r}^*(t)$ de degré $r + 1$ qui interpole les points (t_{n-i}, f_{n-i}) pour $-1 \leq i \leq r$:

$$\begin{aligned} p_{n,r}^*(t) &= \sum_{-1 \leq i \leq r} f_{n-i} L_{n,i,r}^*(t) \\ L_{n,i,r}^*(t) &= \prod_{-1 \leq j \leq r, j \neq i} \frac{t - t_{n,j}}{t - t_{n,i}} \end{aligned} \quad (1.53)$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} z(t_{n+1}) &\simeq z(t_n) + h_n \sum_{-1 \leq i \leq r} b_{n,i,r}^* f_{n-i} \\ b_{n,i,r}^* &= \frac{1}{h_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_{n,i,r}^*(t) dt. \end{aligned}$$

L'algorithme correspondant AM_{r+1} s'écrit

$$y_{n+1} - h_n b_{n,-1,r}^* f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h_n \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r}^* f_{n-i} \quad (1.54)$$

y_{n+1} n'est pas donné explicitement en fonction des quantités y_n, f_{n-i} antérieurement calculées, mais seulement comme solution d'une équation dont la résolution n'est pas a priori immédiate. Pour cette raison, on dit que la méthode d'Adams-Moulton est une méthode implicite (la méthode d'Adams-Bashforth est dite par opposition explicite). Pour résoudre l'équation ci-dessus, on aura recours en général à une méthode itérative.

1.9 Méthode de prédiction-correction

Dans les méthodes de prédiction-correction, un prédicteur Φ_1 fournit une première valeur approchée $\tilde{y}_{i+1}$ de y_{i+1} à partir de la connaissance de $y_{i-r}, \dots, y_i, f_{i-r}, \dots, f_i$. Cette

valeur approchée est utilisée pour évaluer une approximation $\tilde{f}_{i+1}$ de $f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$. Une nouvelle formule de y_{i+1} donne une valeur corrigée en utilisant la valeur approchée précédemment calculée de $\tilde{f}_{i+1}$.

Pour démarrer l'algorithme, comme les premiers termes ne sont pas connus, on utilise en général une méthode de Runge-Kutta.

Les méthodes de prédiction-correction se composent de quatre équations Prédiction (P), Évaluation (E), Correction (C) et de nouveau Évaluation (E). Pour cela elles sont appelées méthodes PECE.

$$\begin{cases} \text{Prediction} & \tilde{y}_{i+1} = \Phi_1(y_{i-r}, \dots, y_i, f_{i-r}, \dots, f_i) \\ \text{Evaluation} & \tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) \\ \text{Correction} & y_{i+1} = \Phi_2(y_{i-r}, \dots, y_i, f_{i-r}, \dots, f_i, \tilde{f}_{i+1}) \\ \text{Evaluation} & f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}) \end{cases}$$

Afin de gagner du temps, la dernière évaluation est parfois omise : c'est la méthode PEC. Dans les méthodes d'Adams, le prédicteur est une méthode d'Adams-Bashforth d'ordre $(r+1)$ et le correcteur utilise une formule d'Adams-Moulton d'ordre $(r+2)$. Par exemple, à l'ordre 4, on emploiera

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}) \\ \tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (9\tilde{f}_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}) \\ f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}) \end{cases}$$

La méthode de Milne d'ordre 4 est illustrée ci-après

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3} (2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}) \\ \tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} (\tilde{f}_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}) \\ f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}) \end{cases}$$

À l'ordre 6, la méthode de Milne est donnée par les schémas suivants

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_{i-5} + \frac{3h}{10} (11f_i - 14f_{i-1} + 26f_{i-2} - 14f_{i-3} + 11f_{i-4}) \\ \tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{2h}{45} (7\tilde{f}_{i+1} + 32f_i + 12f_{i-1} + 32f_{i-2} + 7f_{i-3}) \\ f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}) \end{cases}$$

1.10 Équation de la couche limite laminaire

L'équation de la couche limite avec viscosité non nulle en 2D est donnée par l'équation ordinaire suivante :

$$\begin{cases} \nu y''(x) + y'(x) = a \\ y(1) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (1.55)$$

Si $\nu \rightarrow 0$ on obtient l'équation d'Euler qui est une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 :

$$\begin{cases} y'(x) = a \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad (1.56)$$

Le problème en 2^{eme} ordre admet une solution analytique représentée par :

$$y(x) = \frac{1-a}{1-e^{-1/v}} \left(1 - e^{-1/v}\right) + ax \quad (1.57)$$

Alors que celui du 1^{er} ordre admet une solution analytique donnée par :

$$y(x) = 1 - a + ax \quad (1.58)$$

1.11 Exercices :

1.11.1 Exercice 1 :

Développer en série de Taylor (au voisinage de zero) les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin(x)$
2. $f_2(x) = \cos(x)$
3. $f_3(x) = \ln(1+x)$
4. $f_4(x) = \frac{1}{1-x}$

1.11.2 Exercice 2 :

Résoudre par la méthode d'Euler les problèmes régis par les équations différentielles d'ordre 1 suivantes :

1. $\begin{cases} \frac{df(x)}{dx} = x^2 \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 1] , \text{ Solution analytique : } f(x) = \frac{x^3}{3} + 1$
2. $\begin{cases} \frac{df(x)}{dx} = \frac{x}{f(x)} \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 1] , \text{ Solution analytique : } f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
3. $\begin{cases} \frac{df(x)}{dx} + \frac{f(x)}{x} = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases} \quad x \in [1, 2] , \text{ Solution analytique : } f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \quad x > 0$

Chapitre 2

Méthodes des différences finies

2.1 Le principe de la méthode

Le principe de la méthode des différences finies est de remplacer toutes les dérivées dans l'équation différentielle par des approximations algébriques sans dérivées.

On va exposer le principe de la méthode par un exemple simple régi par une équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 1 & x \in [0, 1] \\ f(0) = 1 & x = 0 \\ f(1) = 0 & x = 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

Le problème admet une solution analytique, qui peut être obtenue par une double intégration :

$$\begin{cases} \frac{df(x)}{dx} = x + C_1 \\ f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2 \\ f(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1 \\ f(1) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \quad (2.2)$$

Cette solution est continue, exacte et valable sur le nombre infini des valeurs de $x \in [0, 1]$

2.2 Procédure

Résoudre un problème similaire par la méthode des différences finies passe par les 4 étapes suivantes :

1. La discrétisation du domaine géométrique : En subdivisant le domaine en sous domaines de nombre fini avec les nœuds placés sur les extrémités de chaque sous intervalle
2. L'approximation de l'équation différentielle en remplaçant les dérivées par leurs approximations en adoptant au choix un des schémas étudiés au chapitre précédent
3. L'application de l'approximation de l'équation différentielle sur les nœuds
4. L'application des conditions aux limites en tenant en compte du type de la condition (ce point sera discuté en détail plus loin dans ce chapitre)

5. Résoudre le système d'équations algébriques linéaires obtenu pour trouver les valeurs de la fonction inconnue sur tous les nœuds
6. Poste traitement : Validation, discussion et recherche des valeurs intermédiaires par interpolation.

2.2.1 La discrétisation :

On subdivise le domaine en 4 éléments (à titre d'exemple) de même taille Δx ce qui donne 5 nœuds :

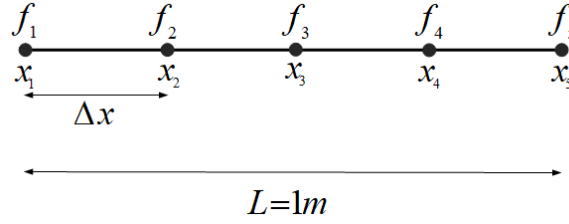


FIGURE 2.1 – Discrétisation du domaine

2.2.2 L'approximation :

L'équation différentielle est approximée en remplaçant les dérivées par leurs approximations en adoptant (au choix) le schéma centré :

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} \approx 0 \quad (2.3)$$

$$\Delta x \neq 0 \Rightarrow f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} \approx 0$$

$$f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} \approx 0 \quad (2.4)$$

2.2.3 L'application de l'approximation :

On applique l'approximation de l'équation différentielle sur les 5 nœuds du domaine :

$$\begin{aligned} i=1 &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_2 - 2f_1 + f_0 \approx 0 \\ f_3 - 2f_2 + f_1 \approx 0 \\ f_4 - 2f_3 + f_2 \approx 0 \\ f_5 - 2f_4 + f_3 \approx 0 \\ f_6 - 2f_5 + f_4 \approx 0 \end{array} \right. \quad (2.5) \\ i=2 &\rightarrow \\ i=3 &\rightarrow \\ i=4 &\rightarrow \\ i=5 &\rightarrow \end{aligned}$$

Ceci génère deux points fictifs f_0 et f_6 .

2.2.4 L'application des conditions aux limites :

Pour remédier au problème de la génération des deux points fictifs on remplace l'approximation en ces points par les conditions aux limites correspondantes :

On sait que $f(0) = 1$ $x = 0$ et $f(1) = 0$ $x = 1$

$$\begin{aligned} i = 1 &\rightarrow f_1 = 1 \\ i = 2 &\rightarrow f_3 - 2f_2 + f_1 \approx 0 \\ i = 3 &\rightarrow f_4 - 2f_3 + f_2 \approx 0 \\ i = 4 &\rightarrow f_5 - 2f_4 + f_3 \approx 0 \\ i = 5 &\rightarrow f_5 = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2.5 Résoudre le système d'équations algébriques linéaires

Le système obtenu étant fermé (le nombre des inconnues est égal aux nombre des équations) on passe à sa résolution par une des méthodes numérique qui peut être directe ou itérative.

On peut représenter le système sous la forme matricielle :

$$[A] \{f\} = \{b\} \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Sous Matlab la résolution peut être faite par l'instruction : $f = A/b$

```
» A = [10000; 1 - 2100; 01 - 210; 001 - 21; 00001];
» b = [1; 0; 0; 0; 0];
» f = A/b
```

Ceci donne :

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.75 \\ 0.50 \\ 0.25 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2.2.6 Poste traitement :

On compare les résultats obtenus avec la solution analytique :

x	Analytique	Numérique	Erreur relative ($100 \times f_{Analy} - f_{Num} / f_{Analy}$)
0	1	1	Valeur imposée (condition à la limite)
0.25	0.6563	0.7500	14%
0.50	0.3750	0.5000	33%
0.75	0.1563	0.2500	60%
1	0	0	Valeur imposée (condition à la limite)

On peut améliorer la précision de la solution en augmentant le nombre des nœuds.

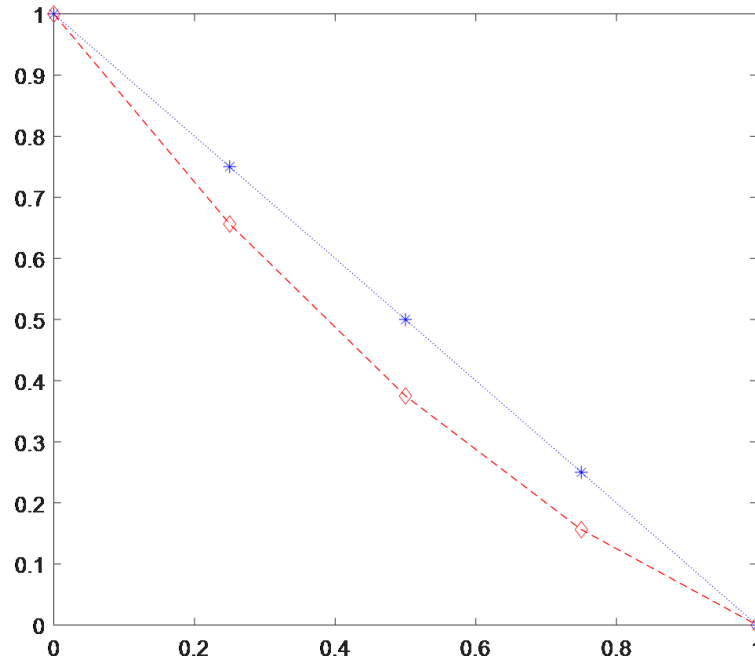


FIGURE 2.2 – Comparaison des résultats numériques et analytiques

2.3 Classification des équations aux dérivées partielles :

On peut écrire toute équation aux dérivées partielles du deuxième ordre à deux variables sous la forme générale suivante :

$$A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + D \frac{\partial f}{\partial x} + E \frac{\partial f}{\partial y} + F T + G = 0 \quad (2.9)$$

Cette expression ressemble à l'expression algébrique :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.10)$$

Qui peut être représentée par une ellipse une parabole ou une hyperbole selon la valeur du discriminant :

$$\Delta = B^2 - 4AC \quad (2.11)$$

De la même manière l'équation différentielle généralisée peut être classée en : Elliptique, parabolique ou Hyperbolique.

Type d'équation	Discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$	Exemple
Elliptique	$\Delta < 0$	$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0$
Parabolique	$\Delta = 0$	$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = 0$
Hyperbolique	$\Delta > 0$	$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - C^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = 0$

Cette classification permet de distinguer le type de conditions aux limites nécessaires et les mesures de précaution à prendre lors de la résolution par les différences finies.

2.4 Classification des conditions aux limites :

Pour qu'un problème régi par une équation différentielle partielle ait une solution unique il doit être complété par des conditions dites aux limites (initiale pour la variable temporelle). Le problème complété est dit un problème bien posé.

Il existe plusieurs types de conditions aux limites :

Type Dirichlet : la valeur de la fonction est connue sur la limite

Type Neumann : la valeur du gradient (la dérivée) de fonction est connu sur la limite

Type Robin : Une combinaison linéaire de la fonction et de son gradient est connue

Type Mixte : Différents types sur différentes parties du domaine

Type Cauchy : la valeur de la fonction et de son gradient sont connues simultanément.

2.5 Résolution d'un problème de conduction en 2D stationnaire

Un problème typique d'un phénomène physique régi par une équation elliptique est la conduction thermique en 2D en régime stationnaire (permanent).

On va exposer la méthode et son application sur ce type de problème par un autre exemple : On veut déterminer la distribution de la température en régime stationnaire sur une plaque carrée ($1m \times 1m$) d'épaisseur négligeable soumise aux températures suivantes sur ses bords :

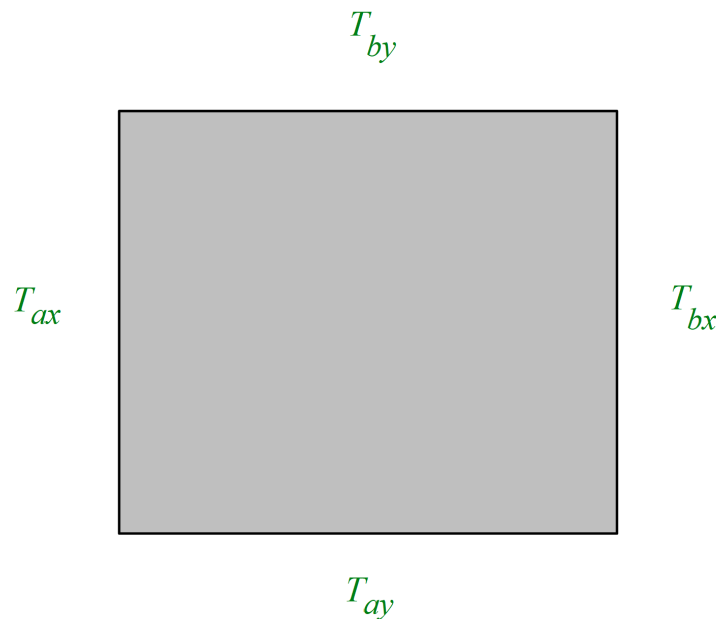


FIGURE 2.3 – Géométrie 2D et conditions aux limites

Ce problème est exprimé mathématiquement par l'équation de Laplace en 2D qui est elliptique et les 4 conditions aux limites (toutes de type **Dirichlet**) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0 \\ T(0,y) = T_{ax} \\ T(1,y) = T_{bx} \\ T(x,0) = T_{ay} \\ T(x,1) = T_{by} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} T_{ax} = 50^\circ \\ T_{bx} = 100^\circ \\ T_{ay} = 50^\circ \\ T_{by} = 100^\circ \end{cases}$$

Pour la résolution on suit les mêmes étapes :

2.5.1 La discrétisation :

On subdivise le domaine en 4 éléments dans chaque direction (à titre d'exemple) de même taille $\Delta x = \Delta y = h$, ce qui donne 5 nœuds dans chaque direction :

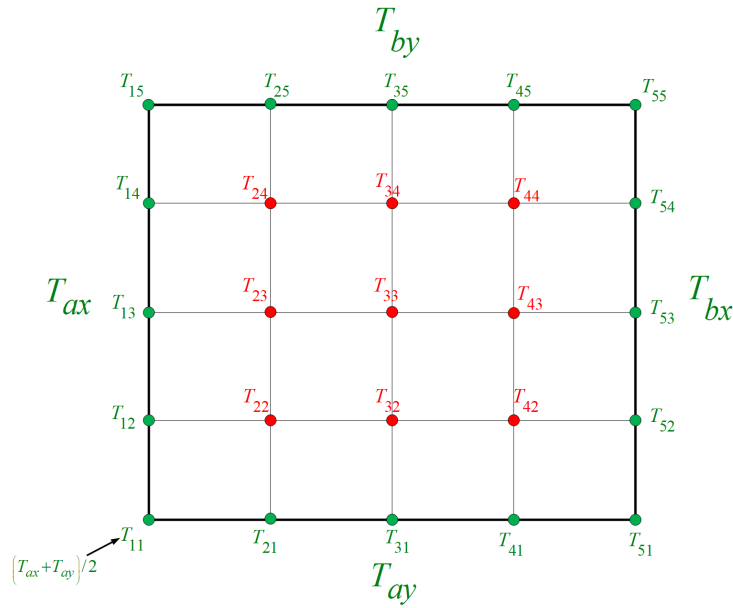


FIGURE 2.4 – Discrétisation du domaine 2D

2.5.2 L'approximation

L'équation différentielle est approchée en remplaçant les dérivées par leurs approximations en adoptant (au choix) le schéma centré :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} &\approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \\ \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} &\approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \approx 0 \quad (2.14)$$

$$(\Delta x, \Delta y, h) \neq (0, 0, 0) \Rightarrow T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} \approx 0$$

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} \approx 0 \quad (2.15)$$

2.5.3 L'application de l'approximation

Normalement on applique l'approximation de l'équation différentielle sur tous les nœuds du domaine, mais ceci va générer des nœuds fictifs de la même manière que le

problème 1D déjà traité. Par conséquent, on ne va appliquer l'approximation que sur les nœuds internes $i = 2 \rightarrow 4$ et $j = 2 \rightarrow 4$ ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 i = 2, j = 2 &\rightarrow T_{3,2} + T_{1,2} + T_{2,3} + T_{2,1} - 4T_{2,2} \approx 0 \\
 i = 3, j = 2 &\rightarrow T_{4,2} + T_{2,2} + T_{3,3} + T_{3,1} - 4T_{3,2} \approx 0 \\
 i = 4, j = 2 &\rightarrow T_{5,2} + T_{3,2} + T_{4,3} + T_{4,1} - 4T_{4,2} \approx 0 \\
 i = 2, j = 3 &\rightarrow T_{3,3} + T_{1,3} + T_{2,4} + T_{2,2} - 4T_{2,3} \approx 0 \\
 i = 3, j = 3 &\rightarrow T_{4,3} + T_{2,3} + T_{3,4} + T_{3,2} - 4T_{3,3} \approx 0 \\
 i = 4, j = 3 &\rightarrow T_{5,3} + T_{3,3} + T_{4,4} + T_{4,2} - 4T_{4,3} \approx 0 \\
 i = 2, j = 4 &\rightarrow T_{3,4} + T_{1,4} + T_{2,5} + T_{2,3} - 4T_{2,4} \approx 0 \\
 i = 3, j = 4 &\rightarrow T_{4,4} + T_{2,4} + T_{3,5} + T_{3,3} - 4T_{3,4} \approx 0 \\
 i = 4, j = 4 &\rightarrow T_{5,4} + T_{3,4} + T_{4,5} + T_{4,3} - 4T_{4,4} \approx 0
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.5.4 L'application des conditions aux limites

Les conditions aux limites seront appliquées et leurs valeurs associées transposées à droite dans le système précédent :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 T_{3,2} + T_{2,3} - 4T_{2,2} \approx -T_{ax} - T_{ay} \\
 T_{4,2} + T_{2,2} + T_{3,3} - 4T_{3,2} \approx -T_{ay} \\
 T_{3,2} + T_{4,3} - 4T_{4,2} \approx -T_{ay} - T_{bx} \\
 T_{3,3} + T_{2,4} + T_{2,2} - 4T_{2,3} \approx -T_{ax} \\
 T_{4,3} + T_{2,3} + T_{3,4} + T_{3,2} - 4T_{3,3} \approx 0 \\
 T_{3,3} + T_{4,4} + T_{4,2} - 4T_{4,3} \approx -T_{bx} \\
 T_{3,4} + T_{2,3} - 4T_{2,4} \approx -T_{ax} - T_{by} \\
 T_{4,4} + T_{2,4} + T_{3,3} - 4T_{3,4} \approx -T_{by} \\
 T_{3,4} + T_{4,3} - 4T_{4,4} \approx -T_{bx} - T_{by}
 \end{array} \right. \tag{2.17}$$

Résoudre le système d'équations algébriques linéaires

Le système obtenu étant fermé (le nombre des inconnues 9 est égal aux nombre des équations 9) on passe à sa résolution par une des méthodes numérique qui peut être directe ou itérative.

Pour utiliser Matlab on doit représenter le système sous la forme matricielle :

$$[A] \{f\} = \{b\} \tag{2.18}$$

$$\begin{bmatrix}
 -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 T_{2,2} \\
 T_{3,2} \\
 T_{4,2} \\
 T_{2,3} \\
 T_{3,3} \\
 T_{4,3} \\
 T_{2,4} \\
 T_{3,4} \\
 T_{4,4}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 -T_{ax} - T_{ay} \\
 -T_{ay} \\
 -T_{ay} - T_{bx} \\
 -T_{ax} \\
 0 \\
 -T_{bx} \\
 -T_{ax} - T_{by} \\
 -T_{by} \\
 -T_{bx} - T_{by}
 \end{Bmatrix} \tag{2.19}$$

Ceci donne :

$$\begin{pmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \\ T_{4,3} \\ T_{2,4} \\ T_{3,4} \\ T_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57.1429 \\ 64.2857 \\ 75.0000 \\ 64.2857 \\ 75.0000 \\ 85.7143 \\ 75.0000 \\ 85.7143 \\ 92.8571 \end{pmatrix}$$

2.5.5 Poste traitement

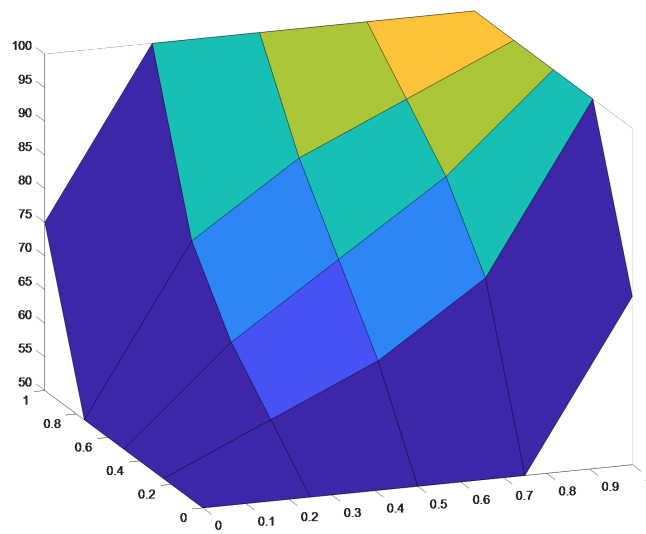


FIGURE 2.5 – Solution avec $n_x = n_y = 5$ nœuds dans chaque direction

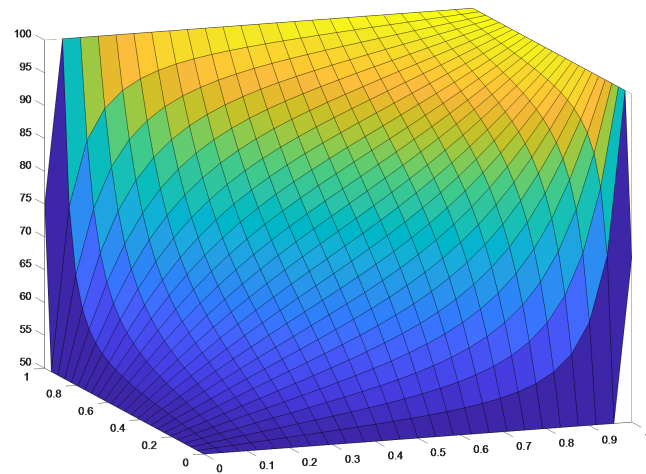


FIGURE 2.6 – Solution avec $n_x = n_y = 25$ nœuds dans chaque

2.6 Exercices :

Résoudre les problèmes suivants par la méthode des différences finies :

1. Equation de Poisson, Condition de type Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 10 \quad x \in]0, 1.5[, y \in]0, 1[\\ T(0, y) = 0 \\ T(1.5, y) = 20 \\ T(x, 0) = 0 \\ T(x, 1) = 20 \end{array} \right.$$

avec : $\Delta x = \Delta y = h = 0.5$

2. Equation de Laplace, Condition de type Dirichlet et Neumann

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad x \in]0, 2[, y \in]0, 2[\\ T(0, y) = 50 \\ \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=2} = 0 \\ T(x, 0) = 50 \\ T(x, 2) = 100 \end{array} \right.$$

avec : $\Delta x = \Delta y = h = 1$

Remarque : Adopter la deuxième condition aux limites $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \right)$ pour tous les nœuds d'extrême droite c-à-d : $(i = n)$

3. Equation de Helmholtz, Condition de type Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial y^2} + k^2 P(x,y) = 0 \quad x \in]0, 1.5[, y \in]0, 1[\\ P(0, y) = 0 \\ P(1.5, y) = 1 \\ P(x, 0) = 0 \\ P(x, 1) = 1 \end{array} \right.$$

avec : $k = 1$ et $\Delta x = \Delta y = h = 0.5$

Chapitre 3

Equations paraboliques

3.1 Equations paraboliques

Dans ce chapitre nous allons résoudre l'équation de chaleur à 1D en régime transitoire. La conduction thermique à une dimension en régime transitoire est régie par l'équation parabolique et les conditions aux limites et initiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ \text{Conditions aux limites} \left\{ \begin{array}{l} T(0,t) = T_a \\ T(L,t) = T_b \end{array} \right. \\ \text{Condition Initiale} \{ T(x,0) = T_0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

α est la diffusivité donnée par $\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_s}$. Où : λ est la conductivité thermique, ρ la densité massique et C_s la chaleur spécifique.

3.1.1 Le Schéma Explicite

Le principe de la méthode des différences finies est applicable ici de la même manière que les équations elliptiques, donc on procède par le remplacement de toute dérivée par une de ses approximations (ascendante, descendante ou centrée). Pour cet exemple on adopte le schéma centré pour la dérivée du deuxième ordre et l'ascendant pour la dérivée du premier ordre. En termes d'indices on adopte la convention suivante : $T_{i,j,l}^k$ où i est associé à la variable indépendante spatiale x , j à y , l à z et k à la variable temporelle t .

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2} \end{array} \right.$$
$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} - \alpha \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2} \approx 0 \quad (3.2)$$

$$T_i^{k+1} - T_i^k - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k) \approx 0 \quad (3.3)$$

On transpose tous les termes évalués à l'ancien instant à droite et ceux du nouveau à gauche :

$$T_i^{k+1} \approx T_i^k + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k) \quad (3.4)$$

A l'instant $t = 0$ toutes les valeurs du vecteur $T_{i=1,2,...,n_x}^1$ sont connues d'après la conditions initiale. De plus, d'après les conditions aux limites (de type Dirichlet) permettent de

connaître les deux valeurs T_1^{k+1} et $T_{n_x}^{k+1}$ à tout moment. Ceci permet de calculer toutes les nouvelles valeurs $T_{i=2,3,\dots,n_x-1}^{k+1}$ à partir des anciennes, de façon séquentielle et **explicite**. Ceci peut être illustré par la figure ci-dessous :

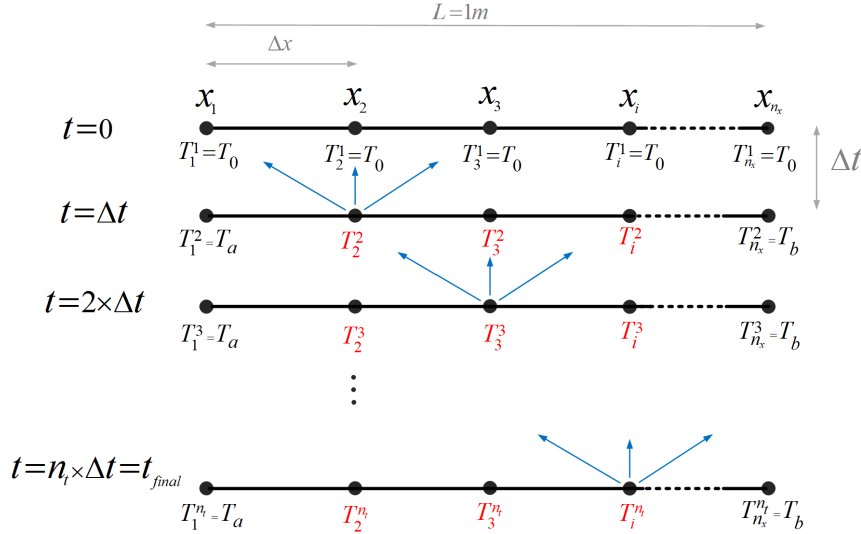


FIGURE 3.1 – Discrétisation spatiale et temporelle Schéma Explicite.

Le schéma explicite est simple à appliquer mais il nécessite le respect d'une **condition de stabilité importante** :

$$\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.5)$$

Ce dernier point est extrêmement important. Il signifie que si on se fixe un des deux pas : Δt ou Δx le choix du deuxième ne peut être arbitraire mais il doit respecter la condition de stabilité. Si par exemple on adopte un maillage très fin ($\Delta x \ll 1$) alors Δt doit aussi être pris très petit sinon le calcul devient instable et ne converge pas.

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\alpha} \quad (3.6)$$

3.1.2 Schéma implicite

Pour se libérer de la contrainte de stabilité le schéma implicite peut être utilisé. Il consiste à discrétiser les dérivées spatiale (par rapport à x) au nouvel instant $k+1$ et non pas k :

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} \end{cases}$$

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} - \alpha \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} \approx 0 \quad (3.7)$$

$$-\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{i+1}^{k+1} + \left(1 + 2\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{k+1} - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{i-1}^{k+1} \approx T_i^k \quad (3.8)$$

A cause de la dépendance de chaque valeur recherchée des valeurs des nœuds voisins et au même instant, c'est-à-dire inconnues, la solution du problème formulé par ce schéma ne peut être obtenue de façon progressive et directe. Elle nécessite la résolution simultanée d'un système d'équations linéaires. Cependant l'avantage de ce schéma est qu'il

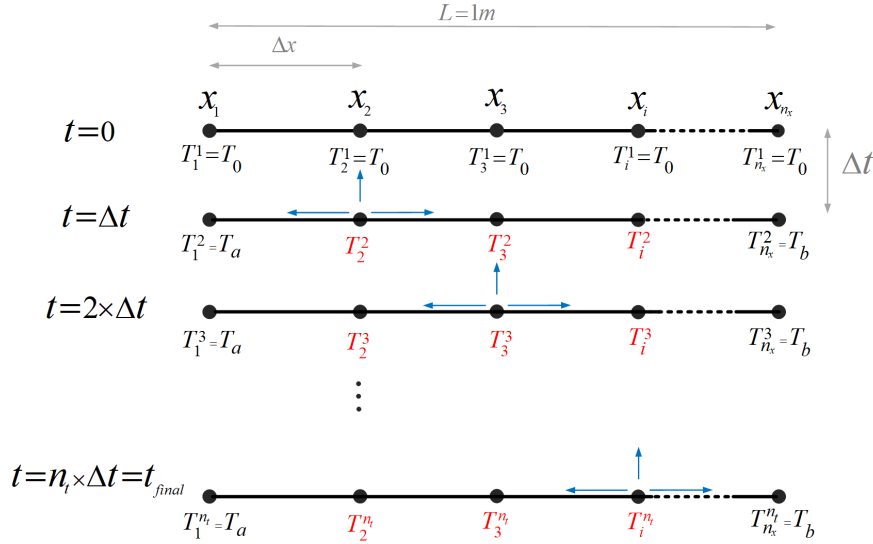


FIGURE 3.2 – Discretisation spatiale et temporelle Schéma Implicite.

est **inconditionnellement stable** ce qui signifie que le choix des pas de discrétisation est libre. Ce qui peut accélérer les calculs de manière considérable.

3.1.3 Schéma Crank-Nicholson

Pour améliorer la précision dans la discrétisation temporelle implicite le schéma de Crank-Nicholson propose de moyenner la discrétisation spatiale :

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \approx \frac{T_i^k - T_i^{k-1}}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^{k-1} - 2T_i^{k-1} + T_{i-1}^{k-1}}{\Delta x^2} \right] \end{cases}$$

$$\frac{T_i^k - T_i^{k-1}}{\Delta t} - \frac{\alpha}{2} \left[\frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^{k-1} - 2T_i^{k-1} + T_{i-1}^{k-1}}{\Delta x^2} \right] \approx 0 \quad (3.9)$$

Ce schéma de Crank-Nicholson est aussi inconditionnellement stable et plus précis que le schéma implicite.

3.1.4 ADI de Peaceman-Rachford

Pour résoudre une équation de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Peaceman-Rachford proposent de remplacer l'équation différentielle par deux équations discrétisées utilisées alternativement sur des périodes $\Delta t/2$. Si on note $v_{i,j}$ le résultat intermédiaire, le schéma s'écrit

$$\begin{cases} \frac{v_{i,j} - u_{i,j}^n}{(\Delta t/2)} = a \frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + b \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{(\Delta y)^2} \\ \frac{u_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}}{(\Delta t/2)} = a \frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + b \frac{u_{i,j-1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \end{cases}$$

En posant

$$\mathcal{L}_x u_{i,j}^n = \frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{(\Delta x)^2}$$

et

$$\mathcal{L}_y u_{i,j}^n = \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{(\Delta y)^2}$$

et en définissant U_n comme la matrice $(u_{i,j}^n)$ et V_n la matrice $(v_{i,j}^n)$, les équations s'écrivent sous forme matricielle

$$\begin{cases} V_n - U_n = \frac{\Delta t}{2} (a \mathcal{L}_x V_n + b \mathcal{L}_y U_n) \\ U_{n+1} - V_n = \frac{\Delta t}{2} (a \mathcal{L}_x V_n + b \mathcal{L}_y U_{n+1}) \end{cases}$$

À l'étape n , connaissant U_n , on calcule V_n puis U_{n+1} par résolution de systèmes tridiagonaux. 10.7 Exercices 1. Schéma rétrograde. On considère l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et le schéma rétrograde suivant

$$\frac{\frac{3}{2}u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + \frac{1}{2}u_{i,j-1}}{\Delta t} = c \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{\Delta x^2}$$

Déterminer l'ordre du schéma. Le schéma est-il explicite ou implicite ? Étudier la stabilité du schéma. 2. Schéma de Dufort et Frankel. On considère l'équation de la chaleur et le schéma suivant

$$\frac{u_{j,n+1} - u_{j,n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{j+1,n} - u_{j,n+1} - u_{j,n-1} + u_{j-1,n}}{(\Delta x)^2} = 0$$

Étudier l'ordre du schéma. Le schéma est-il implicite ou explicite ? Étudier la stabilité de ce schéma.

3.2 Exercice

Sur un domaine à 1D de longueur ($L=1$) la distribution de la température en régime transitoire suit l'équation et les conditions aux limites et initiales suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0 & \dots (1) & x \in]0, 1[, t > 0 \\ T(0,t) = 50^\circ C \\ T(1,t) = 100^\circ C \\ T(x,0) = 25^\circ C \end{cases}$$

On prend : $\alpha = 1$

Chapitre 4

Equations hyperboliques

4.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles hyperboliques surviennent à chaque fois qu'un mouvement ondulatoire est observé. Les équations hyperboliques se manifestent également lorsqu'une substance est transportée avec un écoulement, donnant lieu à une équation d'advection. Dans ce chapitre, nous considérerons principalement ce type d'équation (équation d'advection) pour illustrer quelques problèmes se posant dans la solution numérique des équations hyperboliques.

4.1.1 L'équation d'advection

L'équation d'advection à une dimension spatiale est la plus simple des équations hyperboliques :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

u : est la vitesse d'advection

a : est une constante

Pour résoudre le problème sur l'intervalle $x \in [0, 1]$, à l'équation on ajoute la condition initiale :

$$u(x, 0) = \eta(x)$$

et une condition de limite géométrique :

$$u(0, t) = g_0(t)$$

La fonction

$$\eta(x)$$

donne la distribution de la vitesse d'advection à chaque point le long de x à l'instant $t = 0$, et la fonction $g_0(t)$. L'équation admet pour le cas de η constante, la solution analytique donnée par :

$$u(x, t) = \eta(x - at)$$

Pour résoudre par différences finies le problème donné par l'équation on opte pour les approximations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t}$$

Les équations donnent :

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x} = 0$$

$$u_i^{k+1} = u_i^k - a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^k - u_{i-1}^k)$$

Ce schéma explicite est inutilisable car il est inconditionnellement instable. Pour rester dans un contexte explicite le schéma de Lax–Friedrichs peut être utilisé pourvu que la condition suivante soit vérifiée :

$$\left| a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$$

Ce schéma est donc conditionnellement stable.

4.2 Méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques est une méthode de résolution des équations scalaires qui consiste à suivre la solution le long des courbes caractéristiques de l'équation. Elle permet en particulier de chercher des solutions régulières des équations hyperboliques. Pour une équation aux dérivées partielles du premier ordre, la méthode des caractéristiques cherche des courbes (appelées « lignes caractéristiques », ou plus simplement « caractéristiques ») le long desquelles l'équation aux dérivées partielles se réduit à une simple équation différentielle ordinaire. La résolution de l'équation différentielle ordinaire le long d'une caractéristique permet de retrouver la solution du problème original. C'est une méthode différente de la méthode des différences finies.

4.3 Equation de Burger

L'équation de J.M. Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

se généralise sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (4.3)$$

Lorsque f est une fonction convexe, l'équation de Burgers associée à la condition initiale

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

admet une solution unique $u(x, t) = w(x/t, u_g, u_d)$, où w est la fonction suivante appelée solveur de Riemann et g la fonction telle que $f'(g(x)) = x$

$$w(y, u, v) = \begin{cases} u & \text{si } y < f'(u) \\ g(y) & \text{si } f'(u) < y < f'(v) \\ v & \text{si } y > f'(v) \end{cases} \quad (4.5)$$

On peut citer 6 schémas numériques pour la discrétisation de l'équation de Burger

4.3.1 Schema de Lax-Friedrichs

L'équation de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (4.6)$$

admet comme schéma de discrétisation, le schéma de Lax suivant

$$\frac{u_{i,j+1} - \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j})}{\Delta t} + \frac{f(u_{i+1,j}) - f(u_{i-1,j})}{2\Delta x} = 0 \quad (4.7)$$

Ce schéma est un schéma explicite à deux niveaux en temps du premier ordre, stable s'il vérifie la condition de Coumant-Friedrichs-Lewy (CFL)

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \sup |f'(u_{i,j})| \leq 1 \quad (4.8)$$

Remarquons que le schéma de Lax peut aussi s'écrire sous la forme :

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u_{i+1,j}) - f(u_{i-1,j})) + \frac{1}{2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \quad (4.9)$$

qui correspond à la discrétisation de l'équation parabolique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.10)$$

où on a posé $\varepsilon = \Delta x$. Le schéma de Lax-Friedrichs introduit un terme supplémentaire qu'on appelle la viscosité numérique (par analogie avec la mécanique des fluides). Lorsque ε tend vers zéro, l'équation parabolique tend vers l'équation hyperbolique.

4.3.2 Schema de Saute-Mouton

Le schéma saute-mouton de l'équation de Burgers

$$u_{i,j+1} = u_{i,j-1} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u_{i+1,j}) - f(u_{i-1,j})) \quad (4.11)$$

est un schéma explicite à trois niveaux, d'ordre 2, stable sous la condition CFL.

4.3.3 Schema de Lax-Wendroff

Pour établir le schéma de Lax-Wendroff de l'équation généralisée de Burgers, écrivons un développement de Taylor à l'ordre 2

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + O(\Delta t^3) \quad (4.12)$$

soit en termes discrétisés

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,j} + O(\Delta t^3) \quad (4.13)$$

Discretisons en différences centrées

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} = - \left(\frac{\partial f(u)}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{-f(u_{i+1,j}) + f(u_{i-1,j})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (4.14)$$

Remarquons que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(f'(u) \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(f'(u) \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) \quad (4.15)$$

Pour un $\theta \in [0, 1]$, si on pose $\partial_x f(u) = \partial f(u)/\partial x$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (f'(u) \partial_x f(u)) &= f'(u(x + \theta \Delta x, t)) \frac{f(u(x + \Delta x, t)) - f(u(x - \Delta x, t))}{\Delta x^2} \\ &\quad - f'(u(x + (\theta - 1) \Delta x, t)) \frac{f(u(x, t)) - f(u(x - \Delta x, t))}{\Delta x^2} \\ &\quad + O(\Delta x) \end{aligned} \quad (4.16)$$

expression dans laquelle on a remplacé :

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{f(u(x + \Delta x, t)) - f(u(x - \Delta x, t))}{\Delta x^2} \quad (4.17)$$

d'où l'expression discrétisée

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(f'(u) \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right)_{i,j} &= \frac{f'(u_{i+\theta,j})}{\Delta x^2} (f(u_{i+1,j}) - f(u_{i,j})) \\ &\quad - \frac{f'(u_{i+(\theta-1),j})}{\Delta x^2} (f(u_{i,j}) - f(u_{i-1,j})) \end{aligned} \quad (4.18)$$

ce qui conduit, pour $\theta = 1/2$, au schéma de Lax-Wendroff :

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{\lambda^2}{2} (f(u_{i+1,j}) - f(u_{i-1,j})) + \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2} f'(u_{i+1/2,j}) (f(u_{i+1,j}) - f(u_{i,j})) \\ &\quad - \frac{\lambda^2}{2} f'(u_{i-1/2,j}) (f(u_{i,j}) - f(u_{i-1,j})) \end{aligned} \quad (4.19)$$

avec $\lambda = \Delta t / \Delta x$ et

$$f'(u_{i\pm 1/2,j}) = \frac{f'(u_{i,j}) + f'(u_{i\pm 1,j})}{2} \quad (4.20)$$

Le schéma de Lax-Wendroff est un schéma explicite à deux niveaux du second ordre, stable sous la condition *CFL*.

4.3.4 Schema d'Engquist-Osher

Pour l'équation de Burgers généralisée

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (4.21)$$

le schéma d'Engquist-Osher est une généralisation de celui de Lax-Wendroff.

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \lambda (\Phi(u_{i,j}, u_{i+1,j}) - \Phi(u_{i-1,j}, u_{i,j})) \quad (4.22)$$

où $\lambda = \Delta t / \Delta x$, et le flux numérique est donné par :

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2} (f(v) - f(u)) - \frac{\lambda}{2} \int_u^v |f'(\tau)| d\tau \quad (4.23)$$

Le terme intégral discrétise la viscosité numérique. Le schéma est du premier ordre, stable sous la condition *CFL*.

4.3.5 Schema de Godunov

Pour l'équation de Burgers généralisée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (4.24)$$

le schéma de Godunov introduit le flux numérique $\Phi(u, v)$ à partir du solveur de Riemann $w(0, u, v)$:

$$\Phi(u, v) = w(0, u, v) = \begin{cases} f(u) & \text{si } f'(u) > 0 \\ f \circ g(0) & \text{si } f'(u) < 0 \text{ et } f'(v) > 0 \\ f(v) & \text{si } f'(v) < 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

où g est la fonction telle que $f'(g(x)) = x$. Le schéma de Godunov

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Phi(u_{i,j}, u_{i+1,j}) - \Phi(u_{i-1,j}, u_{i,j})) \quad (4.26)$$

est un schéma du premier ordre, stable sous la condition CFL .

4.3.6 Schemas de Lerat-Peyret

Pour l'équation de Burgers généralisée

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (4.27)$$

les schémas S_α^β de Lerat-Peyret sont des schémas d'ordre 2, paramétrés par α et β . Selon les valeurs des paramètres, le schéma s'appelle aussi schéma de Mac-Cormack ($\alpha = 1, \beta = 0$), ou encore schéma de Richtmeyer ($\alpha = \beta = 1/2$). La méthode de résolution est une méthode de prédiction-correction, dans laquelle le prédicteur vaut :

$$p_i = (1 - \beta)u_{i,j} + \beta u_{i+1,j} - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(u_{i+1,j}) - f(u_{i,j})) \quad (4.28)$$

et le correcteur :

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{\Delta t}{2\alpha\Delta x} ((\alpha - \beta)f(u_{i+1,j}) + (2\beta - 1)f(u_{i,j}) + (1 - \alpha - \beta)f(u_{i-1,j}) + f(p_i) - f(p_{i-1})) \quad (4.29)$$

Les schémas de Lerat-Peyret sont stables sous la condition CFL .

4.4 Ondes sonores

L'équation des ondes est le prototype des équations hyperboliques linéaires du deuxième ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.30)$$

Elle admet pour solution, toute fonction de la forme $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ où f et g sont des fonctions arbitraires de classe C^2 , représentant la somme d'une onde progressive et d'une onde régressive. Plus précisément, considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}, \text{ et } t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \end{cases} \quad (4.31)$$

Si u_0 est de classe C^p et si u_1 est de classe C^{p-1} , le problème de Cauchy admet une solution classique de classe C^p

$$u(x, t) = u_0(x + ct)/2 + u_0(x - ct)/2 + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\tau) d\tau \quad (4.32)$$

En termes de distribution, l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_0(x) \delta(t) + u_1(x) \delta'(t) \quad (4.33)$$

admet une solution faible

$$u(x, t) = E(x, t) * u_0(x) + \frac{\partial E}{\partial t} * u_1(x) \quad (4.34)$$

avec

$$E(x, t) = \frac{1}{2} \chi_{|x| < ct} = \begin{cases} 1/2 & \text{si } |x| < ct \\ 0 & \text{si } |x| > ct \end{cases} \quad (4.35)$$

Remarquons que si on pose $v = \partial u / \partial x$ et $w = \partial u / c \partial t$, l'équation des ondes s'écrit sous la forme du système

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (4.36)$$

Plus généralement, le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + f(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}^n, \text{ et } t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \end{cases} \quad (4.37)$$

admet une solution qui, si on note $f_t(x)$ la fonction $f(x, t)$, est donnée par la formule suivante :

$$u(x, t) = \frac{1}{c} E_{ct} * u_1(x) + \partial_t \left(\frac{1}{c} E_{ct} * u_0 \right) (x) + \int_0^t \frac{1}{c} E_{c(t-s)} * f_t(x) ds \quad (4.38)$$

$E_t(x)$ est la fonction notée aussi $E(x, t)$ qui admet comme transformée de Fourier la fonction :

$$\widehat{E}_t(\xi) = \frac{\sin(t \|\xi\|)}{\|\xi\|} \quad (4.39)$$

On peut citer 4 schémas pour la discrétisation de l'équation des ondes :

4.4.1 Le schéma theta

Considérons l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.40)$$

et écrivons le θ -schéma associé à l'équation des ondes sous la forme :

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta t)^2} - c^2 \frac{\theta Au_{i,j+1} + (1 - 2\theta)Au_{i,j} + \theta Au_{i,j-1}}{(\Delta x)^2} = 0 \quad (4.41)$$

avec :

$$Au_{i,j} = u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} \quad (4.42)$$

Le schéma est explicite si $\theta = 0$ et implicite dans tous les autres cas. Si $0 \leq \theta \leq 1/4$, le schéma est stable si :

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - 4\theta}} \quad (4.43)$$

si $1/4 \leq \theta \leq 1$, le schéma est universellement stable.

4.4.2 Schéma de Lax

Pour l'équation des ondes écrite sous forme d'un système

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (4.44)$$

le schéma de Lax :

$$\begin{cases} v_{i,j+1} = \frac{1}{2} (v_{i+1,j} + v_{i-1,j}) + c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) \\ w_{i,j+1} = \frac{1}{2} (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) \end{cases} \quad (4.45)$$

est un schéma à deux niveaux, du premier ordre, stable si la condition *CFL* est vérifiée

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (4.46)$$

4.4.3 Schéma Saute-Mouton

Le schéma saute-mouton pour l'équation des ondes écrite sous forme d'un système du premier ordre :

$$\begin{cases} v_{i,j+1} = v_{i,j-1} + c \frac{\Delta t}{\Delta x} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) \\ w_{i,j+1} = w_{i,j-1} + c \frac{\Delta t}{\Delta x} (v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) \end{cases} \quad (4.47)$$

est un schéma à trois niveaux, explicite et du second ordre, stable s'il vérifie la condition *CFL*.

4.4.4 Schéma de Lax-Wendroff

Le schéma de Lax-Wendroff, avec $\lambda = \Delta t / \Delta x$:

$$\begin{cases} v_{i,j+1} = v_{i,j} + c \frac{\lambda}{2} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) + \frac{c^2 \lambda^2}{2} (v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}) \\ w_{i,j+1} = w_{i,j} + c \frac{\lambda}{2} (v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) + \frac{c^2 \lambda^2}{2} (w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}) \end{cases} \quad (4.48)$$

est un schéma stable sous la condition *CFL*.

Chapitre 5

Méthode des Volumes Finis

5.1 Avantages et inconvénients vis-à-vis des différences finies

La méthode des différences finies bien que simple elle est assez puissante quand le domaine géométrique peut être représenté par un maillage cartésien. Les limites de la méthode des différences finies sont atteintes lorsque la géométrie présente une inclinaison ou une courbure. Le maillage cartésien ne peut pas représenter ces détails avec fidélité surtout avec un maillage grossier. Toute tentative d'amélioration de cette approche revient à augmenter la résolution c'est-à-dire le nombre des nœuds et par conséquent le temps et ressources de calcul. C'est la même chose pour les détails courbés

L'idéal derrière la méthode des volumes finis (qui n'est qu'une variation de la méthode des différences finies) est d'adopter des éléments ayant (généralement) leur nœuds à l'intérieur au lieu des extrémités. Ceci rend le choix de la forme de l'élément plus libre, et ainsi mieux représenter la géométrie du domaine. L'équation différentielle est d'abord moyennée par intégration sur chaque élément ensuite approximée par la même manière que celle des différences finies (c'est-à-dire série de Taylor)

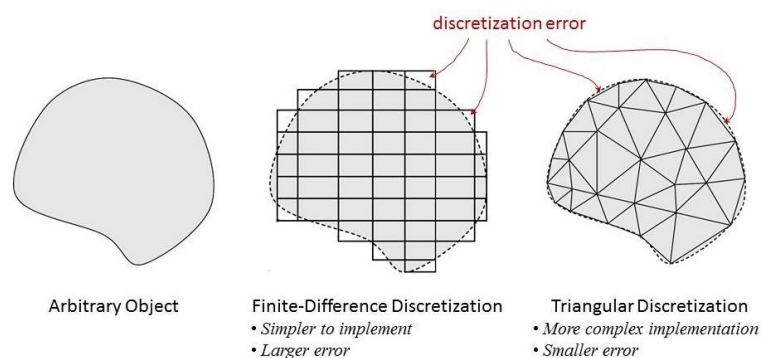


FIGURE 5.1 – Comparaison des différents types de maillage

5.2 Application à la MDF

La calcul (ou simulation) de la dynamique des fluides ou CFD est l'analyse de systèmes impliquant l'écoulement de fluide, le transfert de chaleur et les phénomènes associés tels que les réactions chimiques au moyen d'une simulation informatique. La technique est très puissante et couvre un large éventail de domaines d'application industriels

et non industriels. Certains exemples sont :

- aérodynamique des avions et des véhicules : portance et traînée
- hydrodynamique des navires
- centrale électrique
- combustion dans les moteurs à combustion interne et les turbines à gaz
- turbomachines
- flux à l'intérieur des passages rotatifs, diffuseurs, etc.
- génie électrique et électronique : refroidissement des équipements, y compris les microcircuits
- chimie génie des procédés : mélange et séparation, moulage des polymères
- environnement extérieur et intérieur des bâtiments
- chargement par le vent et chauffage / ventilation
- génie maritime : charges sur les structures et les plateformes pétrolières
- génie de l'environnement : distribution des polluants et des effluents
- hydrologie et océanographie : débits dans les rivières, océans
- météorologie : prévisions météorologiques
- génie biomédical : circulation du sang dans les artères et les veines

À partir des années 1960, l'industrie aérospatiale a intégré les techniques CFD dans la conception, la recherche et développement et la fabrication d'avions et de moteurs à réaction. Plus récemment, les méthodes ont été appliquées à la conception de moteurs à combustion interne, de chambres de combustion de turbines à gaz et de fours. De plus, les fabricants de véhicules automobiles prédisent désormais régulièrement les forces de traînée, les flux d'air sous le capot et l'intérieur avec CFD. De plus en plus, le CFD devient un élément essentiel dans la conception de produits et de processus industriels. Le but ultime des développements dans le domaine des CFD est de fournir une capacité comparable à d'autres outils CAE (ingénierie assistée par ordinateur) tels que les codes d'analyse des contraintes. La principale raison pour laquelle le CFD a pris du retard est l'énorme complexité du comportement sous-jacent, qui empêche une description des écoulements de fluide qui est à la fois économique et suffisamment complète. La disponibilité d'un matériel informatique haute performance abordable et l'introduction d'interfaces utilisateurs conviviales ont récemment suscité un regain d'intérêt, et CFD est entré dans la communauté industrielle au sens large depuis les années 1990.

5.3 La convection

Lors du traitement des problèmes de convection l'apparition du terme convectif (vitesse) complique la résolution de leur équations. Ceci est dû à l'addition de des nouvelles inconnues qui sont les composantes de la vitesse.

5.3.1 Algorithme SIMPLE

L'acronyme SIMPLE signifie Semi-Implicit Method for PressureLinked Equations. Les problèmes associés au lien pression-vitesse peuvent être résolus en adoptant une stratégie de résolution itérative telle que l'algorithme SIMPLE de Patankar et Spalding (1972). Dans cet algorithme, les flux convectifs par unité de masse F à travers les faces des cellules sont évalués à partir de ce que l'on appelle des composantes de vitesse estimées. De plus, un champ de pression deviné est utilisé pour résoudre les équations de quantité de mouvement, et une équation de correction de pression, déduite de l'équation de continuité, est résolue pour obtenir un champ de correction de pression, qui est à son

tour utilisé pour mettre à jour les champs de vitesse et de pression. Pour démarrer le processus d'itération, nous utilisons des suppositions initiales pour les champs de vitesse et de pression. Au fur et à mesure que l'algorithme avance, notre objectif doit être d'améliorer progressivement ces champs devinés. Le processus est itéré jusqu'à la convergence des champs de vitesse et de pression.

5.3.2 Algorithme SIMPLER

L'algorithme SIMPLER (SIMPLE Revised) de Patankar (1980) est une version améliorée de SIMPLE. Dans cet algorithme, l'équation de continuité discrétisée est utilisée pour dériver une équation discrétisée pour la pression, au lieu d'une équation de correction de pression comme dans SIMPLE. Ainsi, le champ de pression intermédiaire est obtenu directement sans utiliser de correction. Les vitesses sont cependant toujours obtenues grâce aux corrections de vitesse de SIMPLE.

5.3.3 Algorithme SIMPLEQ

L'algorithme SIMPLEC (SIMPLE-Consistent) de Van Doormal et Raithby (1984) suit les mêmes étapes que l'algorithme SIMPLE, avec la différence que les équations de quantité de mouvement sont manipulées de sorte que les équations de correction de vitesse SIMPLEC omettent des termes moins significatifs que ceux de SIMPLE.

5.3.4 Algorithme PISO

L'algorithme PISO, qui signifie Pressure Implicit with Splitting of Operators, d'Issa (1986) est une procédure de calcul pression-vitesse développée à l'origine pour le calcul non itératif des écoulements compressibles instationnaires. Il a été adapté avec succès pour la résolution itérative de problèmes en régime permanent. PISO implique une étape de prédiction et deux étapes de correction et peut être considéré comme une extension de SIMPLE, avec une étape de correction supplémentaire pour l'améliorer.

5.3.5 Algorithme QUICK

Le schéma d'interpolation quadratique en amont pour la cinétique convective (quadratic upstream interpolation for convective kinetics : QUICK) de Leonard (1979) utilise une interpolation quadratique pondérée en amont à trois points pour les valeurs faciales des cellules. La valeur faciale de est obtenue à partir d'une fonction quadratique passant par deux nœuds (de chaque côté de la face) et un nœud du côté amont.

5.3.6 Algorithme TEAMKE pour le turbulent

TEAMKE (Turbulent Elliptic Algorithm Manchester, K-Epsilon) est un code basé sur la méthode des différences finies/ Volumes finis utilisant un maillage cartésien décalé. Il permet de résoudre les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible en écoulement laminaire ou turbulent, 2D ou axisymétrique. Le modèle k-epsilon est implémenté par défaut. Pour les schémas de convection, il donne la possibilité d'utiliser le schéma d'interpolation quadratique (QUICK) ou en loi de puissance d'interpolation (PLDS).

5.4 Comment choisir ?

Le choix de la méthode numérique pour résoudre un problème donné dépend essentiellement de la géométrie sur laquelle le phénomène physique évolue. Si la géométrie peut être discrétisée par un maillage cartésien l'utilisation de la méthode des différences finies est justifiée. si la géométrie représente des inclinaisons ou des courbures on a deux possibilités : ou bien on augmente la densité du maillage et on maintient la simplicité de la méthode des différences finies ou bien on change carrément de méthode vers celle des volumes finis

5.5 Exercice

Une barre de longueur $L=1.2$ m est soumise aux températures : 25°C sur l'extrémité gauche ($x=0$) et 50°C sur l'extrémité droite ($x=L$) En supposant que la distribution de la température le long de la barre est régie par l'équation

$$\frac{d^2}{dx^2}(T) = 0$$

En utilisant la méthode des volumes finis avec 3 éléments :

1. Trouver la distribution de la température en fonction de x .
2. Comparer tous vos résultats avec ceux obtenus analytiquement. La solution analytique est à déterminer.

Annexe A

Solution des exercices proposés

A.1 Chapitre 1

A.1.1 Exercice 1.1 :

Développement en série de Taylor (au voisinage de zero) :

$$1. \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$2. \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$3. \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

$$4. \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

A.1.2 Exercice 1.2.a :

1. **Discrétisation :**

$x \in [0, 1]$ Si on prend $\Delta x = 0.2$ cela donne un nombre de nœuds égal à $n = 6$

2. **Approximation de l'équation différentielle :**

$$\frac{df(x)}{dx} = x^2 \Rightarrow \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \approx x_i^2 \Rightarrow f_{i+1} \approx f_i + \Delta x \cdot x_i^2$$

3. **Application des conditions aux limites :**

$$\Rightarrow f_1 = f(0) = 1$$

4. **Application de l'approximation :**

i	Eq	$f_{numérique}$	$f_{Analytique}$
1	$f_1 = 1$	1	1
1	$f_2 \approx f_1 + \Delta x \cdot x_1^2$	1.000	1.000
2	$f_3 \approx f_2 + \Delta x \cdot x_2^2$	1.008	1.021
3	$f_4 \approx f_3 + \Delta x \cdot x_3^2$	1.040	1.072
4	$f_5 \approx f_4 + \Delta x \cdot x_4^2$	1.112	1.170
5	$f_6 \approx f_5 + \Delta x \cdot x_5^2$	1.240	1.333

A.1.3 Exercice 1.2.b :**1. Discrétisation :**

on adopte $\Delta x = 0.2$ sur $x \in [0, 1]$, cela donne un nombre de nœuds égal à $n = 6$

2. Approximation de l'équation différentielle :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{x}{f(x)} \Rightarrow \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \approx \frac{x_i}{f_i} \Rightarrow f_{i+1} \approx f_i + \Delta x \cdot \frac{x_i}{f_i}$$

3. Application des conditions aux limites :

$$\Rightarrow f_1 = f(0) = 1$$

4. Application de l'approximation :

i	Eq	$f_{numérique}$	$f_{Analytique}$
1	$f_1 = 1$	1	1
1	$f_2 \approx f_1 + \Delta x \cdot x_1 / f_1$	1.000	1.019
$\Rightarrow$ 2	$f_3 \approx f_2 + \Delta x \cdot x_2 / f_2$	1.040	1.077
3	$f_4 \approx f_3 + \Delta x \cdot x_3 / f_3$	1.116	1.166
4	$f_5 \approx f_4 + \Delta x \cdot x_4 / f_4$	1.223	1.242
5	$f_6 \approx f_5 + \Delta x \cdot x_5 / f_5$	1.353	1.414

A.1.4 Exercice 1.2.c :**1. Discrétisation :**

On prend $\Delta x = 0.2$ sur $x \in [1, 2]$ cela donne un nombre de nœuds égal à $n = 6$

2. Approximation de l'équation différentielle :

$$\frac{df(x)}{dx} + \frac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + \frac{f_i}{x_i} \approx 1$$

$$\Rightarrow f_{i+1} \approx f_i + \Delta x (1 - f_i / x_i)$$

3. Application des conditions aux limites :

$$\Rightarrow f_1 = f(1) = 0$$

4. Application de l'approximation :

i	Eq	$f_{numérique}$	$f_{Analytique}$
1	$f_1 = 0$	0	0
1	$f_2 \approx f_1 + \Delta x (1 - f_1 / x_1)$	0.20	0.18
$\Rightarrow$ 2	$f_3 \approx f_2 + \Delta x (1 - f_2 / x_2)$	0.36	0.34
3	$f_4 \approx f_3 + \Delta x (1 - f_3 / x_3)$	0.50	0.48
4	$f_5 \approx f_4 + \Delta x (1 - f_4 / x_4)$	0.63	0.62
5	$f_6 \approx f_5 + \Delta x (1 - f_5 / x_5)$	0.76	0.75

A.2 Chapitre 2**A.2.1 Exercice 2.1 :**

avec : $h = 0.5 \Rightarrow n = 4$ et $m = 3$

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i+1, j} - 2T_{i, j} + T_{i-1, j}}{h^2} + \frac{T_{i, j+1} - 2T_{i, j} + T_{i, j-1}}{h^2} \approx 10$$

$$\Rightarrow T_{i+1, j} + T_{i-1, j} + T_{i, j+1} + T_{i, j-1} - 4T_{i, j} \approx 10h^2$$

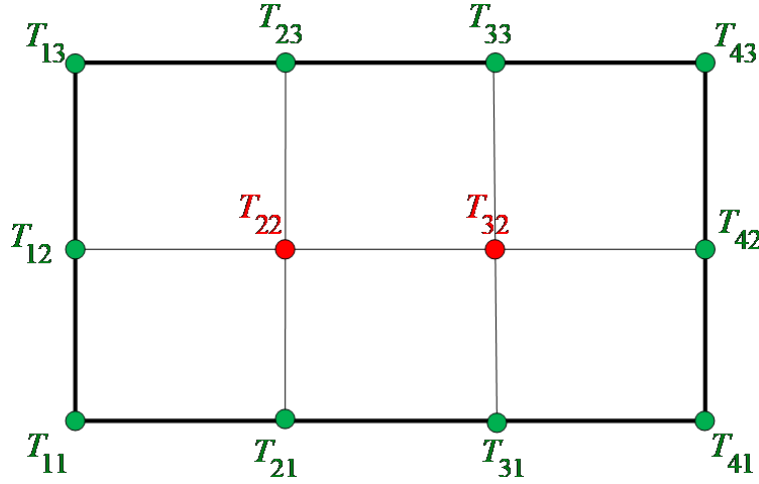


FIGURE A.1 – Maillage et Conditions aux limites

$$\begin{cases} T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} \approx 10h^2 & i = 2 \rightarrow 3, \quad j = 2 \\ T_{1,j} = 0 & j = 1 \rightarrow 3 \\ T_{4,j} = 20 & j = 1 \rightarrow 3 \\ T_{i,1} = 0 & i = 1 \rightarrow 4 \\ T_{i,3} = 20 & i = 1 \rightarrow 4 \end{cases}$$

On a 2 inconnus : $T_{2,2}$ et $T_{3,2}$, donc il faut 2 équations :

$$\begin{cases} T_{3,2} + T_{1,2} + T_{2,3} + T_{2,1} - 4T_{2,2} \approx 10h^2 & i = 2, \quad j = 2 \\ T_{4,2} + T_{2,2} + T_{3,3} + T_{3,1} - 4T_{3,2} \approx 10h^2 & i = 3, \quad j = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4T_{2,2} + T_{3,2} \approx 10h^2 - T_{1,2} - T_{2,3} - T_{2,1} \\ T_{2,2} - 4T_{3,2} \approx 10h^2 - T_{4,2} - T_{3,3} - T_{3,1} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 10h^2 - T_{1,2} - T_{2,3} - T_{2,1} \\ 10h^2 - T_{4,2} - T_{3,3} - T_{3,1} \end{Bmatrix}$$

Application Numérique :

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 10(0.5)^2 - 0 - 20 - 0 \\ 10(0.5)^2 - 20 - 20 - 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 7.1667 \\ 11.1667 \end{Bmatrix}$$

A.2.2 Exercice 2.2 :

Équation de Laplace, Condition de type Dirichlet et Neumann avec : $h = 1 \Rightarrow n = 3$ et $m = 3$

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h^2} \approx 0$$

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} \approx 0$$

$$\begin{cases} T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} \approx 0 & i = 2, j = 2 \\ T_{1,j} = 50 & j = 1 \rightarrow 3 \\ \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{h} \approx 0 & i = 3, j = 1 \rightarrow 3 \\ T_{i,1} = 50 & i = 2, j = 1 \\ T_{i,3} = 100 & i = 2, j = 3 \end{cases}$$

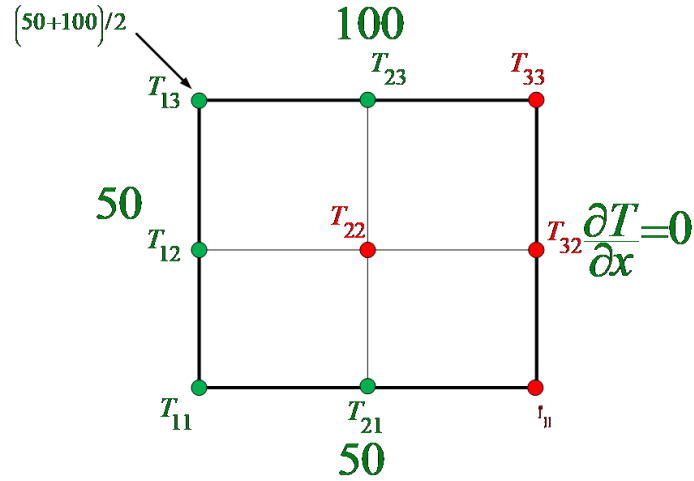


FIGURE A.2 – Maillage et Conditions aux limites

$$\Rightarrow \begin{cases} T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} \approx 0 & i = 2, j = 2 \\ T_{1,j} = 50 \\ T_{3,j} - T_{2,j} \approx 0 & j = 1 \rightarrow 3 \\ T_{2,1} = 50 \\ T_{2,3} = 100 \end{cases}$$

On a 4 inconnus :

$$T_{2,2}, \quad T_{3,1}, \quad T_{3,2} \quad \text{et} \quad T_{3,3}$$

, donc il faut 4 équations :

$$\begin{cases} T_{3,2} + T_{1,2} + T_{2,3} + T_{2,1} - 4T_{2,2} \approx 0 \\ T_{3,1} - T_{2,1} \approx 0 \\ T_{3,2} - T_{2,2} \approx 0 \\ T_{3,3} - T_{2,3} \approx 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_{3,2} - 4T_{2,2} \approx -T_{1,2} - T_{2,3} - T_{2,1} \\ T_{3,1} \approx T_{2,1} \\ T_{3,2} - T_{2,2} \approx 0 \\ T_{3,3} \approx T_{2,3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4T_{2,2} + 0 \times T_{3,1} + T_{3,2} + 0 \times T_{3,3} \approx -T_{1,2} - T_{2,3} - T_{2,1} \\ 0 \times T_{2,2} + T_{3,1} + 0 \times T_{3,2} + 0 \times T_{3,3} \approx T_{2,1} \\ -1 \times T_{2,2} + 0 \times T_{3,1} + T_{3,2} + 0 \times T_{3,3} \approx 0 \\ 0 \times T_{2,2} + 0 \times T_{3,1} + 0 \times T_{3,2} + T_{3,3} \approx T_{2,3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,1} \\ T_{3,2} \\ T_{3,3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -T_{1,2} - T_{2,3} - T_{2,1} \\ T_{2,1} \\ 0 \\ T_{2,3} \end{pmatrix}$$

Application Numérique :

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,1} \\ T_{3,2} \\ T_{3,3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -50 - 100 - 50 \\ 50 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,1} \\ T_{3,2} \\ T_{3,3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 66.67 \\ 50.00 \\ 66.67 \\ 100.0 \end{pmatrix}$$

A.2.3 Exercice 2.3 :

Equation de Helmholtz, Condition de type Dirichlet avec : $h = 0.5 \Rightarrow n = 4$ et $m = 3$
et avec : $k = 1$

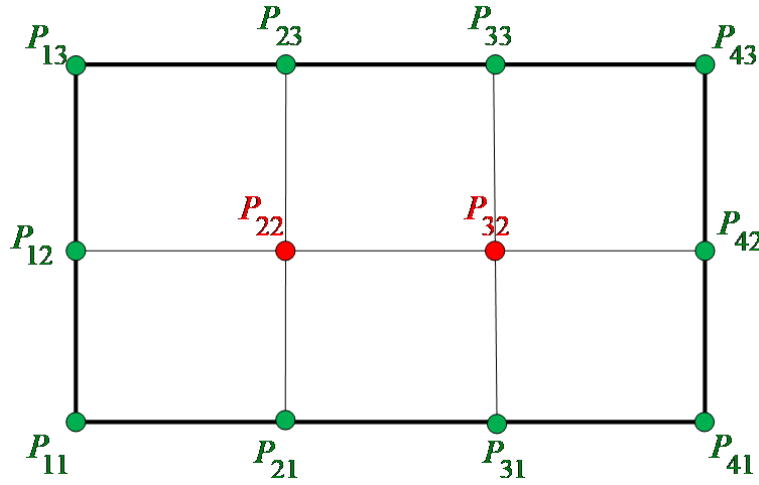


FIGURE A.3 – Maillage et Conditions aux limites

$$\frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial y^2} + P(x,y) \approx \frac{P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}}{h^2} + \frac{P_{i,j+1} - 2P_{i,j} + P_{i,j-1}}{h^2} + P_{i,j} \approx 0$$

$$\Rightarrow P_{i+1,j} + P_{i-1,j} + P_{i,j+1} + P_{i,j-1} + (h^2 - 4) P_{i,j} \approx 0$$

$$\begin{cases} P_{i+1,j} + P_{i-1,j} + P_{i,j+1} + P_{i,j-1} + (h^2 - 4) P_{i,j} \approx 0 & i = 2 \rightarrow 3, \quad j = 2 \\ P_{1,j} = 0 & j = 1 \rightarrow 3 \\ P_{4,j} = 1 & j = 1 \rightarrow 3 \\ P_{i,1} = 0 & i = 1 \rightarrow 4 \\ P_{i,3} = 1 & i = 1 \rightarrow 4 \end{cases}$$

La valeur de P sur les nœuds des coins sera moyennée :

$$P_{1,1} = (0 + 0)/2$$

$$P_{4,1} = (1 + 0)/2$$

$$P_{4,3} = (1 + 1)/2$$

$$P_{1,3} = (1 + 0)/2$$

On a 2 inconnus : $P_{2,2}$ et $P_{3,2}$, donc il faut 2 équations :

$$\begin{cases} P_{3,2} + P_{1,2} + P_{2,3} + P_{2,1} + (h^2 - 4) P_{2,2} \approx 0 & i = 2, \quad j = 2 \\ P_{4,2} + P_{2,2} + P_{3,3} + P_{3,1} + (h^2 - 4) P_{3,2} \approx 0 & i = 3, \quad j = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (h^2 - 4) P_{2,2} + P_{3,2} \approx -P_{1,2} - P_{2,3} - P_{2,1} \\ P_{2,2} + (h^2 - 4) P_{3,2} \approx -P_{4,2} - P_{3,3} - P_{3,1} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} (h^2 - 4) & 1 \\ 1 & (h^2 - 4) \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} P_{2,2} \\ P_{3,2} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} -P_{1,2} - P_{2,3} - P_{2,1} \\ -P_{4,2} - P_{3,3} - P_{3,1} \end{Bmatrix}$$

Application Numérique :

$$\begin{vmatrix} ((0.5)^2 - 4) & 1 \\ 1 & ((0.5)^2 - 4) \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} P_{2,2} \\ P_{3,2} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} -0-1-0 \\ -1-1-0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} P_{2,2} \\ P_{3,2} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 0.4402 \\ 0.6507 \end{Bmatrix}$$

A.3 Chapitre 3

A.3.1 Exercice 3.1 :

avec : $h = 0.5 \Rightarrow n = 4$ et $m = 3$

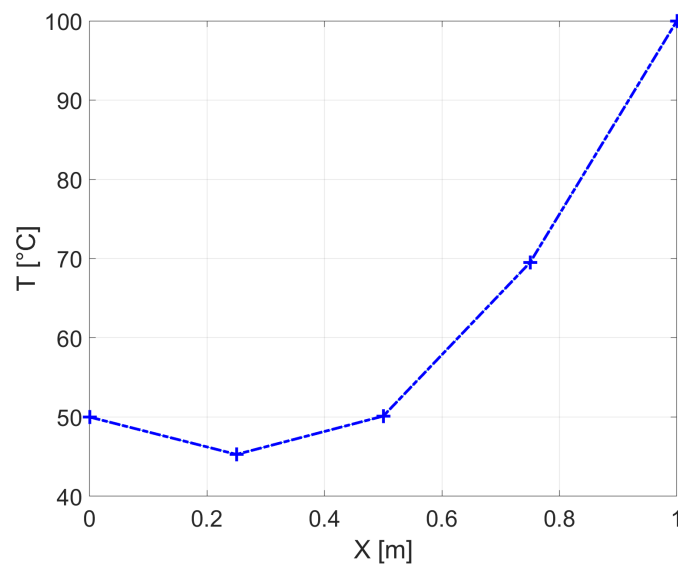


FIGURE A.4 – Solution Stable $\Delta x = 0.25$ et $\Delta t = 0.01$

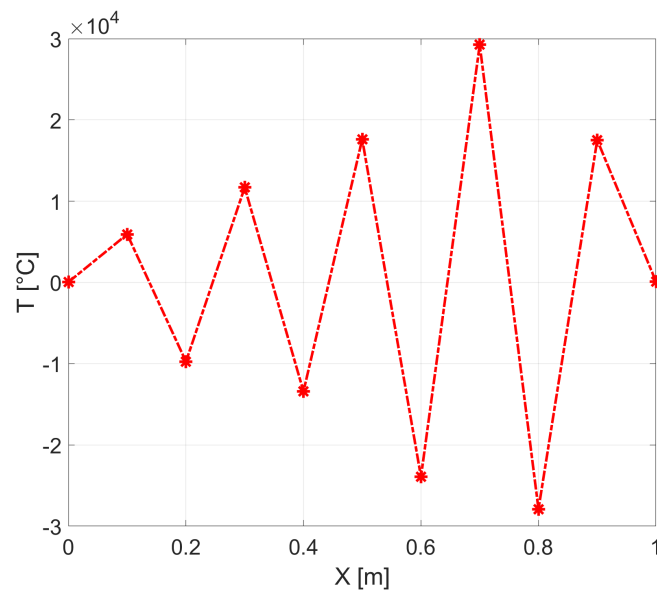


FIGURE A.5 – Solution Instable $\Delta x = 0.1$ et $\Delta t = 0.01$

A.4 Chapitre 5

A.4.1 Exercice 5.1 :

Le nombre d'élément est égal à 3 et la longueur de la barre $L=1.2m$ ceci donne une taille d'élément égale à $\Delta x = 0.4m$. Il y a un seul élément intermédiaire (le deuxième élément), et deux éléments aux extrémités. On intègre l'éq $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ sur le volume élémentaire : $\int_{dv} \frac{d^2 T}{dx^2} dv = 0$

$$\Rightarrow \int_{x_g}^{x_d} \frac{d^2 T}{dx^2} A dx = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_d} - \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_g} = 0$$

Pour l'élément intermédiaire $i=2$:

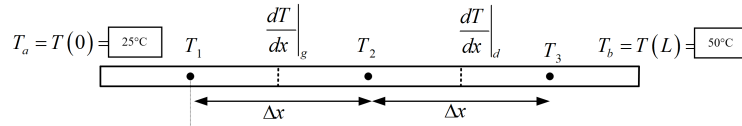


FIGURE A.6 – Maillage Volumes Finies

Par une approximation centrée on obtient :

$$\frac{T_3 - T_2}{\Delta x} - \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta x} (T_3 - 2T_2 + T_1) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$T_3 - 2T_2 + T_1 = 0$$

Pour le premier élément $i=1$ (à l'extrême gauche) l'équation donne (approximation ascendante à gauche et centrée à droite) :

$$\frac{T_2 - T_1}{\Delta x} - \frac{T_1 - T_a}{\frac{\Delta x}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta x} (T_2 - 3T_1 + 2T_a) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$T_2 - 3T_1 + 2T_a = 0$$

Pour le troisième élément $i=3$ (à l'extrême droite) l'éq donne (approximation descendante à droite et centrée à gauche) :

$$\frac{T_b - T_3}{\frac{\Delta x}{2}} - \frac{T_3 - T_2}{\Delta x} = 0$$

On obtient le système d'équation :

$$\begin{cases} T_3 - 2T_2 + T_1 = 0 \\ T_2 - 3T_1 + 2T_a = 0 \\ 2T_b - 3T_3 + T_2 = 0 \end{cases}$$

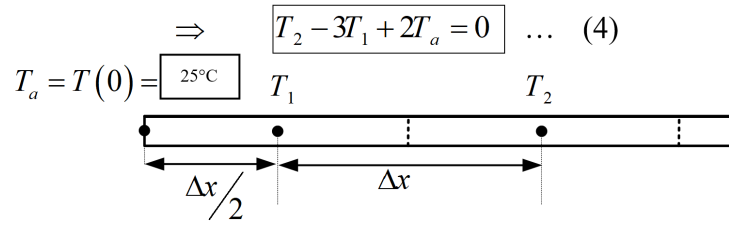


FIGURE A.7 – Condition à la limite gauche

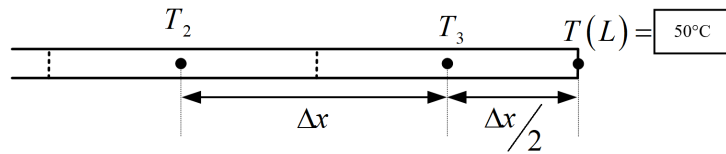


FIGURE A.8 – Condition à la limite droite

$$\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_1 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2T_a \\ -2T_b \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} T_1 = 58.333^\circ\text{C} \\ T_2 = 75.00^\circ\text{C} \\ T_3 = 91.66^\circ\text{C} \end{cases}$$

Analytiquement :

L'équation avec les conditions aux limites donnent :

$$\begin{cases} T(x) = C_1x + C_2 \\ T(0) = 25^\circ\text{C} \\ T(1.2) = 50^\circ\text{C} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} C_2 = 25 \\ T(1.2) = C_1 \cdot 1.2 + 25 = 50 \Rightarrow C_1 = \frac{25}{1.2} = 20.8333 \end{cases}$$

$$T(x) = \frac{25}{1.2}x + 25$$