

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE DE IBN KHALDOUN TIARET

Faculté des sciences appliquées Département de Génie mécanique

Mécanique de la rupture et endommagement

Polycopié de Cours

Préparée par Monsieur :

Zagane Mohammed El Sallah

Les experts :

- -Baltach Abdelghani
- Benouis Ali

AVANT-PROPOS

La prévention des ruptures en service est un objectif permanent des concepteurs, des constructeurs et des utilisateurs qu'il s'agisse du secteur de l'énergie (centrales thermiques, alternateurs) du secteur pétrolier (gazoducs, oléoducs), du secteur aéronautique (cellules). des transports ferroviaires et routiers, des travaux publics (ponts, barrages, pilonnes). de biens de consommation (automobiles).

Cette prévention a été longtemps réalisée par un sur dimensionnement des structures, et des règles de contrôle et de maintenance très pénalisantes au niveau du coût d'exploitation, à partir des calculs de résistance des matériaux qui ne teint pas compte des déformations locales.

Un certain nombre "d'accidents", puis la nécessité d'alléger les structures et de faim face à des sollicitations mécaniques, thermiques. d'environnement. de plus en plus sévères. ont exigé une évaluation beaucoup plus précise des efforts et des déformations •locales", et une estimation aussi proche de la réalité des risques de rupture liés à la présence de défauts de fabrication ou créés en service. C'est là l'origine de la mécanique de la rupture avec comme objectifs et conséquences :

- Montrer que la fragilité des matériaux est liée a la propagation des fissures
- La détermination des contraintes et déformations locales liées à l'existence d'une entaille ou une fissure
- La détermination de la capacité de résistance d'un matériau à l'extension d'un défaut, au moyen d'essais appropriés.
- La prévention de la longévité des structures comportant des défauts de dimensions connues.
- La mise au point de nouvelle méthode de calcul des structures et procédures de contrôle. de maintenance, fiables permettant une exploitation optimum.
- Caractériser le comportement à la fissuration des structures.
- Calculer la longueur de la fissure critique.
- Connaître notamment le champ de contraintes, la taille de la fissure et la résistance à la fissuration du matériau.
- Établir la différence entre la résistance a la traction et la ténacité.
- Caractériser le comportement en fatigue.

Cette polycopie est donc principalement destinée à des étudiants en master LMD ou des ingénieurs déjà familiarisent avec la science des matériaux et qui voudraient approfondir les

phénomènes spécifiques conduisant à la rupture, tout en ayant une vision globale de leur variété. Par cette lecture, ils pourront acquérir une connaissance fine, mais la plus complète possible, des mécanismes de rupture, développant ainsi une capacité à prévenir les défaillances par la connaissance des conditions qui leur donnent naissance. De plus, en cas de rupture en service, ils pourront, par 1'examen des pièces rompues, déterminer, et donnent à combattre, les causes de ruine.

Ce travail s'articule sur quatre chapitres: le premier sera consacré à une présentation générale de différents types physiques de rupture : ruptures fragiles et ductiles, transition fragile ductile et fissuration. Le deuxième chapitre on comprend sur la mécanique de la rupture linéaire et Élastique (LEFM) : Théorie énergétique Griffith (G), facteur de concentration de contrainte, champs de contraintes et de déplacements au voisinage d'une fissure, facteur d'intensité de contrainte, ténacité, critère d'énergie,. Alors que le troisième chapitre traite l'aspect de la mécanique de la rupture élastique plastique : notion de CTOD (crack tip opening displacement), l'intégrale J, plasticité au front de la fissure (Rp). la dernière chapitre sur le phénomène de la fatigue des matériaux : Courbe de S-N (Wöhler), Loi de Miner (endommagement cumulatif), Loi de Paris, Facteur de sécurité, Endommagement (D), Diagramme de Goodman.

À la fin, une série d'exercices clôturent ce manuel. chacun d'eux comprend des exercices avec énoncé et une solution complète.

Enfin, ce polycopié constitue une référence pédagogique orientée au niveau de l'université de Tiaret, dans l'objectif de faciliter toutes consultations ou enseignement du module concerné.

Table des matières

Avant proposErreur! Signet nor	ı défini
Chapitre I : Introduction à la mécanique de la rupture et fatigue	2
I.1.Aperçu sur la rupture	3
I.2. Utilisation de la mécanique de la rupture en conception	
I.3 La rupture des matériaux – classifications et faciès	
I.4 Types de rupture	
I.4.1 Rupture fragile	
I.4.2 Rupture ductile	
I.5 Critère d'Energie	
I.6 Mode de propagation des fissures	
I.7 Concept d'intensité des contraintes	
I.8 Propagation des fissures et concept de tolérance au dommage	
I.9 Influence des propriétés des matériaux sur la rupture	
Chapitre II : Mécanique de la rupture linéaire et élastique	19
II.1 Concentration de contraintes près d'un défaut	20
II.1.2 Détermination théorique du facteur de concentration de contraintes	21
II.2 Théorie énergétiques de Griffith	22
II.3 Description des champs des contraintes au voisinage d'une fissure à l'aide du FIC.	25
II.4 Relation entre le facteur d'intensité des contraintes et l'energie de Griffith	28
II.6 Principe de superposition en mécanique linéaire de la rupture	
II.7 Relation entre le facteur d'intensité des contraintes et le comportement global	33
II.8 Propagation brutale des fissures-ténacité des matériaux	
II.9 Propagation instable- courbe R de résistance à la rupture	38
II.10. Zone plastique à fond de fissure	40
II.11 Mode de rupture mixte	43
Chapitre III : Mécanique de la rupture élastique plastique	47
III.1. Introduction	15
III.1. Notion de CTOD	
III.2. Intégrale J	
III.1. Relation entre l'intégrale J et le CTODErreur ! Signet non	
III.2. Courbe J_R de résistance à la fissuration	
III.1. Rupture contrôlée par l'intégrale J	
III.2. Tri axialité des contraintes en plasticité étendue	
Chapitre IV : Fatigue des matériaux	62
IV.1. Introduction	63
IV.2. Approche globale : les courbes de Wölher	
IV.3. Approche différentielle : la loi de Paris	
IV.4. Initiation, propagation des fissures et fractographie	
IV.5.Diagramme de Goodman - Smith	

Exercices proposés	76
Bibliographie	
Annexes	

Chapitre I

Introduction à la mécanique de la rupture et fatigue

INTRODUCTION

La Mécanique de la Rupture (MLR) est une discipline qui exploite les principes classiques de la mécanique des fractures à partir d'une imperfection préexistante, comme une fissure ou un défaut. Elle permet, dans certains cas, de prédire la vitesse de propagation d'une fissure et la taille à partir de laquelle cette fissure peut entraîner une défaillance soudaine, en fonction des dimensions de la fissure et des conditions de chargement

Lorsqu'un composant est soumis à divers types de sollicitations, il existe des limites en termes de contraintes ou de déformations qu'il ne doit pas dépasser, sous peine d'endommager le matériau et de provoquer une rupture. Selon que l'on examine la détérioration du matériau à l'échelle microscopique ou macroscopique, deux approches peuvent être adoptées :

La mécanique de l'endommagement vise à décrire de manière continue la détérioration progressive du matériau due à l'apparition, à la croissance et à la coalescence de microfissures ou de microcavités présentes dans le matériau. Cette approche, initialement introduite par Kachanov, a été développée par plusieurs chercheurs tels que Chaboche, Lemaître, Bui, Ehrlacher, Gurson, Tvergaard, Needleman, Rousselier, et d'autres.

La mécanique de la rupture se concentre sur l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures visibles à l'œil nu. Cela implique notamment la détermination des champs de contraintes et de déformations autour de l'extrémité d'une fissure. L'analyse de ces champs mécaniques permet ensuite d'évaluer la stabilité de la fissure. Nous verrons également par la suite qu'il est possible d'aborder la mécanique de la rupture en utilisant une approche énergétique du solide fissuré.

I.1.Aperçu sur la rupture

L'idée de prévenir la rupture n'est pas nouvelle en soi. Les concepteurs de structures anciennes, telles que les pyramides de l'Égypte des pharaons ou les édifices de l'empire romain, nous ont laissé des exemples durables que nous pouvons encore admirer aujourd'hui. Cependant, avant la révolution industrielle, les matériaux disponibles étaient principalement limités au bois, à la pierre, à la brique et au mortier. La brique et le mortier étaient relativement fragiles lorsqu'ils étaient soumis à des forces de traction. Par conséquent, toutes ces anciennes structures (pyramides, ponts romains, etc.) qui ont résisté à l'épreuve du temps étaient principalement conçues pour résister à des charges de compression.

L'introduction de nouveaux matériaux ductiles, tels que l'acier et d'autres alliages métalliques, pour supporter des forces de traction a cependant posé quelques problèmes. Des ruptures se produisaient parfois à des niveaux de charges bien inférieurs à la limite d'élasticité du matériau. C'est ainsi que la recherche en mécanique de la rupture a dû être développée. Les premières expérimentations sur la rupture ont été menées bien avant la révolution industrielle par Léonard de Vinci (1452-1519). Il a démontré que la résistance à la traction d'un fil de fer diminuait à mesure que la longueur du fil augmentait. Ce résultat suggérait déjà que la présence de défauts dans le matériau influençait sa résistance : plus le volume du matériau est important (comme dans le cas d'un fil de fer long), plus la probabilité de présence de fissures est élevée. Cette interprétation qualitative a été précisée ultérieurement en 1920 par Griffith, qui a établi une relation directe entre la taille des défauts et la contrainte de rupture.

I.2. Utilisation de la mécanique de la rupture en conception

Il existe deux approches couramment utilisées pour la conception de structures (voir Figure I.1). La première, plus traditionnelle, repose sur la limite d'élasticité du matériau, symbolisée par σ_e . En revanche, la seconde s'appuie sur le concept de ténacité KC, issu de la mécanique linéaire de la rupture (MLR). Dans le premier cas, les structures sont dimensionnées de manière à maintenir les contraintes appliquées (σ) en dessous de la limite d'élasticité ($\sigma < \sigma_e$).

Pour prévenir tout risque de rupture fragile, il est courant d'introduire un coefficient de sécurité ($\sigma < \alpha \sigma_e$ avec $\alpha < 1$). Cette approche, entièrement définie par les variables σ et σ_e , ne prend pas en compte la présence éventuelle de défauts, tels que des microfissures.

En revanche, l'approche basée sur la mécanique linéaire de la rupture implique trois variables : la contrainte appliquée (σ) , la ténacité KC (qui remplace la limite d'élasticité), et une nouvelle variable liée à la taille du défaut. Dans le cadre de cette approche, deux études alternatives sont possibles : l'une se base sur un critère d'énergie, tandis que l'autre utilise le concept d'intensité des contraintes critiques. Ces deux études sont équivalentes dans certaines conditions. Dans les deux prochaines sections, nous présenterons brièvement ces deux études alternatives, puis nous détaillerons leurs hypothèses et exposons les calculs associés.

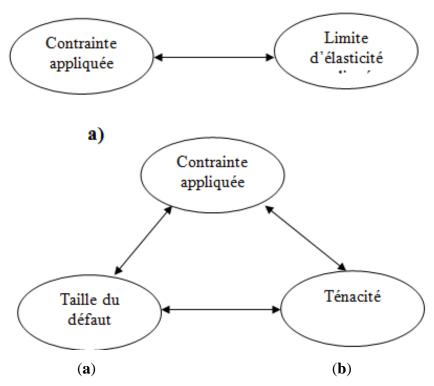


Figure I.1 : Comparaison de l'approche classique (a) et de l'approche utilisant la MLR (b)

I.3 La rupture des matériaux – classifications et faciès

I.3.1 Généralités :

Les études menées sur les matériaux ont révélé que la propagation de la rupture est principalement attribuable aux défauts présents dans le matériau. Les conditions de fonctionnement, notamment la température et la vitesse de sollicitation, jouent un rôle crucial dans ce phénomène. La théorie de la mécanique de la rupture constitue un moyen d'évaluer la stabilité des fissures susceptibles de se former en raison de ces défauts. Elle permet de prédire l'évolution des fissures jusqu'à ce qu'elles entraînent la défaillance de la structure.

Analyse des contraintes au voisinage d'un trou elliptique :

La première approche, formulée par Inglis en 1913, a démontré que la contrainte au niveau du fond d'un trou elliptique dans une plaque soumise à une traction σ est considérablement plus élevée que la contrainte dans une région éloignée de ce trou (voir Figure I.2).

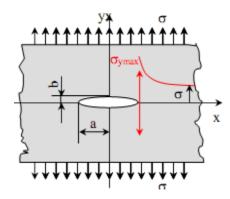


Figure. I.2: Analyse des contraintes au voisinage d'un trou elliptique.

I.3 Mécanismes de rupture

La rupture altère la cohésion des matériaux en créant des discontinuités à l'échelle microscopique, telles que des microfissures ou des cavités, ainsi que des fissures dans les structures mécaniques. Les origines et mécanismes de ces ruptures sont examinés grâce à des techniques telles que la fractographie à l'échelle macroscopique, la microfractographie à l'aide du microscope électronique à balayage (MEB), ou encore par l'analyse des caractéristiques des surfaces de rupture.

I.4 Types de rupture

Rupture par fissuration rapide : ductile, semi-fragile, fragile ; Rupture par fissuration progressive :

- En cas de sollicitations statiques : corrosion sous contrainte, fluage, ...
- En cas de sollicitations cycliques : fatigue mécanique, fatigue thermique ;
- Lors de sollicitations complexes : fatigue-corrosion, fatigue-fluage, ...

I.4.1 Rupture fragile

Mécanisme : Il se produit au niveau des liaisons atomiques internes sans entraîner de déformation plastique à l'échelle macroscopique.

Conditions : Il survient lorsque l'énergie locale de déformation causée par des contraintes externes atteint le seuil requis pour la dissociation des liaisons atomiques.

Caractéristiques:

- La fissure se propage très rapidement.
- Il nécessite une quantité d'énergie minimale.
- Les imperfections et les irrégularités géométriques jouent un rôle fondamental dans l'amorçage de la rupture.



Figure. I.3 : Faciès de rupture d'une éprouvette de Charpy rompue à -70 °C.

a) Rupture fragile transgranulaire (à clivage)

La rupture suit des plans cristallographiques à travers le grain, appelés "plans de clivage", et présente un aspect brillant (voir Figure I.4).

- (a) À l'échelle macroscopique, la surface de rupture est perpendiculaire à la direction de la sollicitation.
- (b) À l'échelle microscopique, on observe une rupture des liaisons interatomiques dans une direction perpendiculaire au plan de rupture.
- (c) Toujours à l'échelle microscopique, on peut observer une rupture transgranulaire, où la fissure suit les plans et directions cristallographiques à l'intérieur de chaque grain.

La rupture suit des plans cristallographiques à travers le grain (plans de clivage). Faciès de rupture cristalline (aspect brillant (figure. I.4)).

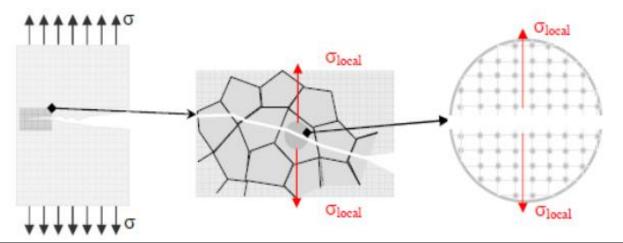


Figure. I.4: La rupture par clivage à différentes échelles:

Lorsque la fissure interagit avec les imperfections microstructurales ou les variations de composition du métal, cela génère des micro-reliefs distinctifs. Ces micro-reliefs se manifestent sous forme de marques et de marches sur les surfaces de clivage, communément appelées "rivières" (voir Figure I.5), et sous forme de languettes observées lors de l'analyse fractographique (voir Figure I.5).

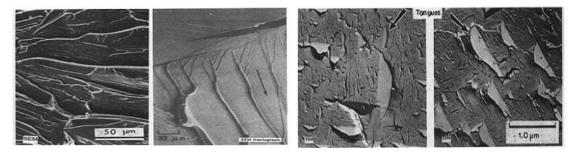


Figure I.5 : Types de rupture fragile transgranulaire (à clivage): Languettes

Les rivières se forment de deux manières principales :

Par l'interaction entre le plan de clivage et les dislocations vis, ce qui entraîne leur convergence dans la direction de la fissure.

Par la jonction de deux plans de clivage adjacents, lesquels convergent également dans la direction de propagation de la fissure.

Lorsqu'une fissure traverse une limite de grain, deux scénarios se produisent en fonction de l'orientation de la fissure par rapport à la taille du grain :

Soit les rivières se multiplient.

Soit il y a un réamorçage de la fissure dans le grain voisin.

La rupture à basse température se produit principalement par clivage, et cela ne se produit que lorsque la limite d'élasticité du matériau est atteinte. La rupture fragile transgranulaire est particulièrement fréquente dans les structures cristallines à centres cubiques (C.C.), telles que les aciers au carbone, et les structures hexagonales compactes (H.C.), telles que le zinc et le magnésium. En revanche, les structures cristallines à faces centrées (C.F.C.), comme celles du cuivre et de l'aluminium, sont moins susceptibles de subir un clivage.

À des températures plus basses, dans les structures cristallines C.C. ou H.C., l'agitation thermique, qui facilite le déplacement des dislocations, est réduite, ce qui bloque les dislocations et augmente la limite d'élasticité (ce qui signifie une augmentation de la résistance intrinsèque du matériau). La zone plastique devient très restreinte en taille, ce qui favorise la rupture par clivage. Plus précisément, les atomes commencent à se séparer les uns des autres lorsque la contrainte atteint environ 1/15 de la limite d'élasticité du matériau.

Bien que le profil théorique indique que la contrainte au voisinage de la fissure tend vers l'infini, dans la pratique, les défauts métallurgiques et la zone plastique qui se forme limitent cette contrainte à une valeur élevée mais finie (voir Figure I.6).

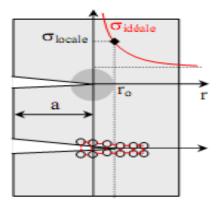


Figure I.6: Propagation de la fissure par clivage.

b) Rupture fragile intergranulaire

Ce type de rupture est caractérisé par une décohésion intergranulaire, où la fissure suit les joints entre les grains du matériau.

Mécanismes :

Cette rupture se produit généralement en raison de l'accumulation d'impuretés ou d'inclusions, telles que la présence de phases secondaires à l'interface des grains ou la ségrégation d'un élément chimique. Ces facteurs introduisent une fragilité dans le matériau, par exemple, la fragilité induite par le revenu.

Caractéristiques:

À l'échelle microscopique, la rupture présente deux aspects distincts (voir Figure I.7) :

Un aspect lisse, lorsque la fissure suit les joints entre les grains, accompagné d'une déformation plastique réduite.

Un aspect de cupules, qui peut être observé lorsque la rupture se produit.

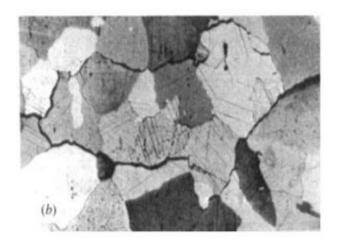


Figure I.7 : Aspect de rupture intergranulaire à l'échelle microscopique.

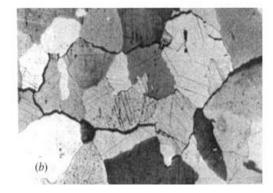
La rupture se produit en suivant les facettes des grains, provoquant la détérioration des joints entre les grains. La rupture intergranulaire peut prendre deux formes distinctes :

- Rupture fragile à basse température : Cela se produit lorsque les éléments d'impuretés ségrégés aux joints de grains réduisent l'énergie de cohésion de ces joints.
- Rupture intergranulaire due au fluage à des températures moyennes et élevées (généralement supérieures ou égales à 1/3 de la température de fusion). Les défauts qui conduisent à ce type de rupture sont initialement des cavités, suivies de leur multiplication ou de la décohésion des points triples.

I.5. Approche atomique de la rupture fragile :

La rupture fragile s'accompagne d'une déformation plastique très limitée. Dans le cas des alliages métalliques, elle peut se présenter de deux manières (voir Figure I.8) :

- Transgranulaire : rupture par clivage ou par glissement à l'intérieur d'un grain.
- Intergranulaire : rupture par glissement le long des joints de grains.



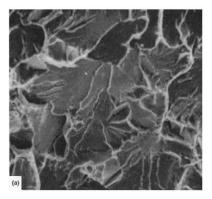


Figure I.8 : (a) Clivage dans un acier doux ruptures transgranulaire (clivage) et (b) intergranulaire (décohésion) dans un acier doux a gros grains.

L'approche atomique consiste à examiner une rupture par clivage en tenant compte des forces entre les liaisons atomiques. La Figure I.9 illustre de manière schématique ce type de rupture fragile qui se développe en mode d'ouverture, ou mode I, conformément à la classification de la Mécanique de la Rupture Linéaire (MLR).

Le clivage se produit par la rupture des liaisons interatomiques dans une direction perpendiculaire au plan de rupture. Ce processus préférentiel se déroule le long de plans atomiques spécifiques qui dépendent du matériau. Par exemple, les matériaux cubiques centrés clivent selon les plans (100), tandis que les matériaux cubiques à faces centrées résistent davantage à ce type de rupture.

Pour calculer la contrainte de liaison atomique, il est nécessaire d'introduire la distance interatomique r, puis d'examiner la relation entre le déplacement des atomes par rapport à leur position d'équilibre r0 et la force appliquée. Cette force résultante est composée d'une composante d'attraction (proportionnelle à $1/\ r^2$) et d'une composante de répulsion (proportionnelle à $-1/\ r^9$). Par conséquent, la contrainte de liaison atomique suit la forme suivante:

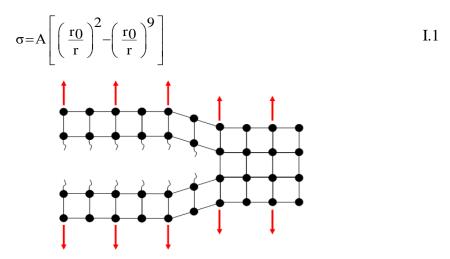


Figure I.9 : rupture par clivage (mode I de rupture

Par la suite, lorsque nous parlons de la contrainte théorique de clivage, nous faisons référence à la valeur maximale, notée σc , de la fonction $\sigma(r)$ dont la courbe est illustrée sur la Figure I.10. Afin de faciliter la comparaison entre les valeurs théoriques et expérimentales de la contrainte de rupture par clivage, nous allons fournir une approximation de la valeur théorique à l'aide de deux méthodes distinctes.

Première méthode:

En considérant que la déformation est donnée par $\varepsilon = \log(r/r0)$, le module d'Young E peut être exprimé de la manière suivante :

$$E = \frac{d\sigma}{d\epsilon}\Big|_{r \, \blacksquare \, r_0} = r_0 \, \frac{d\sigma}{dr}\Big|_{r \, \blacksquare \, r_0}$$
 I.2

soit en utilisant la relation II.1:

$$E = 7 A$$
 I.3

La contrainte théorique de clivage σ_C est définie par la condition d $d\sigma/dr = 0$, soit $r_O/r = 0.18$

Il vient finalement:

$$\sigma_{\rm c} = \frac{\rm E}{14}$$
 I.4

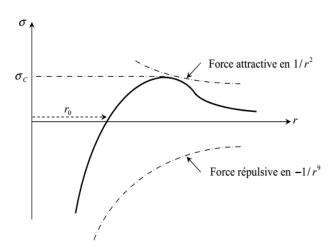


Figure I.10: Courbe représentative de la fonction r tend vers $\sigma(r)$

Deuxième méthode:

Pour simplifier les calculs, il est parfois choisi de modéliser la portion de la courbe représentative de la fonction $\sigma(r)$ correspondant aux abscisses supérieures ou égales à r0 comme une sinusoïde (voir Figure I.11). Dans cette approche, la quantité α est définie de manière à ce que le produit $\alpha r0$ soit l'abscisse à laquelle la contrainte maximale est atteinte. Sous cette hypothèse, la contrainte de liaison pour r > r0 peut être exprimée comme suit :

$$\sigma = \sigma_{c} \sin \left[\frac{\pi}{2(\alpha - 1)} \left(\frac{r}{r_{0}} - 1 \right) \right]$$
 I.5

Si bien que le module d'Young devient :

$$E = r_0 \frac{d\sigma}{dr} \Big|_{r \, \blacksquare \, r_0} = \sigma_c \frac{\pi}{2(\alpha - 1)}$$
 I.6

$$W = \int_{r_0}^{(2\alpha - 1)r_0} \sigma dr$$
 I.7

D'autre part, on appelle **énergie de cohésion** par unité de surface, la quantité notée *W*, et définie par :

(aire hachurée – figure I.4), soit :

$$W=4\frac{\alpha-1}{\pi}r_0\sigma_c$$

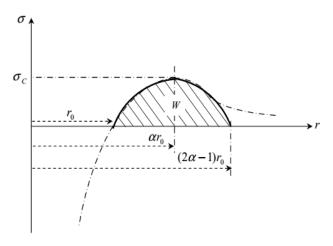


Figure I.11 : approximation sinusoïdale de la contrainte de liaison σ .

Or lors de la rupture, deux surfaces sont créées : on décide donc de poser $W = 2\gamma_s$.

Où γ_S est appelée l'énergie de création de surface. Ce qui nous permet d'écrire la nouvelle formule :

$$\gamma_{s} = 2 \frac{\alpha - 1}{\pi} r_{0} \sigma_{c}$$
 I.8

La comparaison des égalités II.6 et II.8 permet d'éliminer le coefficient α et d'obtenir L'expression $\gamma_s = \frac{\sigma_c}{E} r_0 \sigma_c$, soit :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{r_0}}$$
 I.9

Comme l'énergie de création de surface dans les matériaux métalliques est reliée au module d'Young par une relation empirique de la forme $\gamma_S \approx Eb/k$ où $b \approx r_O$ est appelé vecteur de Burgers et k est une constante comprise entre 16 et 100, nous obtenons un encadrement de la contrainte théorique de clivage

$$\frac{E}{10} \le \sigma_c \le \frac{E}{4}$$
 I.10

I.6 Rupture ductile

Dans ce cas, le matériau subit une plasticité progressive, et une fissure stable peut éventuellement se développer à l'intérieur de la matière. L'endommagement peut se propager de manière diffuse et relativement importante. Les métaux à structure cubique à faces centrées présentent ce comportement, tandis que les métaux de type cubique centré restent ductiles à des températures suffisamment élevées. La rupture ductile se déroule en trois phases distinctes (voir Figure I.12):

- (i) L'amorçage de cavités autour d'inclusions.
- (ii) La croissance de ces cavités.
- (iii) La coalescence des cavités, conduisant à l'apparition d'une fissure macroscopique.

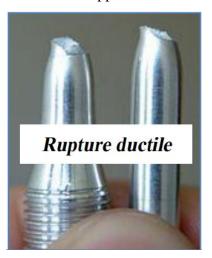


Figure I.12: Formes de rupture d'aluminium pur.

I.6.1 Critère d'Energie

L'approche énergétique repose sur le principe selon lequel l'extension d'une fissure, conduisant à la rupture, survient lorsque l'énergie fournie est suffisante pour surmonter la résistance du matériau. Cette résistance est constituée de plusieurs composantes, notamment l'énergie de création de surface, l'énergie de plastification de l'extrémité de la fissure, et éventuellement d'autres formes d'énergie dissipative liées à la propagation d'une fissure.

Griffith a été le premier à proposer un critère basé sur l'énergie pour décrire la rupture des matériaux fragiles, et ce critère a ensuite été étendu aux matériaux ductiles par d'autres chercheurs, dont Irwin et Orowan. La théorie de la rupture fragile de Griffith a été ainsi rapprochée de la rupture ductile par Irwin.

Plus précisément, Irwin a proposé de regrouper les énergies de surface (γ s) et de déformation plastique γ_P sous un seul terme, simplifiant ainsi l'expression de l'énergie totale nécessaire pour provoquer la rupture.

$$G_c = 2(\gamma_{s+}\gamma_p) G_c = \left(\frac{\pi a_{\sigma}^2}{E}\right)$$
 I.11

La fissure se propagera si:

$$\left(\frac{\pi a_{\sigma}^2}{E}\right) > G_c \qquad I.12$$

L'énergie de Griffith, notée G (également appelée taux de restitution d'énergie), est définie en relation avec la variation d'énergie par unité de surface fissurée associée à la propagation d'une fissure dans un matériau linéaire élastique. La rupture se produit lorsque la valeur de G atteint une valeur critique, notée GC. En réalité, cette valeur critique est une mesure de la ténacité du matériau.

Pour une fissure de longueur 2a (voir Figure I.13) dans une plaque de dimensions infinies (ce qui signifie que la longueur de la fissure est très petite par rapport aux dimensions de la plaque dans le plan de chargement), constituée d'un matériau ayant un module d'Young E et soumise à une contrainte nominale de traction $\sigma \infty$, l'énergie de Griffith G par unité de surface fissurée peut être exprimée comme suit :

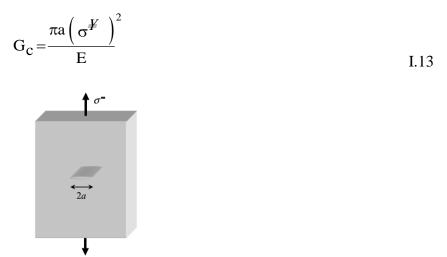


Figure I.13 : Fissure traversant de longueur 2a dans une plaque infinie

La rupture survient lorsque la contrainte appliquée $\sigma \infty$ devient suffisamment élevée pour atteindre une valeur critique σ_R . Ainsi, si GC représente la valeur critique de l'énergie associée à la contrainte appliquée σ_R , la relation précédente peut être exprimée de la manière suivante :

$$G_{c} = \frac{\pi a_{\sigma_{R}}^{2}}{E}$$
I.14

Notons que pour une valeur fixée de G_C , la contrainte à rupture σ_R varie avec ; $1/\sqrt{a}$ de même, si les valeurs G_C et σ^{∞} sont fixées, la longueur de défaut critique a_C à laquelle la rupture se produit, est donnée par :

$$a_{c} = \frac{EG_{c}}{\pi \left(\sigma^{\cancel{Y}}\right)^{2}}$$
 I.15

La figure I.14, illustre bien la différence entre l'approche classique qui fait abstraction de l'existence d'une fissure (le critère de rupture est $\sigma^{\infty} = \sigma_e$) et l'approche par la MLR qui prend en compte la présence de la fissure (σ^{∞} proportionnelles à $1/\sqrt{a}$

La zone qui se trouve en dessous des deux courbes représentant les approches précédentes, et qui est délimitée par la longueur de défaut a_0 , correspond à une approche spécifique. L'énergie de Griffith G agit comme une force motrice dans un matériau dont la résistance à la rupture est caractérisée par G_C . Cette analogie peut être établie avec l'approche basée sur la limite d'élasticité, où la contrainte joue le rôle de force motrice dans un matériau dont la résistance à la déformation plastique est déterminée par la limite d'élasticité σ_e .

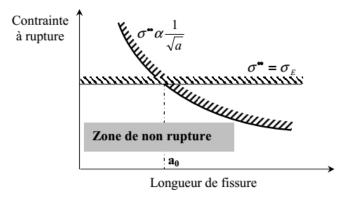


Figure I.14 : Comparaison entre l'approche classique et celle de la MLR.

Cette analogie illustre également le concept de similitude. La limite d'élasticité d'un matériau, mesurée à partir d'essais sur des éprouvettes de laboratoire, demeure indépendante de la taille des éprouvettes. Par conséquent, elle peut être appliquée à des structures de différentes tailles, à condition que le matériau soit raisonnablement homogène. Ce principe de similitude constitue l'une des hypothèses fondamentales de la mécanique de la rupture : la ténacité d'un matériau (mesurée par G_C) reste indépendante de la taille et de la géométrie de la structure fissurée. Cette hypothèse de similitude demeure valide tant que le comportement du matériau reste linéaire et élastique.

I.7 Mode de propagation des fissures

Le bilan des contraintes qui s'exercent au voisinage de l'extrémité d'une fissure va jouer un rôle de premier plan quant à la propagation de cette dernière.

En théorie, les fissures sont planes et se propagent dans leur plan, il est ainsi possible de montrer que l'état général de propagation se limite à la superposition de trois modes (figure I.15):

- ❖ Mode I (par ouverture). Les surfaces de fissure se déplacent perpendiculairement l'une à l'autre.
- ❖ Mode II (glissement droit). Les surfaces de fissure se déplacent dans le même plan et perpendiculairement au fond de fissure.
- ❖ Mode III (glissement vis). Les surfaces de fissure se déplacent dans le même plan et parallèlement au fond de fissure.

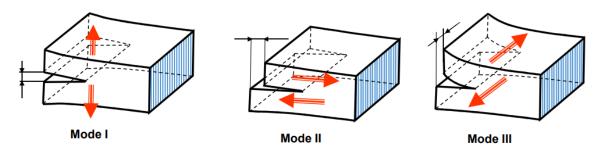


Figure I.15: les trois modes de rupture

Variation d'énergie pour la propagation d'une fissure :

- gain d'énergie élastique par apparition de surfaces libres (dW1)
- consommation d'énergie mécanique par création de ces surfaces (dW2),

$$dW = dW1 - dW2$$

Une fissure se propagera dans un matériau si elle libère plus d'énergie qu'elle en consomme pour se propager...si dW> 0, la fissure devient instable et se propage librement

I.8 Concept d'intensité des contraintes

La figure I.16 schématise l'ensemble des contraintes appliquées sur un élément centré point en un M de coordonnées polaires (r, θ) par rapport à l'extrémité d'une fissure sollicitée en mode d'ouverture ou mode I. Ces contraintes sont décrites par les relations suivantes :

$$\sigma_{XX} = \frac{K_{I}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{I}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$
I.16

$$\tau_{XX} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{I}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$
 I.17

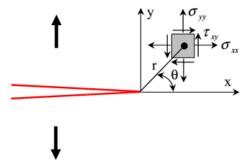


Figure I.16 : Contraintes près de l'extrémité d'une fissure

Pour différentes configurations de chargement, des formules de calcul du FIC K_I , que l'on peut trouver dans les manuels spécialisés, ont été élaborées. Dans le cas décrit par la figure I.2, il n'est connue que :

$$KI = \sigma^{\infty} \sqrt{\pi a}$$
 I.18

En comparant les formules I.1 et I.6, il apparaît que :

$$G = \frac{K_{I}^{2}}{E} \text{ et } G_{C} = \frac{K_{IC}^{2}}{E}$$
 I.19

Dans l'approche basée sur le concept de l'intégrale de l'intensité de contrainte (FIC) de la mécanique linéaire de la rupture (MLR), la rupture se produit lorsque l'intégrale de l'intensité de contrainte (K_I) atteint la valeur critique K_{IC} . Cette valeur critique représente en réalité la ténacité du matériau. Dans cette approche, le coefficient K_I agit comme une force motrice dans un matériau dont la résistance à la rupture est caractérisée par la ténacité K_{IC} . Le principe de similitude est également supposé être respecté, tout comme dans le cas de l'approche énergétique. En utilisant les relations de l'équation I.7, les deux approches sont équivalentes pour un matériau dont le comportement demeure linéaire et élastique.

I.9 Propagation des fissures et concept de tolérance au dommage

La mécanique linéaire de la rupture (MLR) permet de calculer la durée de vie d'une structure soumise à des sollicitations cycliques (phénomène de fatigue) ou exposée à des effets de corrosion sous tension. Dans ce contexte :

La vitesse de propagation des fissures est caractérisée par un paramètre tel que l'intégrale de l'intensité de contrainte (FIC).

La taille critique du défaut à ne pas dépasser est directement liée à la ténacité du matériau.

Par exemple, en ce qui concerne la fissuration par fatigue des alliages métalliques, la relation empirique de Paris est souvent utilisée pour représenter la propagation de la fissure da/dN:

$$\frac{\mathrm{da}}{\mathrm{dN}} = \mathrm{C}(\Delta \mathrm{K})^{\mathrm{m}}$$
 I.20

Où C et m sont des constantes du matériau, et ΔK l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes. Les structures inévitablement contiennent des défauts, généralement sous forme de fissures, qui sont souvent inhérents aux processus de fabrication des composants. Dans le but d'éviter que ces défauts n'atteignent une taille critique susceptible de provoquer une rupture brutale, les dimensions des structures sont soigneusement choisies. Ce concept est connu sous le nom de tolérance au dommage. La mécanique linéaire de la rupture (MLR) fournit les outils nécessaires pour déterminer cette taille critique (conformément à la relation I.3) et pour suivre la propagation de la fissure (selon la relation I.8).

L'évolution de la taille d'un défaut au fil du temps, qu'il s'agisse d'une fissure de fatigue ou de corrosion sous tension, illustre parfaitement le concept de tolérance au dommage (comme le montre la figure I.17). Dans la pratique, la longueur de fissure initiale a_0 correspond souvent à la limite de détection des méthodes de contrôle non destructif. Ensuite, la longueur critique est déterminée en fonction de la charge appliquée et de la ténacité du matériau. Le coefficient de sécurité est choisi de manière à garantir que la longueur admissible du défaut reste inférieure à la longueur critique. La durée de vie de la structure est ainsi calculée en estimant le temps nécessaire pour que la longueur du défaut évolue de a_0 à la longueur admissible.

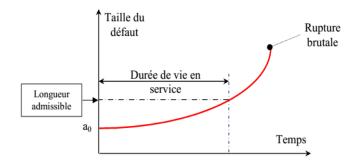


Figure I.17 Concept de tolérance au dommage.

I.10 Influence des propriétés des matériaux sur la rupture

En mécanique de la rupture, le choix du concept varie en fonction du comportement physique du matériau. Voici une classification courante de ces concepts :

- Mécanique Linéaire de la Rupture (MLR) : Utilisée pour les matériaux dont le comportement est principalement linéaire élastique. Cela inclut les alliages d'aluminium renforcés par précipitation, les aciers à haute limite élastique, les céramiques, etc.
- Mécanique Élastoplastique de la Rupture (MEPR): Appliquée aux matériaux ductiles tels que les aciers à faible ou moyenne résistance, les aciers inoxydables ou austénitiques, les alliages de cuivre, etc.
- Mécanique Dynamique de la Rupture (MDR) : Linéaire ou non linéaire, adaptée aux métaux soumis à des vitesses de déformation élevées. Le comportement peut également être viscoplastique dans ces conditions.
- Mécanique Viscoélastique de la Rupture (MVER) : Principalement utilisée pour les polymères soumis à des températures inférieures à leur température de transition vitreuse.
- Mécanique Viscoplastique de la Rupture (MVPR) : Employée pour les polymères audessus de leur température de transition, ainsi que pour les métaux et les céramiques soumis à des températures élevées.

Remarques:

Les concepts MLR et MEPR n'incluent pas explicitement l'effet du temps, tandis que les concepts MDR, MVER et MVPR le prennent en compte.

MEPR, MDR, MVER et MVPR sont souvent regroupées sous le terme plus général de Mécanique Non Linéaire de la Rupture (MLNR).

Pour une plaque fissurée soumise à une charge jusqu'à la rupture, la relation entre la contrainte à la rupture et la ténacité du matériau est schématisée dans la figure I.18. On peut observer les cas suivants :

- Pour les matériaux à faible ténacité, où la contrainte à la rupture varie linéairement avec KIC (relation I.6), la rupture fragile est le principal mécanisme de ruine de la structure, et la MLR est la plus adaptée.
- Pour les matériaux à très haute ténacité, la MLR n'est plus applicable car les propriétés d'écoulement du matériau dominent le mécanisme de rupture. Dans ce cas, une simple analyse de chargement limite permet de dimensionner les structures.

 Pour les matériaux à ténacité intermédiaire, la MLNR est souvent utilisée pour prendre en compte les comportements non linéaires de la rupture.

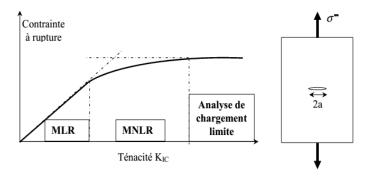


Figure I.18 : Comportement en fonction de la ténacité.

Chapitre II

Mécanique de la rupture linéaire et élastique

II.1 Concentration de contraintes près d'un défaut

II.1.1Introduction

Lorsque nous effectuons des calculs pour dimensionner des structures, nous nous appuyons principalement sur la théorie de l'élasticité. Cette théorie est valable tant que les contraintes demeurent inférieures à la limite d'élasticité du matériau et ne provoquent pas de déformations plastiques permanentes. Cependant, dans des situations telles que la fatigue des matériaux ou la corrosion sous tension, les contraintes en jeu sont généralement à des niveaux relativement faibles, où la théorie de l'élasticité reste applicable.

Dans le contexte des structures, il est souvent inévitable d'avoir des irrégularités géométriques en raison des exigences fonctionnelles, telles que des changements brusques de section comme des épaulements, des gorges, des cannelures ou des orifices de lubrification. À proximité de ces irrégularités de forme, les contraintes ne sont pas uniformes et entraı̂nent des concentrations de contraintes. Cette concentration de contraintes est bien illustrée dans la figure II.1, où l'on peut observer que la contrainte à la racine du trou est significativement plus élevée que la contrainte nominale σ_{nom} de traction appliquée à la plaque.

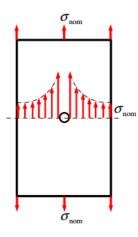


Figure II.1 : Répartition des contraintes autour d'un trou dans une plaque

Le facteur de concentration des contraintes, symbolisé par K_t , est calculé en prenant le rapport de la contrainte maximale (σ_{max}) observée à l'endroit où il y a une discontinuité géométrique ou une concentration de contrainte, par exemple à la racine d'une forme irrégulière, par rapport à la contrainte nominale (σ_{nom}) que la structure subirait en l'absence de cette discontinuité. En d'autres termes, K_t se calcule en comparant la contrainte maximale à la contrainte normale attendue sans la présence de cette discontinuité géométrique est donné par :

$$K_t = \frac{\sigma_{\text{max}}}{\sigma_{\text{min}}}$$
 II.1

La gravité de la concentration de contraintes est directement influencée par la forme géométrique et la configuration des encoches ou des discontinuités présentes dans une structure. Lors de la conception d'une structure, l'objectif principal est de minimiser autant que possible ces concentrations de contraintes, en particulier pour éviter les problèmes liés à la rupture par fatigue. Ce chapitre aborde divers aspects liés aux concentrations de contraintes et examine comment la géométrie affecte le facteur K_t . Cette question revêt une importance fondamentale dans le dimensionnement des structures en fatigue, car elle permet de déterminer comment les irrégularités géométriques influencent la résistance à la fatigue des matériaux et des composants. En comprenant ces effets, les ingénieurs peuvent concevoir des structures plus robustes et résistantes à la fatigue, ce qui contribue à assurer leur durabilité et leur sécurité à long terme.

II.1.2 Détermination théorique du facteur de concentration de contraintes

Nous prenons en considération une plaque qui présente un trou elliptique central. Il est important de noter que ce trou est significativement plus petit par rapport aux dimensions totales de la plaque, comme illustré dans la figure II.6a. Cette géométrie spécifique peut être cruciale dans le contexte de l'analyse des concentrations de contraintes et du dimensionnement des structures, car elle peut entraîner des effets significatifs sur la répartition des contraintes à travers la plaque en raison de la forme elliptique du trou.

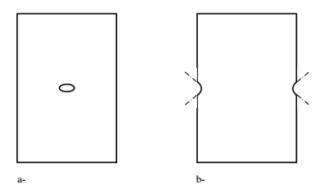


Figure II.2 a- Entaille elliptique et b- entaille hyperbolique

a) Plaque uniformément chargée

La figure II.3 illustre une plaque qui subit une charge uniforme, ce qui signifie que la contrainte $\sigma \infty$ appliquée à la plaque est dirigée perpendiculairement à ses bords à chaque point. Cette plaque présente également un petit trou elliptique. Pour analyser cette configuration de chargement, nous utilisons les conclusions du chapitre précédent pour calculer les potentiels complexes $\phi(z)$ et $\chi(z)$ associés à cette situation particulière.

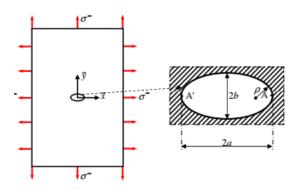


Figure II.3 Plaque uniformément chargée percée d'un trou elliptique de rayon à fond d'entaille ρ.

Les conditions limites aux bords de la plaque, qui correspondent aux points situés à une distance significativement éloignée du trou elliptique, sont définies comme suit. Cela prend en compte la grande taille de la plaque par rapport à celle du trou elliptique :

$$\sigma_{x}^{\infty} = \sigma_{y}^{\infty} = \sigma^{\infty}$$
 et $\sigma_{xy}^{\infty} = 0$

Le facteur de concentration des contraintes K_t est quant à lui donner par :

$$K_{t} = \frac{\sigma_{\text{max}}}{\sigma_{\text{min}}} = \frac{\sigma_{\beta}^{\infty}}{\sigma^{\infty}} = 2\frac{a}{b}$$
 II.3

Le rayon ρ à fond d'une entaille elliptique de grand axe a et de petit axe b s'exprimant par $\rho = b^2/a$, le facteur K_t peut aussi s'écrire :

$$K_t = 2\sqrt{\frac{\rho}{h}}$$
 II.4

Pour un trou circulaire, le facteur de concentration des contraintes (K_t) est égal à 2. Cela signifie que la contrainte maximale à l'endroit le plus proche du trou est deux fois plus élevée que la contrainte nominale que la structure subirait en l'absence du trou. Le facteur K_t de 2 pour un trou circulaire est une valeur bien connue et est souvent utilisé dans les calculs de conception pour tenir compte de la concentration de contraintes autour du trou.

b) Plaque percée d'un trou elliptique sollicité en traction simple

Les conditions limites au bord de la plaque (figure II.4), sont données par :

$$\sigma_{y}^{\infty} = \sigma^{\infty}$$
 et $\sigma_{x}^{\infty} = \sigma_{xy}^{\infty} = 0$

Les conditions limites au bord d'un trou elliptique, c'est-à-dire lorsque α atteint une valeur spécifique α_0 correspondant à la bordure de l'ellipse, sont les mêmes que dans le cas précédent, où nous avions une plaque uniformément chargée.

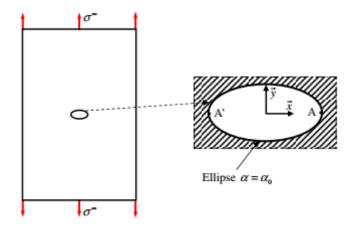


Figure II.4 Plaque chargée en traction simple, percée d'un trou elliptique de rayon à fond d'entaille ρ

Les solutions pour cette configuration de chargement ont été proposées par Stevenson en 1945.

$$\sigma_{\beta}^{\text{max}} = \sigma^{\infty} \left(1 + 2 \, \frac{a}{b} \, \right)$$
 II.5

et le facteur de concentration des contraintes est alors donné par :

$$K_t = 1 + 2\sqrt{\frac{\rho}{a}}$$
 II.6

Pour un trou circulaire, le facteur K_t vaut 3 et lorsque l'entaille tend vers la fissure ($b \ll a$ ou $\rho \rightarrow 0$), les contraintes sont infinies.

II.2 Théories énergétiques de Griffith

Dans un matériau (figure II.5), une extension Δa d'une fissure de longueur a s'accompagne des variations d'énergie suivantes :

$$\Delta W_{\text{ext}} = \Delta W_{\text{élast}} + \Delta U$$
 II.7

Avec

ΔW_{ext}: Variation d'énergie appliquée (due aux forces extérieures),

. ΔW_{élast}: Variation d'énergie élastique (emmagasinée),

 ΔU : Energie dépensée lors de la propagation de la fissure sur la longueur Δa .

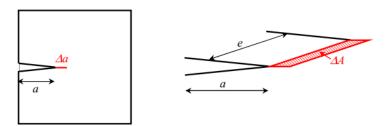


Figure II.5 : Propagation de la fissure sur une longueur Δa .

La théorie initiale de Griffith est une théorie qui s'applique principalement à la rupture fragile des matériaux. Elle considère que la rupture se produit en raison de la propagation de fissures ou de défauts préexistants dans le matériau. L'énergie de rupture, notée ΔU , dans cette théorie correspond à l'énergie nécessaire pour créer de nouvelles surfaces dans le matériau, c'est-à-dire pour ouvrir et étendre une fissure.

Plus précisément, ΔU est égale à l'énergie de séparation des surfaces, notée ΔW sép. L'énergie de séparation des surfaces est l'énergie nécessaire pour séparer les deux surfaces d'une fissure et créer ainsi de nouvelles surfaces. C'est un concept clé dans la compréhension de la rupture fragile des matériaux.

Lorsque l'on souhaite exprimer cette énergie par unité de surface, on introduit la notion d'énergie de Griffith, notée G. L'énergie de Griffith est définie comme la quantité ΔU rapportée à l'unité de surface. En d'autres termes, G est l'énergie de rupture par unité de surface:

$$G = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta A} = \frac{\partial U}{\partial A}$$
 II.8

Où $\Delta A = e\Delta a$ est la surface fissurée lors de la propagation de la fissure sur la longueur Δa dans une éprouvette d'épaisseur e.

Généralement, on suppose l'épaisseur unité (e = 1) si bien que l'expression de l'énergie G rapporté à l'unité d'épaisseur devient :

$$G = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta A} = \frac{\partial U}{\partial a}$$
 II.9

Si on considère à présent γ_s l'énergie spécifique de création de surface, la formule

précédente devient :
$$G = \frac{\partial U}{\partial A} = 2\gamma_s \label{eq:G}$$
 II.10

Comme d'après la relation **I.1** $G=\pi$ $(\sigma_R)^2$ a/E, la contrainte à rupture σ_R est donnée via **II.10** par :

$$\sigma_{\rm R} = \sqrt{\frac{2{\rm E}\gamma_{\rm s}}{\pi a}}$$
 II.11

On retrouve ainsi une expression du type II.6 avec $\beta = \alpha \sqrt{2/\pi}$.

Pour mieux comprendre la signification de l'énergie de Griffith, également appelée taux de restitution d'énergie, examinons deux cas classiques de propagation de fissures dans une éprouvette d'épaisseur unité :

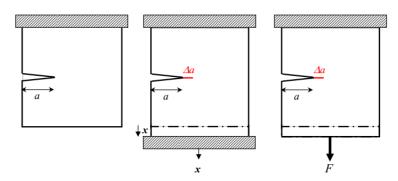


Figure II.6 : Propagation stable à Force imposée ou à Déplacement imposé a) avant chargement b) Déplacement imposé c) Force imposée

• Propagation à déplacement imposé (x=constante)

Dans ce cas, le déplacement x de la fissure est imposé, ce qui signifie que nous connaissons la vitesse à laquelle la fissure s'étend. L'énergie de Griffith G est utilisée pour comprendre la quantité d'énergie nécessaire pour maintenir cette fissure en croissance constante à une vitesse donnée. Plus précisément, G représente l'énergie nécessaire pour créer de nouvelles surfaces à mesure que la fissure progresse. Si G est élevée, cela signifie que le matériau nécessite beaucoup d'énergie pour propager la fissure, ce qui indique une résistance à la rupture élevée.

 $\Delta x=0 \Rightarrow \Delta W_{ext}=0;$ $W_{elast}=Fx/2$, soit en introduisant la complaisance (c'est-à-dire l'inverse de la rigidité) C=x/F :

$$W_{\text{élast}} = \frac{1}{2} CF^{2} = \frac{x^{2}}{2C} \implies W_{\text{élast}} = -\frac{x^{2}}{2C} \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right) \Delta a$$
 II.12

On constate ainsi que l'énergie élastique emmagasinée décroît.

Comme
$$\Delta W_{ext} = 0 = \Delta U + W_{élast} \Rightarrow \Delta U = W_{élast}$$
 et $G = \lim_{\Delta a \to 0} \left(\frac{\Delta U}{\Delta a} \right)$, soit :

$$G = \frac{x^2}{2C^2} \left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_x = \frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_x$$
 II.13

• Propagation à force imposée (F=constante)

Dans ce cas, une force F est imposée pour maintenir la fissure en croissance constante. Encore une fois, l'énergie de Griffith G intervient en quantifiant l'énergie nécessaire pour maintenir la fissure en propagation constante à travers le matériau, en maintenant une force constante. Une valeur élevée de G signifie que le matériau absorbe beaucoup d'énergie pendant ce processus.

$$\Delta F = 0 \Rightarrow \Delta \left(\frac{x}{C}\right) = 0, \text{ soit } \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta C}{C}$$

$$\begin{split} W_{ext} = & F.\Delta x = \frac{Fx}{C} .\Delta C \Box \ F^2 \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_F \Delta a \\ \Delta U = & \Delta W_{ext} - \Delta W_{elast} = F^2 \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_F \Delta a \quad , \ \text{et l'énergie de Griffith s'écrit alors} : \\ G = & F^2 \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_F \Delta a \quad , \ \text{et l'énergie de Griffith s'écrit alors} : \end{split}$$
 II.24

Les relations II.13 et II.14, qui ont été dérivées sous l'hypothèse que l'épaisseur "e" de l'éprouvette est égale à l'unité, doivent être ajustées en l'absence de cette condition. Les modifications nécessaires sont les suivantes :

$$G = \frac{F^2}{2e} \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_{x \text{ on } F}$$
 II.15

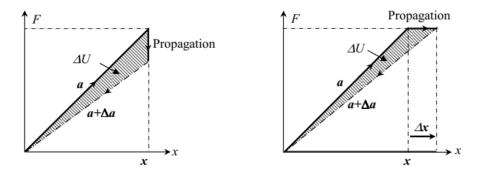


Figure II.7 : Variation de la force lors d'une propagation de fissure à déplacement imposé ou à force imposée

II.3 Description des champs des contraintes au voisinage immédiat d'une fissure à l'aide du FIK

Dans un matériau dont le comportement est élastique et linéaire, le champ des contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure suit généralement une forme générale bien connue. Cette forme générale est appelée le champ des contraintes de Williams ou le champ des contraintes d'anticipation de Williams. Il est défini comme suit :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij} \left(\theta\right) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^m \left(\theta\right)$$
II.16

Où les coordonnées (r, θ) sont repérés par rapport à l'extrémité de la fissure (figure II.08). La fonction adimensionnelle f_{ij} dépend du mode de sollicitation, l'autre fonction adimensionnelle g_{ij} dépend à la fois du mode de sollicitation, de l'état de contrainte et de la géométrie du corps fissuré.

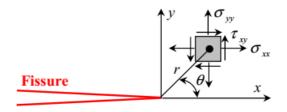


Figure II.8 : Définition des axes (x, y) et des coordonnées (r, θ) au voisinage de l'extrémité d'une fissure

Au voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure, les contraintes présentent une singularité en $1/\sqrt{r}$ (c'est-à-dire lorsque $r \to 0$, le produit $\sqrt{r}\sigma_{ij}$ tend vers une constante). Comme les termes d'ordre plus élevé $r^{m/2}$ (avec $m \ge 2$) de la relation II.16 sont négligeables devant $1/\sqrt{r}$, la zone la plus critique est bien le voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure. Pour ces raisons, seuls les termes en $1/\sqrt{r}$ sont considérés. On dit que les champs de contraintes asymptotiques sont de la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij} (\theta)$$
II.17

Dans l'approche de Westergaard, les champs asymptotiques des contraintes près de l'extrémité d'une fissure sont décrits et exprimés à l'aide des facteurs d'intensité des contraintes KI, KII ou KIII, en fonction du mode de sollicitation considéré. Ces facteurs d'intensité de contrainte sont utilisés pour caractériser la sévérité des concentrations de contraintes près de la fissure dans le contexte des trois modes de sollicitation : mode I, mode II et mode III. Voici une brève description de chaque mode dans la figure II.9 :

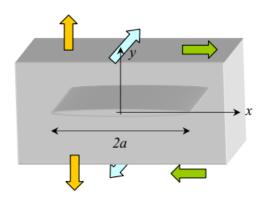


Figure II.9 : Définition des modes de sollicitation

• Mode I : C'est le mode de sollicitation où la fissure s'ouvre ou se referme perpendiculairement à la direction de la contrainte appliquée. Il est souvent associé à une

contrainte de traction ou de compression normale à la fissure. Le facteur d'intensité de contrainte correspondant est noté KI.

$$\text{Mode I} \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases}$$

$$\text{I.18}$$

 Mode II : Dans ce mode, la fissure subit un cisaillement parallèle à la direction de la fissure elle-même, sans variation significative de la contrainte normale. Le facteur d'intensité de contrainte pour le mode II est noté KII.

 Mode III: Il s'agit d'un mode de sollicitation où la fissure subit un cisaillement perpendiculaire à la direction de la fissure. Il n'y a pas de variation significative de la contrainte normale à la fissure. Le facteur d'intensité de contrainte pour le mode III est noté KIII.

Mode III
$$\begin{cases} \sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{cases}$$
 II.19

Ces facteurs d'intensité de contrainte sont utilisés pour analyser la propagation de fissures dans des matériaux élastiques linéaires. Ils permettent de quantifier l'effet des concentrations de contraintes près de l'extrémité de la fissure et sont essentiels pour évaluer la ténacité des matériaux et prédire la propagation des fissures. L'approche de Westergaard fournit des expressions mathématiques pour ces champs asymptotiques en fonction des facteurs d'intensité de contrainte spécifiques à chaque mode, ce qui permet d'obtenir des prévisions précises sur le comportement des fissures dans diverses situations de sollicitation.

Remarque : Lorsque la structure fissurée est soumise simultanément aux trois modes de sollicitation (Mode I, Mode II et Mode III), le principe de superposition en élasticité linéaire peut être appliqué. Ce principe permet de décomposer les effets des trois modes de sollicitation et de les combiner pour obtenir la réponse totale du système fissuré.

En d'autres termes, on peut analyser séparément les effets de chacun des trois modes de sollicitation (KI, KII, et KIII) sur la structure fissurée, puis additionner les résultats pour obtenir la réponse totale. Cela simplifie considérablement l'analyse de la fissuration dans des situations complexes où plusieurs modes de sollicitation sont présents.

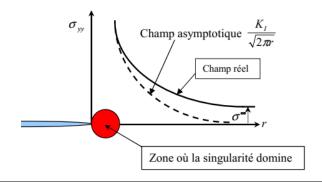
$$\sigma_{ij}^{\text{(total)}} = \sigma_{ij}^{\text{(I)}} + \sigma_{ij}^{\text{(II)}}$$
II.20

Lorsqu'on considère une structure sollicitée uniquement en mode I (c'est-à-dire avec une fissure où la propagation se fait principalement en ouverture ou fermeture perpendiculairement à la fissure), les contraintes au voisinage immédiat et en aval de l'extrémité de la fissure peuvent être décrites en utilisant les relations II.16. En particulier, lorsque l'angle θ est égal à 0 (c'est-à-dire lorsque l'on se place dans le plan de la fissure), les contraintes près de l'extrémité de la fissure sont données par :

$$\sigma_{xx}(\theta=\theta) = \sigma_{yy}(\theta=\theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$
 II.21

Le fait que le plan (x, y) de la fissure soit principal pour le mode I signifie que la fissure s'étend principalement dans ce plan, ce qui correspond à l'ouverture ou à la fermeture de la fissure perpendiculairement à ce plan. En d'autres termes, le mode I représente la rupture principalement en mode d'ouverture ou de fermeture le long de la fissure dans le plan (x, y).

La figure II-14 donne une représentation graphique de la fonction $r \Rightarrow \sigma i j(r)$ lorsque $\theta = 0$. Cette représentation graphique montre comment les composantes des contraintes $(\sigma i j)$ varient en fonction de la distance radiale (r) depuis l'extrémité de la fissure lorsque l'on se trouve dans le plan de la fissure $(\theta = 0)$.



La figure que vous avez décrite met en évidence une zone où la singularité domine, c'est-à-dire lorsque la contrainte varie en fonction de $1/\sqrt{r}$ selon la relation II.21 que vous avez mentionnée. Au sein de cette zone, les contraintes subissent une variation significative à mesure que l'on se rapproche de l'extrémité de la fissure. Au-delà de cette zone, les conditions limites caractéristiques des zones non fissurées prévalent, et les contraintes σ yy tendent progressivement à s'approcher de la contrainte appliquée σ .

Le facteur d'intensité de contrainte (FIC), noté KI en mode I, est directement lié à l'amplitude de la zone de singularité. En d'autres termes, le FIC et les contraintes augmentent proportionnellement à mesure que l'on s'approche de l'extrémité de la fissure. C'est pourquoi le FIC est un paramètre crucial pour caractériser les conditions à l'extrémité d'une fissure. Lorsque le FIC est connu, on peut déterminer avec précision les champs de contraintes, de déformations et de déplacements dans la région de la fissure. Cette connaissance est essentielle pour évaluer la sécurité des structures et prédire leur comportement en présence de fissures.

II.4 Relation entre le facteur d'intensité des contraintes et l'energie de Griffith

Bien entendu, nous allons donc concentrer notre étude sur le cas d'une fissure élastique sollicitée en mode I, comme indiqué dans la figure II.11. Ce mode de sollicitation est caractérisé par l'ouverture ou la fermeture de la fissure perpendiculairement à sa direction. Les situations en mode II (cisaillement parallèle à la fissure) et en mode III (cisaillement perpendiculaire à la fissure) peuvent être traitées de manière similaire, mais elles ont des caractéristiques spécifiques qui nécessitent des considérations distinctes.

1- mode I:

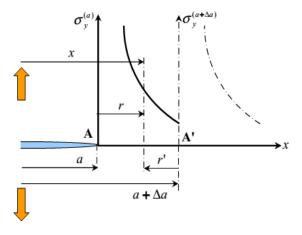


Figure II.11: Fissure sollicitée en mode I.

Dans le cas d'une fissure qui a une longueur initiale "a" et qui se propage sur une distance additionnelle Δa , l'extrémité de la fissure se déplace de la position A (x = a) à la position A' (x = a + Δa). Pour ce scénario en mode I, le champ de contrainte en aval de l'extrémité de la fissure ($\theta = 0$) peut être décrit comme suit :

$$\sigma_{y(r,\theta=0)} = \frac{K_{I}}{\sqrt{2\pi r}}$$
 II.22

alors que le champ des déplacements des lèvres en amont de l'extrémité de la fissure ($\theta = \pi$)s'écrit selon les cas :

$$u_{y}\left(r,\theta=\pi\right)=\frac{K_{I}}{2\mu}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\left(\frac{\lambda^{*}+2\mu}{\lambda^{*}+\mu}\right) avec \begin{cases} \lambda^{*}=\lambda & \text{en d\'eformations planes} \\ \lambda^{*}=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} & \text{en contra intes planes} \end{cases}$$
 II.23

Où

$$u_y(r, \theta = \pi) = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left(1 - v^*\right) \text{ avec } \begin{cases} v^* = v & \text{en déformations planes} \\ v^* = \frac{v}{1 + v} & \text{en contra intes planes} \end{cases}$$
 II.24

Pour déterminer l'énergie de propagation de la fissure, également appelée taux de restitution d'énergie G, on peut calculer le travail nécessaire pour refermer les lèvres de la fissure, c'est-à-dire le travail de régression de la fissure de la position A' à la position A. Dans une structure d'épaisseur unité, la force appliquée aux lèvres de la fissure est $\sigma y(r) * dx$, avec r = x - a.

Le déplacement d'un point d'abscisse x est uy(r') avec $r' = a + \Delta a - x$. Pour calculer le travail nécessaire pour refermer les lèvres de la fissure, nous pouvons intégrer le produit de la force et du déplacement sur la longueur de la fissure.

- de la figure II.5, le travail de régression s'écrit donc :

$$\Delta w' = -\Delta u = 2 \int_{a+\Delta a}^{a} \frac{\sigma_{y}(r)u_{y}(r')}{2} dx = \frac{K_{I}^{2}}{\mu} \cdot \frac{1-\nu^{*}}{\pi} \int_{a+\Delta a}^{a} \sqrt{\frac{a+\Delta a - x}{x-a}} dx$$
II.25

Pour calculer l'intégrale (I), on effectue le changement de variables suivant :

$$\frac{\Delta a}{x-a} = X \implies dx = -\frac{dX}{X^2} \Delta a \text{ et } \begin{cases} x = a \implies X = \infty \\ x = a + \Delta a \implies X = 1 \end{cases}$$
 II.26

L'intégrale (I) devient alors

$$I = \Delta a \int_{1}^{\infty} \sqrt{X - 1\left(-\frac{dX}{X^2}\right)}$$
 II.27

Posant:

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{X-1} & \Rightarrow d\alpha = \frac{dX}{2\sqrt{X-1}} \\ d\beta = -\frac{dX}{X^2} & \Rightarrow \beta = \frac{1}{X} \end{cases} \Rightarrow I = \Delta a \left\{ \left[\frac{\sqrt{X-1}}{X} \right]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \frac{dX}{2\sqrt{X-1}} \right\}$$
 II.28

D'où finalement:

$$G_{I} = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta a} \Rightarrow G_{I} = \frac{K_{I}^{2}}{\mu} \left(\frac{1 - \nu^{*}}{2}\right) II.44$$

En déformations planes
$$v^* = v$$
 et $G_I = \frac{K_I}{E} (1 - v^2)$ II.29

En contraintes planes :
$$v^* = \frac{v}{1+v}$$
 et $G_I = \frac{K_I^2}{E}$ II.30

Remarque: Tout à fait, des calculs analogues peuvent être effectués en modes II et III pour une fissure de longueur initiale a se propageant sur une distance additionnelle Δa . Les modes II et III correspondent à des modes de sollicitation différents de la fissure, et ils ont leurs propres facteurs d'intensité de contrainte, respectivement KII et KIII, qui caractérisent la propagation de fissure dans ces modes.

Pour le mode II (cisaillement parallèle à la fissure) et le mode III (cisaillement perpendiculaire à la fissure), vous pouvez suivre des procédures similaires pour calculer l'énergie de propagation de la fissure, également appelée taux de restitution d'énergie G. Cela implique de calculer le travail nécessaire pour effectuer la propagation de la fissure sur la distance Δa dans ces modes spécifiques.

2- mode II : les champs des contraintes en aval et des déplacements en amont de l'extrémité d'une fissure sollicitée sont généralement décrits comme suit :

$$\sigma_{xy}(r,\theta=0) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}$$
 II.31

$$u_{x}\left(r,\theta=\pi\right) = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left(1 - v^{*}\right)$$
 II.32

Ces expressions étant les mêmes que pour le mode I, les calculs précédents conduisent à :

$$G_{II} = \frac{K_{II}^{2}}{2\mu} \left(1 - v^{*} \right) \Rightarrow \begin{cases} G_{II} = \frac{K_{II}^{2}}{E} \left(1 - v^{2} \right) \text{ en déformations planes} \\ G_{II} = \frac{K_{II}^{2}}{E} \end{cases}$$
 en contraintes planes

3- Mode III

Cette fois-ci, les champs des contraintes en aval et des déplacements en amont de l'extrémité de la fissure s'écrivent :

$$\sigma_{yz}(r,\theta=0) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}$$
 II.34

$$u_3(r,\theta=\pi) = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}}$$
 II.35

Si bien qu'il est possible d'établir que l'énergie de Griffith en mode III est :

$$G_{III} = \frac{K_{III}^2}{2\mu}$$
 II.36

4- Cas général:

Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque les trois modes de sollicitation coexistent, l'énergie de Griffith s'écrit :

$$G = G_{I} + G_{II} + G_{III} \quad soit G = \frac{1}{2\mu} \left[\left(1 - v^{*} \right) \left(K_{I}^{2} + K_{II}^{2} \right) + K_{III}^{2} \right]$$
 II.37a

En déformations planes :
$$G = \frac{1}{E} \left[\left(1 - v^2 \right) \left(K_I^2 + K_{II}^2 \right) + \left(1 + v \right) K_{III}^2 \right]$$
 II.38b

En contraintes planes:

$$G = \frac{1}{E} \left[\left(K_{I}^{2} + K_{II}^{2} \right) + \left(1 +_{V} \right) K_{III}^{2} \right]$$
 II.39c

II.1.6 Principe de superposition en mécanique linéaire de la rupture

Le principe de superposition dans un matériau élastique linéaire affirme que les composantes des contraintes, des déformations et des déplacements sont "additives", ce qui signifie que les effets résultants de plusieurs sollicitations peuvent être obtenus en sommant les effets individuels de ces sollicitations. Cependant, il existe des règles spécifiques qui doivent être suivies lors de l'application du principe de superposition :

 Superposition des contraintes : Les contraintes normales peuvent être additionnées entre elles, ainsi que les contraintes de cisaillement. Cependant, une contrainte normale ne peut pas être additionnée à une contrainte de cisaillement car elles agissent dans des directions différentes.

- 2. Superposition des déformations: Les déformations sont également additives. Les déformations normales peuvent être additionnées entre elles, de même que les déformations de cisaillement. Il est important de noter que le principe de superposition ne s'applique qu'aux déformations élastiques, c'est-à-dire lorsque le matériau suit la loi de Hooke.
- 3. Superposition des déplacements : Les déplacements sont également soumis au principe de superposition. Les déplacements résultants peuvent être obtenus en additionnant les déplacements causés par chaque sollicitation individuelle.
- 4. Superposition des facteurs d'intensité des contraintes (FIC) : Les FIC, tels que KI (mode I), KII (mode II) et KIII (mode III), ne peuvent être additionnés que s'ils concernent le même mode de sollicitation. Par exemple, les FIC en mode I ne peuvent être additionnés qu'avec d'autres FIC en mode I. Ils ne peuvent pas être additionnés avec des FIC en mode II ou III car ils représentent des modes de sollicitation différents.

En respectant ces règles, le principe de superposition permet d'analyser de manière efficace les effets combinés de différentes sollicitations sur un matériau élastique linéaire. Cela est particulièrement utile dans la mécanique des structures pour évaluer le comportement d'une structure soumise à diverses charges ou conditions de chargement.

$$K_{I}^{\text{total}} = K_{I}^{(A)} + K_{I}^{(B)} + K_{I}^{(C)} \dots$$
 II.40

Mais,

$$K_{\text{(total)}} \neq K_{\text{I}} + K_{\text{II}} + K_{\text{III}}$$
 II.41

Dans de nombreuses situations, le principe de superposition est une méthode puissante pour déterminer le facteur d'intensité de contrainte (FIC) d'une configuration de chargement relativement complexe. L'idée sous-jacente, qui est intuitive, consiste à décomposer le chargement complexe en plusieurs chargements simples et à calculer le FIC pour chacune de ces configurations individuelles. Ensuite, le FIC total associé à la configuration complexe est obtenu en sommant les FIC de chaque chargement simple.

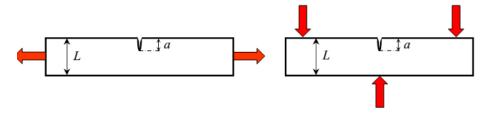


Figure II.12 : Fissure sollicitée en mode I dû à une traction puis à une flexion

Les facteurs d'intensité de contrainte K_I sont en effet bien connus pour les chargements de traction et de flexion, car ces deux types de chargement induisent des sollicitations de la fissure en mode I. Le mode I est caractérisé par une ouverture ou une fermeture de la fissure perpendiculairement à sa direction, la solution est :

$$K_{I}^{\text{total}} = K_{I}^{(\text{traction})} + K_{I}^{(\text{flexion})}$$
 II.42

Effectivement, le principe de superposition peut être une approche utile pour déterminer la solution d'un problème de chargement complexe en le décomposant en une combinaison linéaire de chargements simples pour lesquels les solutions sont connues. Cela permet d'obtenir la solution du problème complexe en utilisant les solutions des problèmes plus simples.

Dans le cas particulier de la figure II.13, pour déterminer le facteur KI correspondant au chargement de la figure II.13a, vous pouvez considérer les chargements II.13b (dont le FIC est connu) et II.13c (dont le FIC est nul, car la fissure reste fermée et l'intensité des contraintes ne peut pas être transmise à la fissure). Vous pouvez alors utiliser le principe de superposition pour calculer le FIC total KI de la configuration complexe II.13a comme suit :

$$K_{I}^{(a)} = K_{I}^{(b)} - K_{I}^{(c)}_{avec} K_{I}^{(c)} = 0 \Rightarrow K_{I}^{(a)} = K_{I}^{(b)}$$
II.43

KI(a) est le facteur d'intensité de contrainte en mode I pour le chargement de la figure II.13a (celui que vous cherchez à déterminer).

KI(b) est le facteur d'intensité de contrainte en mode I pour le chargement de la figure II.13b, dont le FIC est connu.

KI(c) est le facteur d'intensité de contrainte en mode I pour le chargement de la figure II.13c, dont le FIC est nul car la fissure reste fermée.

En sommant les FIC de ces chargements simples, vous obtenez le FIC total pour la configuration complexe II.13a. Cette approche est très utile lorsque vous avez des configurations de chargement complexes pour lesquelles il est difficile de calculer directement les FIC, mais pour lesquelles vous pouvez décomposer le problème en composantes plus simples avec des solutions connues,

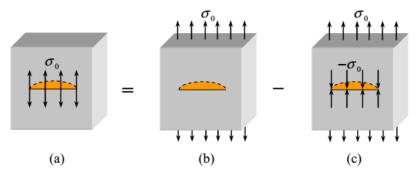


Figure II.13 : Détermination du FIC K_I pour une fissure dont les lèvres sont soumises à une traction σ_0

L'exemple que vous avez donné illustre un résultat général important en mécanique de la rupture : les contraintes de traction appliquées sur la frontière d'un solide fissuré (comme dans le cas de la figure II.13b) peuvent être déplacées sur les lèvres de la fissure (comme dans la figure II.13a) sans que cela change la valeur du facteur d'intensité de contrainte (FIC) en mode I. Ce principe est fondamental pour comprendre comment les fissures se comportent sous différentes conditions de chargement.

En d'autres termes, si un solide non fissuré est soumis à une contrainte de traction $\sigma\infty(x)$, ce qui crée une répartition des contraintes $\sigma(x)$ sur le plan A-B, et que ce solide se fissure ultérieurement le long du plan A-B, maintenir ce corps sous la contrainte $\sigma\infty(x)$ revient, via le principe de superposition, à enlever le chargement $\sigma\infty(x)$ pour le remplacer par le chargement $\sigma(x)$ appliqué aux lèvres de la fissure. Le FIC KI reste inchangé dans ce processus.

Cela signifie que le comportement de la fissure est principalement déterminé par les contraintes appliquées aux lèvres de la fissure, et non par la manière dont ces contraintes ont été appliquées. Cette propriété est fondamentale pour l'analyse de la propagation des fissures, car elle permet de prédire comment une fissure se propagera en fonction des contraintes locales près de la fissure, indépendamment de la manière dont ces contraintes locales ont été créées. Le FIC K_I est alors inchangé :

$$K_{I}^{(a)} = K_{I}^{(b)} + K_{I}^{(c)} = K_{I}^{(b)}$$
 puisque $K_{I}^{(c)} = 0$ II.44

Remarque : Le chargement $\sigma(x)$ qui apparaît sur la figure II.15 est celui qui s'appliquait sur le plan A-B lorsque la structure n'était pas fissurée (voir figure II.14).

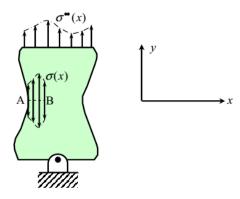


Figure II.14 : Solide non fissuré soumis au chargement $\sigma^{\infty}(x)$ conduisant à une répartition $\sigma(x)$ sur le plan A-B.

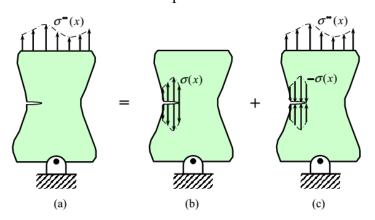


Figure II.15: Application du principe de superposition.

II.1.7 Relation entre le facteur d'intensité des contraintes et le comportement global

La fonction de Westergaard, notée Z(z), est une fonction mathématique utilisée pour calculer le facteur d'intensité de contrainte (FIC) KI pour une fissure de petite longueur 2a qui traverse une plaque soumise à des contraintes dans son plan, comme illustré dans la figure II.16. Cette fonction est définie comme suit :

$$Z(z) = \frac{\sigma_z^{\infty}}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$
 II.45

Pour simplifier les calculs, nous munissons l'espace d'un repère dans lequel le plan de la fissure admet y = 0 comme équation cartésienne. Le FIC K_I à l'extrémité x = a, est alors défini par:

$$K_{I}=\lim_{\chi\to a}\sqrt{2\pi(\chi-a)Z(\chi)}$$
 II.46

Ce qui donne finalement :

$$K_{I} = \sigma^{\infty} \sqrt{\pi a}$$
 II.47

Nous attachons ainsi une quantité (le FIC K_I) liée au comportement local1 à deux quantités liées au comportement global (σ^{∞} et a) de la structure.

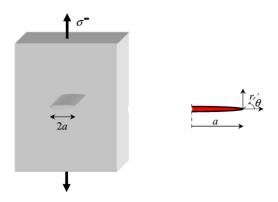


Figure II.16 : Fissure de longueur 2a dans une plaque de grandes dimensions.

Lorsque les dimensions de la plaque sont considérées comme infinies par rapport à la longueur de la fissure, les lignes de force ont une composante selon x, et le problème peut être simplifié. Cependant, en réalité, lorsque les dimensions de la plaque sont finies, les effets de bord deviennent importants. Les conditions limites sur les bords de l'éprouvette imposent que les lignes de force aient une composante nulle selon x (comme illustré dans la figure II.17b). Cela signifie que les contraintes à proximité des bords de la plaque subissent une intensification plus importante aux extrémités de la fissure en raison de ces conditions de frontière.

Pour étudier ce problème des dimensions finies, Westergaard a considéré une plaque infinie contenant une infinité de fissures périodiquement espacées de la longueur 2L, comme illustré dans la figure II.18. Il a modélisé cette situation en introduisant des termes en sinus dans la fonction Z(z) pour prendre en compte les effets de bord. Ces termes en sinus permettent de représenter les conditions de périodicité dues à la présence d'une série de fissures. Situation qu'il modélisa en introduisant des termes en sinus dans la fonction Z(z):

$$Z(z) = \frac{\sigma^{\infty}}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\pi a}{2L}\right) / \sin^2\left(\frac{\pi z}{2L}\right)}}$$
II.48

Naturellement, lorsque a << L et z << L, on retrouve l'expression

$$Z(z) = \frac{\sigma_z^{\infty}}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$
 II.49

correspondant au cas d'une fissure unique.

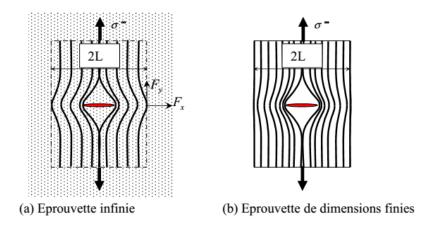


Figure II.17 : Lignes de forces dans une éprouvette fissurée de grandes dimensions et de dimensions finies

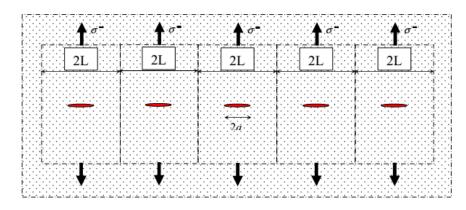


Figure II.18 : Fissures de longueur 2a, distantes de 2L dans une éprouvette infinie.

En se plaçant dans le plan de la fissure (on suppose donc y = 0 et z = x'), le FIC à l'extrémité x = a est défini par :

$$K_{I}=\lim_{x\to a} \sqrt{2\pi(x-a)Z(x)}$$
 II.50

$$a^* = \pi a/2L$$
 et $x^* = \pi x/2L$, on a $Z(z) = \frac{\sigma^{\infty}}{\sqrt{1-\sin^2 a^*/\sin^2 x^*}} = \frac{\sigma^{\infty} \sin x^*}{\sqrt{\sin^2 x^* - \sin^2 a^*}}$ II.51

Soit

$$Z(x) \approx_{x \to a} \frac{\sigma^{\infty} \sqrt{\sin a^*}}{\sqrt{\sin x^* - \sin a^*}} \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma^{\infty} \sqrt{\sin a^*}}{\sqrt{(x^* - a^*)\cos a^*}}$$
II.52

$$K_{I} = \sigma^{\infty} \sqrt{2L} \sqrt{tg \frac{\pi a}{2L}}$$
 II.53

EtQu'on peut encore écrire sous la forme :

$$K_{I} = \sigma^{\infty} \sqrt{\pi a} \left(\frac{2L}{\pi a} t g \frac{\pi a}{2L}\right)^{1/2} \quad (1*)$$
II.54

Plus tard, toujours pour le même chargement, des calculs par éléments finis ont permis une détermination plus précise de la solution :

$$K_{I} = \sigma^{\infty} \sqrt{\pi a} \left[\cos \frac{\pi a}{2L} \right]^{-1/2} \left[1 - 0.025 \left(\frac{a}{L} \right)^{2} + 0.06 \left(\frac{a}{L} \right)^{4} \right]$$
 (2*)

Où le polynôme en a/L est un terme d'ajustement numérique issu des méthodes de calcul par éléments finis.

Remarques

1/ Ces deux dernières expressions du FIC sont de la forme :

$$K_I = \sigma^{\infty} \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{L}\right)$$
 II.56

Où f (a / L) est une fonction adimensionnelle qui dépend à la fois de la géométrie de la structure fissurée et du chargement.

2/ La figure II.13 est une représentation des variations du FIC KI données parles deux relations (1*) et (2*) : on peut constater que les différences entre les deux expressions restent inférieures à 7% pour a/ L<0 6,

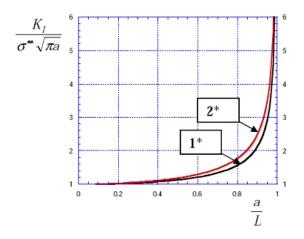


Figure II.19 : Comparaison des résultats des formules (1*) et (2*)

II.1.8 Propagation brutale des fissures-ténacité des matériaux

Lorsqu'une fissure est soumise à un mode de sollicitation donné, l'observation empirique démontre que la fissure se propage soudainement lorsque l'énergie de Griffith, notée G, atteint une valeur critique appelée GC. À cette valeur de l'énergie critique GC correspond une intensité des contraintes spécifique, notée KC. KC représente la capacité d'un matériau à résister à la propagation d'une fissure dans des conditions de chargement particulières. En d'autres termes, la ténacité KC est une mesure de la résistance d'un matériau à la propagation brutale des fissures lorsqu'il est soumis à un mode de sollicitation spécifique.

Les équations II.64, II.65 et II.66, qui permettent de déterminer les valeurs de KC et GC en fonction du mode de sollicitation, sont applicables de manière générale, même en présence de sollicitations simultanées dans les trois modes (mode I, II et III) par :

$$G_{c} = \frac{K_{IC}^{2} + K_{IIC}^{2}}{E'} + \frac{K_{IIIC}^{2}}{2\mathbb{D}}$$

$$Avec \begin{cases} E' = E & en \ contrainte \ plane \\ E' = \frac{E}{(1-v^{2})} \ en \ d\'{e}formation \ plane \end{cases}$$
II.57

En effet, G_C peut être considéré comme une mesure de la ténacité K_C . En pratique, la valeur critique KIC est souvent privilégiée pour caractériser un matériau, car le mode de sollicitation le plus critique est généralement le mode d'ouverture (mode I) lorsqu'il s'agit de la propagation des fissures.

Le rôle de la ténacité KIC en mécanique linéaire de la rupture (MLR) est analogue à celui de la limite d'élasticité σ_E en mécanique classique. Tout comme σ_E dépend de la température d'essai et de la vitesse de déformation, KIC dépend également de ces facteurs, ainsi que de l'épaisseur du matériau testé. Cela signifie que la ténacité KIC est une caractéristique importante pour évaluer la résistance d'un matériau à la propagation des fissures dans des conditions réelles, prenant en compte divers paramètres environnementaux et géométriques.

Les évolutions caractéristiques de K_{IC} , qui ont été obtenues à partir d'essais normalisés, sont représentées schématiquement sur la figure II.20.

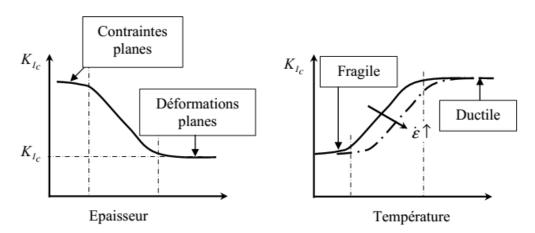


Figure II.20 : Variations caractéristiques de la ténacité K_{IC} .

L'épaisseur d'une structure ou d'une éprouvette influence l'état de contrainte à l'intérieur de celleci. Dans le cas d'éprouvettes d'essai de faible épaisseur, telles que des plaques, soumises à un chargement en mode I dans leur plan, l'état de contrainte est principalement planaire. Dans de tels cas, la valeur critique du facteur d'intensité de contrainte (FIC) est généralement élevée, en particulier pour les matériaux ductiles. Cependant, à mesure que l'épaisseur de la structure augmente, on observe une transition vers un état de déformation non plane, ce qui conduit à une diminution du FIC critique. Au-delà d'une certaine épaisseur, le FIC critique ne varie plus significativement, atteignant une valeur minimale stabilisée qui définit la ténacité du matériau.

Les mesures de ténacité sont généralement effectuées sur des éprouvettes normalisées préfissurées par fatigue. Les normes ASTM (American Society for Testing and Materials) d'essais recommandent certaines conditions pour obtenir une mesure précise de la valeur stabilisée du KIC. Ces conditions visent à garantir la reproductibilité et la fiabilité des résultats de mesure donner par la relation suivant :

a, e, (L-a)
$$\geq 2.5 \left(\frac{K_{I_C}}{\sigma_E}\right)^2$$
 II.58

Où a, e, L, σ_E sont respectivement, la longueur de la fissure, l'épaisseur, la largeur de l'éprouvette et la limite d'élasticité du matériau.

Dans les alliages métalliques, tels que les aciers, la température a un impact significatif sur leurs propriétés mécaniques, se manifestant par une transition marquée entre deux comportements : un comportement fragile à basse température, associé à une faible ténacité, et un comportement ductile à haute température, caractérisé par une forte ténacité. De plus, cette zone de transition entre le comportement fragile et le comportement ductile tend à se déplacer vers des températures plus élevées lorsque la vitesse de déformation augmente. Ce phénomène pose des défis importants en matière de dimensionnement des structures, en particulier dans les cas où il existe des risques d'explosion, car une explosion provoque une augmentation soudaine de la vitesse de déformation de la structure, comme cela peut être le cas dans les centrales nucléaires. Il est également important de noter que le vieillissement des matériaux a un impact similaire sur la ténacité. À mesure que les matériaux vieillissent, la zone fragile tend à s'étendre aux dépens de la zone ductile, ce qui entraîne un déplacement de la zone de transition vers des températures plus élevées. En conséquence, certains anciens ponts en structure métallique sont fermés pendant les périodes de gel, car à ce moment-là, ils deviennent extrêmement fragiles, à la manière du

II.1.9 Propagation instable- courbe R de résistance à la rupture

verre, et présentent un risque de rupture imminent.

Pour les matériaux fragiles, la théorie de Griffith permet de prédire l'extension (Δa) d'une fissure de longueur initiale (a) présente dans une structure d'épaisseur (e), lorsque l'énergie nécessaire pour cette extension est dépensée.

$$G=\lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta a} = 2\gamma_s$$
 II.59

$avec \begin{cases} \Delta U & l^{'}energie \ dépensée \ lors \ de \ l^{'}extension \\ 2\gamma_s \ l^{'}energie \ spécifique \ de \ création \ de \ surface \end{cases}$

Vous avez tout à fait raison. L'expression du champ de contraintes à l'extrémité d'une fissure prédit des contraintes infinies selon la mécanique linéaire de la rupture (MLR), ce qui est une simplification théorique et irréaliste. En réalité, les matériaux ont une limite d'élasticité au-delà de laquelle une plastification se développe, y compris à l'extrémité d'une fissure.

Dans les matériaux ductiles, il est important de prendre en compte le fait que l'énergie nécessaire pour plastifier l'extrémité de la fissure peut devenir significative par rapport à l'énergie de création de surface. Par conséquent, il est approprié de réviser le bilan des variations d'énergie qui accompagnent l'extension (Δa) d'une fissure dans de telles conditions:

$$\Delta W = \Delta W_{\text{élast}} + \Delta U \qquad II.60$$

Avec ΔU la variation d'énergie dépensée lors de l'extension, qui se décompose en :

$$\Delta \text{U} = \Delta W_{\text{sép}} + \Delta W_{\text{plast}} \text{ avec } \begin{cases} \Delta W_{plast} \text{ l'energie dissipée dans la plastificatio} \\ \Delta W_{\text{sép}} \text{ l'énergiede séparation des surfaces dissurées} \end{cases} \text{II.60}$$

Où la quantité $\Delta W_{sép}$ peut devenir négligeable devant ΔW_{plast} en cas de forte ductilité. L'extension Δa de la fissure se produit donc lorsque l'énergie de Griffith atteint la valeur :

 $G_c = 2(\gamma_s + \gamma_p)$ avec $2\gamma_p$ l'énergie spécifique de plastification

Comme l'extension de fissure n'est pas forcément stable, on convient, pour étudier la stabilité, de poser pour une épaisseur unité de la structure :

$$\Delta U = R \Delta a$$
 II.61

Où R est la force de résistance à l'accroissement de la fissure, encore plus simplement appelé, la force de résistance à la rupture. Il s'ensuit que la quantité R est, comme l'énergie de Griffith, homogène à une énergie par unité de surface ou à une force par unité d'épaisseur. Le tracé des variations de R en fonction de la longueur de fissure est appelé la courbe R. A présent, considérons une fissure de longueur initiale $2a_0$ sur une plaque de grandes dimensions, soumise à une contrainte σ^{∞} . A σ^{∞} fixée, l'énergie de Griffith varie proportionnellement à la longueur de fissure puisque (relations **I.1** et **I.2**) : $G_c = \frac{\pi a (\sigma^{\infty})^2}{E}$, et $G_c = \frac{\pi a \sigma_R^2}{E}$ à la rupture. La figure II.21 présente schématiquement l'allure de la courbe R pour deux types de matériaux.

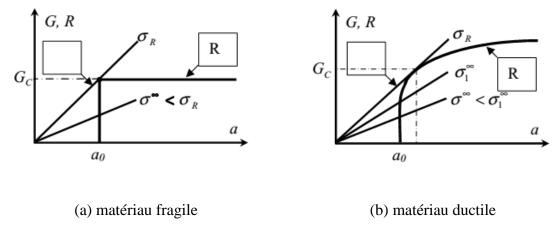


Figure II.21: Types de courbes R

La figure II.21a, est typique de la résistance à la fissuration dans un matériau fragile.

- Lorsque $\sigma^{\infty} < \sigma_R$ la fissure reste stable.
- Lorsque $\sigma^{\infty} = \sigma_R$, la fissure se propage brutalement. L'instabilité se produit puisque l'énergie G croît avec la longueur de fissure alors que la résistance à la fissuration du matériau demeure constante. La valeur critique G_C est alors mesurée sans ambiguïté.

La figure II.21b représente la courbe *R* dans un matériau ductile.

Lorsqu'on charge jusqu'à $\sigma^{\infty} < \sigma^{\infty}_{1}$, la fissure reste stable.

- Lorsque $\sigma^{\infty}_{1} < \sigma^{\infty} < \sigma_{R}$, la fissure se propage de façon stable.
- Lorsque $\sigma^{\infty} = \sigma_R$, l'énergie G devient tangente à la courbe R et la propagation est alors brutale.

Dans ces situations, la détermination de la ténacité critique GC est plus complexe, car la propagation instable de la fissure est précédée d'une propagation stable, qui correspond à une déformation ductile au niveau du fond de la fissure.

Lorsque la contrainte appliquée $\sigma \infty$ dépasse un certain seuil $\sigma \infty 1$, on observe que la résistance à la rupture augmente. Ce comportement peut s'expliquer par la présence d'une zone plastique à l'extrémité de la fissure, qui concentre une quantité d'énergie de résistance bien plus importante que l'énergie nécessaire pour provoquer les micro-ruptures au fond de la fissure. En d'autres termes, il y a une capacité accrue à résister à la propagation de la fissure au-delà de ce seuil.

G = R et
$$\frac{dG}{da} \le \frac{dR}{da}$$
 II.62a

Autrement dit, la propagation instable intervient lorsque :

$$\frac{dG}{da} > \frac{dR}{da}$$
 II.63b

La ténacité KIC d'un matériau et l'énergie de Griffith associée sont deux paramètres essentiels qui caractérisent la capacité d'un matériau à résister à la propagation d'une fissure. Le lien entre ces deux paramètres est bien établi dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture (MLR). Le KIC, généralement connu pour un matériau donné, peut être utilisé pour définir une dimension critique de défaut lors des opérations de contrôle et d'évaluation de la sécurité des structures.

Des expérimentations ont montré que la ténacité augmente lorsque l'épaisseur de la structure diminue, comme illustré dans la figure II.21. Ceci s'explique en partie par le fait que les états de contraintes planes, qui sont prédominants dans les plaques minces, entraînent une plastification bien plus importante que les états de déformation planes qui sont courants dans les structures épaisses. En conséquence, les courbes de résistance R présentent une allure distincte pour les structures minces, similaire à celle illustrée dans la figure II.15b.

Lorsqu'il s'agit de prédire la rupture des plaques minces, il est nécessaire de déterminer à la fois la déchirure stable et de prendre en compte le critère d'instabilité. Le concept de courbe R, qui est également utilisé pour relier l'accroissement (Δa) de la fissure au facteur d'intensité des contraintes (FIC), permet de prévoir la déformation ductile qui précède l'instabilité. Cette approche permet une analyse plus complète du comportement des structures minces et de leur résistance à la propagation de fissures.

II.1.10. Zone plastique à fond de fissure

Introduction

La mécanique linéaire de la rupture (MLR) prédit des contraintes infinies à l'extrémité d'une fissure aiguë, ce qui est une simplification théorique, car dans les matériaux réels, nous savons que les contraintes à l'extrémité d'une fissure restent finies. Cela est dû au fait que, dans les matériaux réels, le rayon à fond de fissure n'est pas nul, contrairement à ce que la MLR suppose. Au fur et à mesure que la taille de la zone plastifiée qui se forme à l'extrémité de la fissure devient importante, les prédictions de la MLR deviennent de plus en plus imprécises. Cependant, il est possible de remédier à cette limitation en apportant des corrections simples à la MLR, du moins lorsque la taille de la zone plastifiée reste raisonnable.

Lorsque la plastification devient significative, le facteur d'intensité des contraintes (FIC) K n'est plus adapté pour décrire de manière précise les champs de contraintes et de déplacements à l'extrémité de la fissure. Dans de tels cas, d'autres paramètres doivent être introduits pour tenir compte de la plasticité du matériau. C'est pourquoi il est essentiel de déterminer la taille de la zone plastique à l'extrémité de la fissure.

Pour cela, deux approches couramment utilisées sont celles d'Irwin et celle de Dugdale-Barenblatt. Ces approches conduisent à des corrections simples du FIC pour prendre en compte la zone plastique. Le terme "zone plastique" est généralement utilisé pour les métaux, mais il peut également être utilisé de manière plus générale pour caractériser une zone de déformations inélastiques, qu'il s'agisse de métaux, de polymères, ou d'autres matériaux. En somme, ces approches permettent d'améliorer la précision des prédictions concernant le comportement des fissures dans des matériaux réels.

a) Approche d'Irwin

Dans le contexte de l'approche d'Irwin, dans le plan de la fissure et en aval de son extrémité, la contrainte normale σy est exprimée, notamment dans le cas d'une sollicitation en mode I (avec $\theta = 0$), par la relation suivante :

$$\sigma_{y} = \frac{K_{I}}{\sqrt{2\pi r}}$$
 II.64

Dans l'approche d'Irwin, en première approximation, on considère que la limite entre les zones élastique et plastique du matériau se situe à l'endroit où les contraintes atteignent la limite d'élasticité du matériau. Pour déterminer le rayon r_E à partir duquel cette frontière coupe le plan de la fissure soumis à des contraintes planes, on fixe σ_y égal à la limite d'élasticité en traction simple, notée σ_E . Cela conduit à l'équation suivante :

$$r_{\rm E} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{\rm I}}{\sigma_{\rm E}} \right)^2$$
 II.65

Pour représenter la longueur rE, comme illustré dans la figure II.22, on fait l'hypothèse que le matériau suit un comportement élasto-plastique parfait. Ensuite, nous tronquons simplement le champ des contraintes dès que σy atteint la valeur de la limite d'élasticité, c'est-à-dire σE .

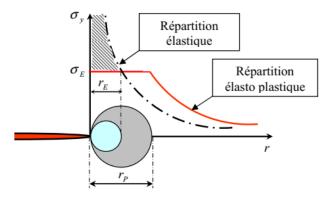


Figure II.22 : Répartition des contraintes élastiques et élasto plastiques dans le plan de la fissure et en aval de son extrémité

Cependant, cette analyse ignore les forces non transmises, comme indiqué dans la zone hachurée de la figure II.22. Pour prendre en compte ces forces, il est nécessaire d'assurer l'équilibre entre les deux répartitions de contraintes (élastique et élastoplastique).

Étant donné que la taille rp de la zone plastique doit être supérieure au rayon rE pour maintenir l'équilibre des forces entre les deux configurations, cela conduit à l'équation suivante :

$$\int_{0}^{\infty} \sigma_{y} dr = \sigma_{E} . r_{p} + \int_{r_{E}}^{\infty} \sigma_{y} dr \qquad \Rightarrow \sigma_{E} . r_{p} = \int_{0}^{r_{E}} \sigma_{y} dr \qquad II.66$$

Soit, compte tenu de l'expression de σ_v :

$$r_{p} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{I}}{\sigma_{E}} \right)^{2} = 2r_{E}$$
 II.67

La distribution des contraintes dans la répartition élastoplastique pour $r > r_P$ est obtenue en effectuant une translation d'une distance r_E par rapport à la répartition élastique, comme illustré dans la figure II.15.

Pour rendre compte de cette translation, Irwin définit un facteur d'intensité des contraintes (FIC) effectif en augmentant la longueur de la fissure de r_E . Cela revient à considérer non pas la longueur réelle a de la fissure, mais une longueur effective $a_{\rm eff} = a + r_E$.

Ainsi, dans le cas d'une fissure traversant une plaque infinie sous sollicitation en mode I, le FIC sans correction $K_I = \sigma \infty \sqrt{(\pi a \infty)}$ devient après correction :

$$K_{\text{eff}} = \sigma^{\infty} \sqrt{\pi \left(a + r_{\text{E}} \right)} = \sigma^{\infty} \sqrt{\pi a} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\text{E}}} \right) \right]^{1/2}$$
 II.68

b) Comparaison des corrections de zone plastique

La figure II.23 illustre la comparaison entre les différentes corrections de la zone plastique que nous avons examinées précédemment et l'analyse de la mécanique linéaire de la rupture (MLR) sans correction, dans le contexte d'un état de contraintes planes.

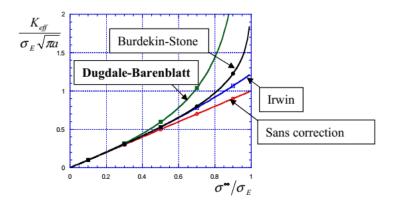


Figure II.23 : Comparaison des corrections de zone plastique

Sur la figure, nous observons que le facteur d'intensité des contraintes effectif (K_{eff}) normalisé par $\sigma_E \sqrt{(\pi a)}$ est représenté en fonction de la contrainte appliquée normalisée (σ^{∞} / σ_E). Lorsque la contrainte appliquée σ^{∞} est inférieure à $0.5\sigma_E$, les corrections apportées par les différentes méthodes restent relativement proches et similaires.

Cependant, dès que la contrainte appliquée σ^{∞} dépasse $0.5\sigma_{E}$, les corrections deviennent significatives. Dans ce cas, la correction de Dugdale-Barenblatt devient excessive, tandis que les corrections d'Irwin et de Burdekin & Stone sont équivalentes jusqu'à $\sigma^{\infty} = 0.7\sigma_{E}$.

II.1.11 Mode de rupture mixte

La figure II.24a présente une fissure inclinée qui traverse une plaque soumise à une traction simple. Si la fissure était alignée (c'est-à-dire β =0°), le chargement appliqué donnerait lieu à un mode I pur. Cependant, avec une fissure inclinée, deux voire trois modes de sollicitation peuvent être présents. L'énergie de propagation G est alors considérée comme additive : G = GI + GII + ... Il est important de noter que cette équation suppose que la fissure se propage en restant dans son plan. Dans le cas de la figure II.36a, l'expression du taux de restitution d'énergie G est la suivante:

$$G = G_{I} + G_{II} = \cos^{2}\beta \frac{(\sigma^{\infty})^{2} \pi a}{E'}$$
II.73

tant que la fissure ne dévie pas.

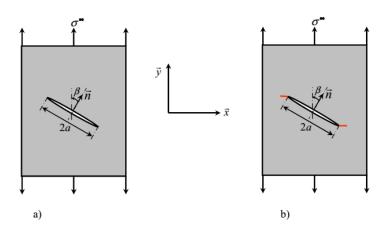


Figure II.24 : Fissure inclinée dans une plaque en traction

La figure II.24b illustre un scénario plus proche de la réalité. Dans ce cas, une fissure initialement inclinée a tendance à se propager dans le plan présentant les sollicitations les plus élevées, ce qui la ramène en mode I. Autrement dit, la fissure suit le chemin de propagation de moindre résistance, c'est-à-dire le chemin où l'intensité des contraintes est la plus élevée, et elle ne reste donc pas nécessairement dans son plan initial.

Si le matériau est isotrope et homogène, la fissure se propage de manière à maximiser son énergie G. Dans la section suivante, nous exprimons cette énergie G en fonction de la direction de propagation, en se concentrant sur le cas d'une fissure soumise à des modes I et II. Il est important de noter que ce raisonnement peut être étendu au cas plus général de la coexistence des trois modes de sollicitation.

a) Propagation d'une fissure inclinée

Les expressions des FIC peuvent être simplifiées sous la forme :

$$K_I = K_I^{(0)} cos^2 \beta$$
 et $K_{II} = K_I^{(0)} sin \beta cos \beta$ II.69
$$K_I^{(0)} = \sigma^{\infty} \sqrt{\pi} a$$

Où est le FIC en mode I pur lorsque l'inclinaison est nulle ($\beta=0^{\circ}$)

A l'extrémité de la fissure sollicitée en modes I et II, les champs de contraintes asymptotiques s'expriment (en coordonnées polaires – voir annexe A) respectivement

$$\operatorname{par}: \begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{K_{I}}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{5}{4} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{K_{I}}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{r\theta} = \frac{K_{I}}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{cases}$$
 II.70

$$\begin{cases}
\sigma_{rr} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[-\frac{5}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[-\frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
\sigma_{r\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right]
\end{cases}$$
II.71

Prenons en considération une petite avancée infinitésimale d'une fissure qui était initialement inclinée à un angle β par rapport à la direction de chargement, suivant le chemin illustré sur la figure II.25a. Si nous nous plaçons dans le plan de la fissure, au début de cette avancée, la situation est représentée comme sur la figure II.25b.

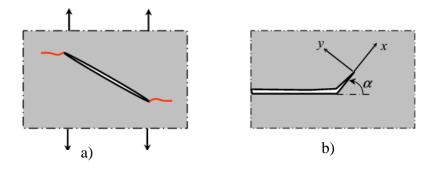


Figure II.25 : Fissure inclinée : propagation selon un angle α par rapport au plan de la fissure.

Les facteurs d'intensité des contraintes (FIC) locaux présents à l'extrémité de la déviation d'angle α diffèrent des FIC KI et KII associés à la fissure initiale. Lorsque nous définissons un repère local (x,y) et que nous combinons les contraintes normales et tangentielles, les FIC en mode I et II à l'extrémité de la déviation sont donnés par :

$$K_{I}(\alpha) = \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r} = C_{11}K_{I} + C_{12}K_{II}$$
 II.77

$$K_{II}(\alpha) = \tau_{xy} \sqrt{2\pi r} = C_{21}K_I + C_{22}K_{II}$$
 II.78

Où K_I et K_{II} proviennent des relations II.74 et les coefficients C_{ij} s'expriment, via les formules II.75 et II.76, par :

$$\begin{cases} C_{11} = \frac{3}{4}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\cos\frac{3\alpha}{2} \\ C_{12} = -\frac{3}{4}\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4}\sin\frac{3\alpha}{2} \\ C_{21} = \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin\frac{3\alpha}{2} \\ C_{22} = \frac{1}{4}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\cos\frac{3\alpha}{2} \end{cases}$$
 II.79

L'énergie de Griffith $G(\alpha)$ à l'extrémité de la déviation s'exprime ainsi :

$$G(\alpha) = \frac{K_I^2(\alpha) + K_{II}^2(\alpha)}{E}$$
 II.80

Fonction dont les variations en fonction de α et β sont représentées ci-dessous.

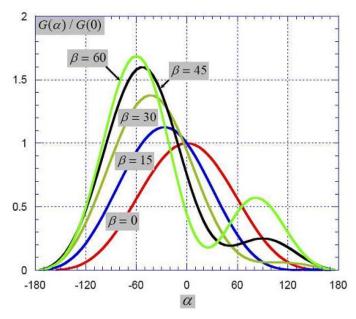


Figure II.26 : Variations de l'énergie de Griffith en fonction de α , pour diverses valeurs de β .

Les maxima de $G(\alpha)$ pour une valeur de β fixée correspondent aux points où k_I est optimal. Ainsi, le maximum de l'énergie de Griffith est donné par :

$$G_{\text{max}} = \frac{K_I^2(\alpha^*)}{E}$$
 II.81

L'angle α^* est l'angle auquel les valeurs de l'énergie G sont maximales et où kI atteint sa valeur maximale tandis que kII devient nul. Dans un matériau homogène, une fissure qui était initialement inclinée à un angle β se propagera dans une direction qui forme un angle α^* avec le plan initial de la fissure.

b) Mode l'équivalent

Dans le cas de la fissure de longueur 2a traitée au paragraphe précédent, avec une inclinaison initiale d'un angle β et une propagation dans la direction α^* , cela équivaut à une fissure de longueur a_{eq} sollicitée en mode I pur, avec la même intensité de contraintes. En d'autres termes, nous pouvons écrire :

$$K_{I}(a_{eq})=K_{I}(\alpha^{*},\beta,\alpha)$$
 II.82

Pour une fissure de petite dimension traversant une plaque, il vient :

Soit
$$\sigma^{\infty} \sqrt{\pi a_{eq}} = \sigma^{\infty} \sqrt{\pi a} [\cos^2 \beta. C_{II}(\alpha^*) + \sin \beta \cos \beta. C_{12}(\alpha^*)]$$

$$\frac{a_{eq}}{a} = [\cos^2 \beta. C_{II}(\alpha^*) + \sin \beta \cos \beta. C_{12}(\alpha^*)]^2$$
II.83

Pour évaluer les ruptures fragiles, un troisième critère de la mécanique linéaire de la rupture peut être utilisé, qui repose sur la notion d'écartement critique de fissure, noté δ_c . Ce critère se fonde sur le fait que l'ouverture ou l'écartement des lèvres de la fissure δ , sous l'effet de la charge, atteint une valeur critique $\delta = \delta_c$ à la rupture.

L'écartement δ représente le déplacement relatif de deux points définis de manière conventionnelle sur les bords opposés de la fissure, près de sa pointe. L'écartement critique δ_c est considéré comme une caractéristique de la résistance à la rupture du matériau.

Ce qui distingue avantageusement le critère δc des autres critères est sa capacité à s'étendre au domaine des ruptures quasi-fragiles et ductiles. Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, il existe une relation entre les paramètres KI, GI et δ , qui peut être exprimée comme suit:

$$\delta = \alpha K_L^2 / ER_{0.2} = \alpha (1 - \nu^2) G_L / R_{0.2}$$
 II.84

Chapitre III Mécanique de la rupture élastique plastique

III. Introduction

La mécanique linéaire de la rupture (MLR) est une méthode qui reste valide lorsque les matériaux présentent un comportement élastique et linéaire, et lorsque la zone de plastification à l'extrémité de la fissure demeure de petite taille par rapport aux dimensions de la fissure et de la structure globale. Cependant, dans de nombreux matériaux, il est difficile voire impossible de satisfaire ces deux conditions simultanément. Dans de tels cas, une approche alternative est nécessaire.

La mécanique élastoplastique de la rupture (MEPR) ou mécanique non linéaire de la rupture (MNLR) est une approche qui s'applique aux matériaux ductiles. Elle est particulièrement adaptée lorsque le comportement du matériau reste indépendant du temps, c'est-à-dire en l'absence d'effets dynamiques, de viscosité, ou de fluage, par exemple.

III.2.1 Notion de CTOD

Le CTOD, ou Crack Tip Opening Displacement, se réfère au déplacement d'ouverture en pointe de fissure émoussée. Il est souvent utilisé pour évaluer la ténacité des matériaux, en particulier des matériaux à faible résistance et faible limite d'élasticité, qui présentent une grande ténacité. Contrairement aux matériaux à haute résistance, qui sont généralement traités avec la mécanique linéaire de la rupture, les matériaux à faible résistance ont une ténacité élevée. Cela signifie que la zone plastifiée à la pointe de fissure est considérablement plus grande que la longueur de fissure (ZP >> a).

Le concept de déplacement à la pointe de fissure (COD), introduit par Wells, est utilisé pour évaluer la ténacité des matériaux à faible résistance. Il mesure la déformation plastique atteinte par le matériau à la pointe de fissure avant que la fissure ne commence à se propager. Le COD est une quantité mesurable qui peut être utilisée pour caractériser la capacité du matériau à résister à la propagation de fissures, en particulier dans le cas des matériaux ductiles à faible résistance.

• Émoussement en fond de fissure

Dans le cas des matériaux ductiles, on observe que les éprouvettes d'essai présentent un émoussement en fond de fissure, ce qui signifie que la forme de la fissure s'écarte de la parabole définie pour les matériaux fragiles selon l'hypothèse de l'élasticité linéaire. L'extension de la fissure se produira lorsque le COD (Crack Tip Opening Displacement) atteindra une valeur critique. Il est important de noter que ce critère du COD est équivalent aux critères K1C et G1C dans le cas des matériaux à basse ténacité. En d'autres termes, ces différents critères sont tous utilisés pour évaluer la capacité d'un matériau à résister à la propagation de fissures, mais ils sont

adaptés à des types de matériaux différents, en fonction de leur ténacité et de leur comportement sous contrainte.

L'observation principale faite par Wells en 1963 a été l'émoussement de l'extrémité des fissures. Pour illustrer cette différence de comportement, la figure III.1 compare le comportement d'une fissure élastique à celui d'une fissure dont l'extrémité s'émousse en raison de l'écoulement plastique.

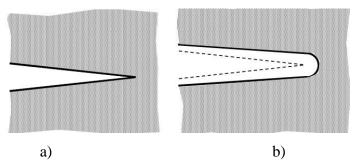


Figure III.1 : Comparaison de l'ouverture d'une fissure élastique (a) et d'une fissure dont l'extrémité s'émousse (b).

Lorsque l'on soumet statiquement une éprouvette de mesure de K1C à une charge, on constate un écartement des lèvres à fond de fissure. Cet écartement est lié au déplacement v perpendiculaire au plan de la fissure, comme illustré dans la figure III.2. La valeur de ce déplacement v peut être exprimée de la manière suivante :

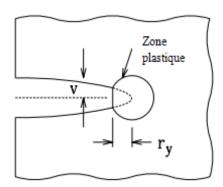


Figure III.2: Estimation du CTOD, (Anderson 1995).

$$v = \frac{K_I}{2\mu} \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \left[k + 1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2} \right]$$
 III.1

En posant θ égal à $\mp \pi$, nous obtenons les déplacements du haut et du bas de la face de fissure. Par symétrie, la somme de ces déplacements correspond au déplacement d'ouverture de la fissure. L'ouverture de la fissure peut être calculée comme suit :

$$COD = 2v = \frac{k+1}{\mu} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$
 III.2

Si l'on remplace le déplacement d'ouverture en pointe de fissure par la distance r*p de la pointe de fissure dans l'équation (III.2), en utilisant la correction de la zone plastique d'Irwin, on peut reformuler comme suit :

$$r_p^* = \frac{1}{2\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_o^2}$$
 III.3

On prend $k=\frac{3-v}{1+v}$ pour des contraintes planes, et nous rappelons que $\mu=\frac{E}{2(1+v)}$, nous obtenons :

$$CTOD = \frac{4K_I^2}{\pi E \sigma_e}$$
 III.4

• Solution de Dugdale

Utilisant la solution de Dugdale, Kanninen (Kanninen 1984) avait montré que l'ouverture de fissure le long de la fissure donne que :

$$v(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_e}{E} \left\{ \log \left| \frac{\sqrt{c^2 - a^2} + \sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{c^2 - a^2} + \sqrt{c^2 - x^2}} \right| + \frac{x}{a} \log \left| \frac{x\sqrt{c^2 - a^2} + a\sqrt{c^2 - x^2}}{x\sqrt{c^2 - a^2} - a\sqrt{c^2 - x^2}} \right| \right\}$$
 III.5

Pour $0 \le x \le c$, avec x = a

$$v(a) = \frac{4}{\pi} \frac{a\sigma_e}{E} \log \frac{c}{a}$$
 III.6

Par combinaisons de cette équation avec la solution de Dugdale :

$$\frac{a}{c} = \cos \frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_e}$$
 III.7

Nous obtenons:

$$CTOD = 2v = \frac{8 \frac{a\sigma_e}{\pi} \log \left[\sec \frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_e} \right] II.93CTOD = \frac{8 \frac{a\sigma_e}{\pi}}{\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_e} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_e} \right)^4 + \cdots \right] III.8$$

$$CTOD = \frac{K^2}{E\sigma_e} \left[1 + \frac{\pi^2}{24} \frac{\sigma^2}{\sigma_e^2} + \cdots \right]$$
 III.9

Notons que la valeur de $\frac{\sigma}{\sigma_e}$ est très petite, donc CTOD peut être exprimée par :

$$CTOD = \frac{K^2}{E\sigma_e} = \frac{G_C}{\sigma_e}$$
 III.10

• Méthode de mesure du C.T.O.D

Bien que d'autres méthodes existent, on mesure généralement l'écartement V entre les lèvres de l'entaille mécanique à l'aide d'un capteur à lames. Le principe repose sur l'idée qu'il existe un centre de rotation apparent pour l'éprouvette soumise à une charge, et par conséquent, si l'on connaît la position de ce centre de rotation ainsi que le déplacement des lèvres de l'entaille mécanique, on peut déterminer le COD δ (voir figure III.3). En utilisant des relations entre triangles semblables, on peut exprimer cela comme suit :

$$\frac{V}{\delta} = \frac{a+z+r(W-a)}{r(W-a)}$$
 III.11

$$\sigma = V \frac{r(W-a)}{a+z+r(W-a)}$$
 III.12

L'expression précédente met en évidence que la valeur de δ ne peut être calculée que si la valeur de r (c'est-à-dire la position du centre de rotation) est connue. Plusieurs chercheurs ont avancé différentes propositions, par exemple, 2,2 < r < 6,7 lorsque δ varie de 0,1 à 0,4 mm. reformuler

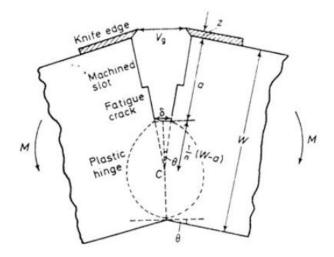


Figure III.3: Principe de la mesure du CTOD

III.2.2. L'intégrale J

L'intégrale énergétique J présente certains avantages par rapport au paramètre d'écartement de fissure δ . Cette intégrale, initialement introduite en mécanique non linéaire de rupture, peut également être utilisée en mécanique linéaire de rupture. L'un de ses avantages réside dans sa possibilité de mesure expérimentale directe, qui est relativement simple à réaliser en analysant le diagramme "charge-déplacement" le long de la ligne de chargement. Comme le facteur d'intensité de contraintes, l'intégrale J caractérise les champs de contraintes et de déformations dans la région près de la pointe de fissure, notamment dans le domaine plastique du matériau.

Pour un comportement linéaire élastique du matériau, la relation entre le facteur d'intensité des contraintes KI et l'intégrale énergétique J pour la fissure en mode I est la suivante :

$$J_{I} = G_{I} = K_{I}^{2} / E'$$
 III.13

Cette relation nous éclaire sur la signification physique de l'intégrale J, qui est essentiellement une équivalence du paramètre G. En d'autres termes, elle représente la quantité d'énergie libérée due aux déformations élastiques lors de la croissance stable de la fissure. Cette interprétation est valable dans le cadre de la mécanique linéaire de rupture, où elle permet de comprendre le taux d'énergie libérée.

Toutefois, en dehors du domaine d'application de la mécanique linéaire de rupture, cette interprétation physique de l'intégrale J est perdue. Cependant, dans le contexte des déformations élastoplastiques du matériau, l'intégrale J conserve son rôle en caractérisant l'intensité des champs de contraintes et de déformations dans la région proche de la pointe de fissure. Cette caractéristique justifie son utilisation comme critère de rupture, en préférant parfois le facteur d'intensité de contraintes. En suivant une analogie avec l'expression précédente pour le mode I de rupture, on peut noter :

$$I_{\rm I} \ge I_{\rm IC}$$
 III.14

Où J_{Ic} est une ténacité du matériau, qui caractérise la croissance stable de fissure, mais aussi le démarrage de la rupture instantanée

III.2.2.1 Intégrale de Rice

Dans un plan de chargement contenant une fissure avec des surfaces libres, on établit un contour C autour de la pointe de la fissure (voir Figure III-4). Pour quantifier la singularité du champ de contrainte à proximité de la pointe de la fissure, on examine une intégrale de contour déduite de la loi de conservation de l'énergie. Lorsque le chargement induit des déformations élastoplastiques, Rice a introduit un paramètre pour caractériser ce champ de contrainte en pointe de fissure, appelé intégrale J. Cette intégrale J représente la variation minimale de l'énergie potentielle associée à la propagation de la fissure. En élasticité, Rice a défini cette intégrale de contour comme suit :

$$J = \iint_{C} \left\{ W_{e,dy} - T_{i} \frac{\partial u_{i}}{\partial x} ds \right\}$$
 III.15

Avec:

- C un contour fermé entourant la pointe de la fissure (figure III.4);
- W_e la densité d'énergie de déformation élastique égale à $w_e = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon$;
- T_i le vecteur contrainte appliqué sur dS égale à σ_{ij} n_i n_j étant les normales au contour C;

- n_i le déplacement associé à T_i

L'intégrale J, présente d'importantes propriétés :

- elle caractérise l'influence du chargement appliqué sur la pointe de fissure étudiée,
- elle est égale à la variation d'énergie potentielle de la structure lors d'une avancée élémentaire de la fissure (da) : $J = -\frac{dP}{da}$

Le calcul de l'intégrale J, également connue sous le nom d'intégrale de Rice, est employé pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte. En élasticité, l'intégrale J est équivalente à l'énergie nécessaire pour faire progresser une fissure, une notion qui a été initialement introduite par Griffith et notée G. Dans le contexte d'un matériau élastique, G représente l'énergie spécifique requise pour créer une nouvelle surface libre. Cette énergie G est reliée au facteur d'intensité de contrainte K par la relation suivante :

$$J = G = \frac{K_l^2}{E'}$$
II.116
$$E' = E \qquad \text{en contraintes planes}$$

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \qquad \text{en déformation planes}$$

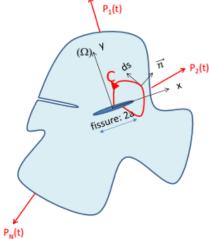


Figure III.4 : Contour arbitraire *C*autour de la fissure.

Lorsque l'ensemble de la structure en étude n'atteint pas une plastification étendue, c'est-à-dire lorsque les déformations plastiques ne sont pas très répandues, l'intégrale J est théoriquement indépendante du contour choisi pour son calcul. Cette caractéristique d'invariance de J par rapport au contour permet de sélectionner un contour éloigné de la pointe de la fissure. Cette approche présente l'avantage d'éviter les imprécisions associées aux erreurs significatives souvent présentes dans le calcul des champs mécaniques singuliers à proximité immédiate de la pointe de fissure.

III.2.2.2 Mesure du J_{IC}

Les normes les plus récentes détaillent les conditions expérimentales et les étapes de mesure de JIc. Ces procédures sont similaires à celles utilisées pour GIc ou KIc. La mesure de J peut être effectuée en calculant la différence entre deux courbes de réponse F(u) obtenues pour deux valeurs de la longueur de fissure a différentes (comme illustré dans la figure III.5) :

$$J = -\int \frac{\partial F}{\partial a} du$$
 ou bien $J = \int \frac{\partial u}{\partial a} dF$ III.17

Pour les matériaux ductiles, la ténacité KIc et l'énergie spécifique de création de surface sont substituées par une valeur critique de l'intégrale J.

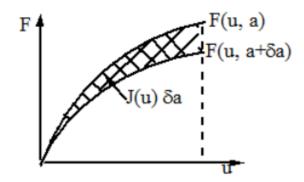


Figure III.5 : Mesure de J sur des essais à deux paramètres (F, u).

III.2. 3. Relation entre l'intégrale J et le CTOD

Lorsque le matériau se comporte de manière linéaire élastique, J est équivalent à G, et une relation similaire existe entre J et δ :

$$J=m\sigma_{e}$$
 δ III.18

Où m est une constante sans dimension qui dépend de l'état des contraintes et des propriétés du matériau. Cette relation demeure valable même en dehors des limites de validité de la Mécanique Linéaire de la Rupture.

Prenons, par exemple, le modèle de Dugdale-Barenblatt (illustré dans la figure III.6). Pour calculer l'intégrale J, nous pouvons choisir le contour C indiqué sur cette figure. Si la longueur ρ de la zone endommagée est considérablement plus grande que le CTOD δ ($\rho >> \delta$), le premier terme de l'intégrale J est négligeable car dy \approx 0. Dans ce cas, l'intégrale J est donnée par :

$$\mathbf{J} = \int_{C} \frac{\partial_{\mathbf{u}\mathbf{y}}(\chi)}{\partial \chi} d\mathbf{s}$$
 III.19

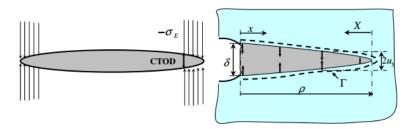


Figure III.6 : Modèle de Dugdale-Barenblatt.

Si nous définissons l'origine du repère à l'extrémité de la zone endommagée, ce qui équivaut à effectuer un changement de variable en posant $X=x-\rho$, alors le déplacement u ne dépend que de X pour une valeur fixée de δ , et l'intégrale J peut être exprimée comme suit :

$$J = 2\sigma_e \int_0^\rho du_y (X) = \sigma_e \int_0^\rho d\delta = \sigma_e \delta = \sigma_e.CTOD$$
 III.20

Dans cette expression, X représente la variable de déplacement définie par le changement de variable, δ est le CTOD, σ est la contrainte, et σ e est la contrainte élastique. Elle montre comment calculer J dans le contexte de ce changement de variable.

III.2.4 Courbe J_R de résistance à la fissuration

Certaines méthodes de caractérisation de la résistance à la rupture, répertoriées dans la littérature, permettent de construire des courbes de résistance. Contrairement aux méthodes reposant sur un unique paramètre de rupture, les courbes de résistance ne se contentent pas seulement de prédire les conditions sous lesquelles une fissure va commencer à se propager. Elles offrent également la possibilité de prédire l'évolution de la fissure à mesure que l'énergie totale stockée à la pointe de la fissure est libérée par la création de nouvelles surfaces. Ces courbes de résistance sont souvent désignées sous le nom de "courbes J-R", où J représente la valeur de l'intégrale de contour J et R fait référence à la résistance à la rupture.

La figure III.7 illustre une courbe de résistance J-R typique. Étant donné que J est une mesure de l'énergie disponible pour la création de nouvelles surfaces, il est aisé de comprendre, en observant cette figure, que pour prolonger davantage la fissure, il est nécessaire que cette énergie augmente constamment. De plus, cette figure met en évidence un paramètre de rupture unique appelé JIC, qui marque le point où la propagation stable de la fissure débute. Une procédure détaillée pour mesurer ce paramètre de rupture est fournie dans les normes ASTM E813. Cependant, bien que JIC puisse indiquer la valeur de J à partir de laquelle la fissure commence à se propager, il ne fournit aucune information sur la progression future de la fissure. C'est pourquoi notre approche de caractérisation repose sur l'utilisation des courbes de résistance J-R.

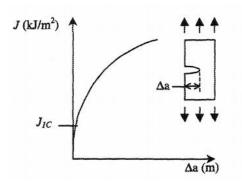


Figure III.7 : Courbe de résistance J-R typique.

III.2.5. Rupture contrôlée par l'intégrale J

III.2.5.1 Intégrale J dans la rupture fragile :

En exploitant l'équivalence entre J et G, un bilan énergétique effectué par Irwin dans une structure élastique pour une petite avancée de la fissure démontre que le facteur d'intensité de contraintes est corrélé à l'intégrale Jel par une relation quadratique telle que :

$$J^{el} = \frac{K_{I}^{2}}{E} + \frac{K_{II}^{2}}{E} + \frac{(1+v)K_{III}^{2}}{E}$$
III.21

Avec:

$$E = \begin{cases} E & \text{contraintes planes} \\ \frac{E}{1-v^2} & \text{en déformations planes} \end{cases}$$

Cette équation démontre que tant l'intégrale de Rice que le facteur d'intensité de contraintes offrent la possibilité de quantifier, à l'aide d'une seule valeur scalaire, l'effet d'une charge sur une structure élastique comportant une fissure soumise à un mode de déformation potentiellement complexe.

III.2.5.1.1Les corrections de zone plastique :

L'élasticité linéaire est une méthode très efficace pour analyser les matériaux lorsque les charges appliquées sont considérablement plus faibles que le seuil de plasticité du matériau en question. Cependant, dans le cas des singularités de contraintes provoquées par des fissures, l'approche élastique conduit à des niveaux de contraintes infinis en pointe de fissure. Par conséquent, l'approche élastique ne s'applique pas dans cette situation.

Il existe une région entourant la pointe de la fissure où le matériau est complètement plastifié. Cette région offre pratiquement aucune résistance aux charges appliquées dans la structure, en supposant une plasticité parfaite. La figure III.8 illustre de manière schématique cette zone plastique en pointe de fissure.

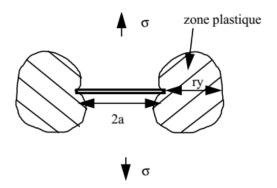


Figure III.8 : Représentation schématique de la zone plastique.

On cherchera à estimer avec différentes approches le rapport :

$$\frac{\mathbf{r}_{y}}{\mathbf{a}} = \Phi$$
 III.22

La prise en compte de la plasticité de pointe de fissure reviendra à remplacer la longueur a de la fissure par : $a(1+\Phi)$ dans le calcul de KI ou de J^{el} .

III.2.5.1.2 La plasticité confinée en pointe de fissure :

L'hypothèse de plasticité confinée repose sur la supposition que Φ est de petite valeur, ce qui nous permet d'utiliser le développement limité en pointe de fissure obtenu à partir de la solution de Westergaard. Dans cette approche, nous considérons que le matériau est élastoplastique parfait, avec une limite élastique σ 0, et qu'il satisfait au critère de Von Mises.

Pour une fissure de longueur 2a soumise à un chargement en mode I dans un milieu infini, comme illustré dans la figure III.8, avec l'hypothèse de contraintes planes, le lieu géométrique des contraintes qui atteignent le critère de Von Mises est donné par la relation suivante en coordonnées polaires :

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 + 3\sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$
 III.23

La configuration de cette zone plastique est illustrée dans la figure II.9 et présente les caractéristiques typiques d'une fissure soumise à un chargement en mode I.

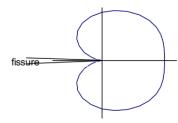


Figure III.9: Zone plastique de pointe de fissure en mode 1.

Irwin propose une méthode plus détaillée, spécifique au mode I et dans le contexte des contraintes planes. Cette approche tient compte d'un rééquilibrage des forces. La figure III.10 illustre comment les contraintes se répartissent dans la direction perpendiculaire à la fissure, à la fois avant et après le tronçonnage sur une longueur de 2ry. Afin de rétablir l'équilibre des forces, les zones hachurées doivent avoir des surfaces équivalentes.

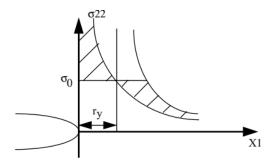


Figure III.10: Méthode d'Irwin pour le calcul de r_y.

La fissure se comporte alors comme une fissure de longueur a+ry, avec:

$$\frac{\mathbf{r}_{y}}{\mathbf{a}} = \phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0}} \right)^{2}$$
 III.24

Irwin complète sa solution en développant une approche plus approximative en déformations planes, il obtient alors:

$$\Phi = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2$$
 III.25

avec $\beta = 2$ en contraintes planes

et $\beta = 6$ en déformations planes

Cette correction s'applique uniquement lorsque les niveaux de chargement sont faibles. Par conséquent, il n'est pas approprié de l'utiliser au-delà du stade de plasticité généralisée. À des niveaux de chargement plus élevés, d'autres corrections seront nécessaires, comme nous l'expliquerons ultérieurement. Nous devrons également faire usage de la correction empirique de plasticité suivante :

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{\left(\sigma/\sigma_0\right)^2}{1 + \left(\sigma/\sigma_0\right)^2}$$
 III.26

L'expression précédente est conçue pour restreindre la correction de la plasticité confinée aux niveaux de chargement élevés.

III.2.5.2 Intégrale J dans la rupture des matériaux ductiles :

Le calcul de l'intégrale de contour J pour un matériau ductile et une configuration de fissure spécifique dans une structure peut toujours être réalisé numériquement. Cependant, il est essentiel de déterminer les conditions dans lesquelles cette intégrale demeure une caractéristique fiable de la vulnérabilité d'une structure soumise à une charge donnée.

Kumar et Shih ont avancé l'hypothèse de la répartition radiale des charges. Selon cette hypothèse, les contraintes à une certaine distance c de la pointe de fissure sont directement proportionnelles à la charge appliquée :

$$\frac{\overline{\overline{\sigma}}}{\overline{\overline{\sigma}}(n,\theta)} = \frac{p}{p_0}$$
 III.127

P₀ est une valeur spécifique qui est choisie de manière arbitraire. Dans cette expression, l'intégrale In de la solution H.R.R. est substituée par une fonction h1 qui dépend de la géométrie de la structure et du coefficient d'écrouissage du matériau. La solution H.R.R. pour un solide de dimensions finies peut alors être formulée comme suit :

$$\mathbf{J}^{\mathbf{P}} = \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 \mathbf{h}_1 \mathbf{c} \left(\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}_0} \right)^{\mathbf{n} + \mathbf{l}}$$
 III.28

C'est ainsi que de nombreux résultats basés sur la méthode des éléments finis ont été compilés dans les formulaires EPRI, en ce qui concerne la contribution plastique de l'intégrale J. L'estimation complète de l'intégrale J dans les formulaires EPRI est généralement formulée comme suit :

$$J=J^{el}(1+\phi)+J^{P}$$
 II.29

$$\phi = \frac{1}{\beta} \frac{n-1}{n+1} \frac{\left(P/P_{0}\right)^{2}}{1+\left(P/P_{0}\right)^{2}}$$
 II.30

$$\beta = \begin{cases} 2 \text{ en contraintes planes} \\ 6 \text{ en déformations planes} \end{cases}$$

Φ représente une correction de plasticité confinée pour un matériau de Ramberg-Osgood. De plus, P0 est généralement choisi comme étant égal ou proche de la charge limite de la structure. Bien qu'il ne soit pas explicitement mentionné, la fonction h1(n) dépend également du choix de P0. Les propriétés de l'intégrale J sont donc respectées pour les matériaux de Ramberg-Osgood. Pour les autres matériaux, on ne dispose d'aucun résultat, mais tout laisse penser que l'intégrale J

reste indépendante du contour d'intégration avec une très bonne approximation. Par conséquent, le calcul de l'intégrale J doit être effectué numériquement, et il est essentiel de vérifier systématiquement l'indépendance des résultats par rapport au contour d'intégration.

III.2.5.1.3 Méthodes de caractérisation de la résistance à la rupture

En ce qui concerne les méthodes de caractérisation de la résistance à la rupture, elles peuvent être regroupées en deux catégories principales. La première catégorie vise à obtenir un paramètre de rupture unique, tandis que la deuxième catégorie permet d'obtenir des courbes de résistance.

Les essais normalisés E-1152, D-6068 et ASTM E-813 proposent deux types d'éprouvettes à utiliser pour caractériser la résistance à la rupture. Ces normes fournissent également les équations nécessaires pour calculer l'intégrale J à partir de la mesure de l'énergie dissipée et de la longueur initiale de la fissure pour chaque type d'éprouvette.

Le premier type d'éprouvette est l'éprouvette en flexion fissurée sur le côté (Single Edge Notched Bend). Plusieurs auteurs ont utilisé ce type d'éprouvette, et la figure III.29 illustre son apparence et son montage. Le paramètre de Merkle-Corten T est égal à 2 pour ce type d'éprouvette, ce qui permet de calculer l'intégrale de contour J à partir de l'équation III.32.

$$J = \frac{\eta U}{B(W - a_0)} = \frac{2U}{B(W - a_0)}$$
III.31

Le deuxième type d'éprouvette est l'éprouvette compacte en tension CT (Compact Tension). Dans la littérature, certains auteurs ont opté pour ce type d'éprouvette [26 à 28]. La figure II.11 illustre cette éprouvette. Le paramètre de Merkle-Corten Tc pour une éprouvette compacte en tension CT est calculé comme suit : Tc = 2 + 0.522bo/W, où bo représente la longueur du ligament non fissuré (W - \hat{u} o).

En conséquence, l'équation III.118 peut être réécrite comme suit :

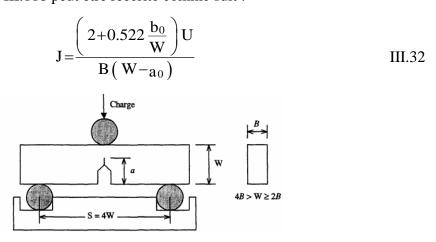


Figure III.11 : Éprouvette en flexion fissurée sur le côté (SENB)

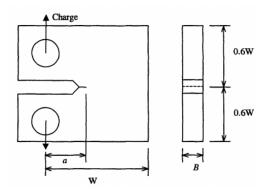


Figure III.12: Éprouvette compacte en tension (CT)

III.2.6. Tri axialité des contraintes en plasticité étendue

Le taux de triaxialité de contraintes T est défini comme le rapport entre la contrainte hydrostatique σ h et la contrainte équivalente de Von Mises σ eq, exprimé de la manière suivante :

$$T = \frac{\sigma_h}{\sigma_{eq}}$$
 III.33

Où σ_h et σ_{eq} sont exprimées dans les directions principales par :

$$\sigma_h = \sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$
 III.34

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
 III.35

 σ_i (i=1-3) sont les contraintes principales.

Pour les essais bi-axiaux sur les éprouvettes en forme de papillon, les contraintes σ_1 et σ_2 sont calculées en utilisant les relations suivantes :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 - 4\sigma_{xy}^2}$$
 III.36

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 - 4\sigma_{xy}^2}$$
 III.37

Les contraintes σxx , σyy et σxy représentent les contraintes locales au centre des éprouvettes en forme de papillon.

Chapitre IV Fatigue des matériaux

IV .1.Introduction

La fatigue peut provoquer la rupture du matériau même lorsque les contraintes appliquées sont bien en deçà de sa limite élastique apparente. Dans certains cas, notamment lorsqu'il s'agit de fatigue plastique oligocyclique à faible nombre de cycles, les déformations peuvent également contribuer à ce processus. Toutefois, de manière générale, l'amorçage d'une microfissure en fatigue est principalement attribué à une déformation plastique localisée dans des zones présentant une forte concentration de contraintes, résultant d'effets tels que des géométries particulières (effets d'entaille) ou des hétérogénéités métallurgiques (comme la présence de grains ou d'inclusions).

La rupture en fatigue peut se produire sous différentes sollicitations, la plus courante étant la rupture induite par une sollicitation externe alternée. Dans les cas où des contraintes résiduelles existent déjà dans le matériau, par exemple dans les assemblages soudés, ces contraintes résiduelles peuvent se combiner avec les contraintes externes. De plus, ces charges peuvent être combinées à d'autres sollicitations telles que le fluage (déformation lente sous contrainte constante) ou la fatigue thermique due à des variations de température. Le fait de soumettre le matériau à un environnement dégradant peut également accélérer le phénomène de rupture en fatigue.

La durée de vie d'un matériau ou d'une structure est généralement quantifiée par le nombre de cycles à la rupture, noté NR. Lorsqu'un nombre de cycles N inférieur à NR est effectué (N < NR), cela entraîne un certain niveau d'endommagement de la structure, ce qui est essentiel à évaluer pour déterminer sa capacité de vie résiduelle. Cette évaluation permet de décider s'il est nécessaire de remplacer la pièce afin de prévenir un éventuel accident. La capacité d'une pièce ou d'une structure à résister à la fatigue est désignée sous le terme "endurance". Par conséquent, il est essentiel de pouvoir prédire dès la phase de conception la durée de vie et l'endommagement potentiels d'une structure en fonction des sollicitations auxquelles elle sera soumise.

Il est cependant nécessaire de clarifier certains termes et concepts, ainsi que de maîtriser l'utilisation d'un diagramme d'endurance, ce qui constitue l'objet de ce premier chapitre de rappel. Grâce à l'introduction du calcul des structures, il est désormais possible d'évaluer les niveaux de contraintes dans des structures complexes, ce qui nécessite le développement de critères de fatigue multiaxiaux, comme nous l'examinerons dans un deuxième chapitre, en se penchant notamment sur l'extension multiaxiale du critère uniaxial de Goodman et le critère multiaxial de Dang Van utilisés par la SNCF.

IV .2.Approche globale : les courbes de Wölher

La fatigue est un terme générique qui désigne le processus d'endommagement des matériaux, aboutissant à leur rupture, lorsque ces matériaux sont soumis à des contraintes fluctuantes dans le temps, et ce, même si ces contraintes sont nettement inférieures à celles nécessaires pour provoquer une rupture en régime quasi-statique.

Pour caractériser de manière complète et globale le comportement en fatigue d'un matériau, il est essentiel d'établir des courbes de Wöhler (ou courbes S-N) qui représentent l'évolution du nombre de cycles à la rupture, c'est-à-dire la durée de vie du matériau, en fonction de la contrainte maximale appliquée pendant les cycles de sollicitation. Dans ce contexte, on distingue généralement trois domaines principaux :

- 1. La fatigue à faible nombre de cycles (**LCF** : **Low Cycle Fatigue**) : Dans ce domaine, la contrainte maximale est proche, voire supérieure, au seuil de plasticité initial du matériau. En conséquence, le nombre de cycles à la rupture est relativement faible, typiquement de l'ordre de quelques milliers de cycles.
- 2. La fatigue à grand nombre de cycles (**HCF** : **High Cycle Fatigue**) : Dans ce domaine, la contrainte maximale reste en deçà du seuil de plasticité initial du matériau. On distingue deux sous-domaines :
- a. Le domaine d'endurance limitée : Dans cette région, la rupture survient sans qu'il y ait une déformation plastique généralisée du matériau, et elle se produit après un grand nombre de cycles, généralement compris entre 10^4 et 10^7 cycles.
- b. Le domaine d'endurance illimitée : Dans cette partie, la contrainte maximale est si basse qu'elle ne provoque pas de rupture, même après un très grand nombre de cycles. On délimite conventionnellement une limite de fatigue, qui correspond à un nombre de cycles à la rupture infiniment élevé.

Ainsi, les courbes de Wöhler fournissent des informations essentielles pour évaluer la durée de vie en fatigue d'un matériau et déterminer son comportement en fonction des contraintes appliquées au fil du temps.

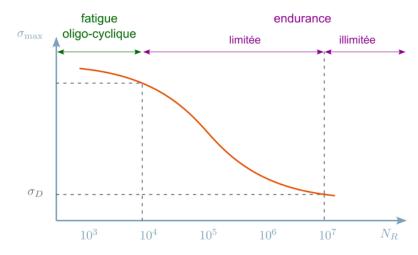


Figure IV.1. Allure générale d'une courbe de Wölher

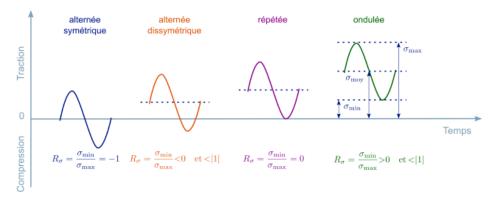


Figure IV.2. Description des différents types de chargement en fatigue (R_\sigma : rapport de charge).

Pour établir la courbe de Wöhler d'un matériau, des éprouvettes sont soumises à des cycles de contrainte spécifiques, caractérisés par un rapport de charge donné (comme illustré dans la Figure IV.1). La durée de vie à une contrainte maximale donnée est mesurée lors de ces essais. Contrairement aux essais de traction qui fournissent une estimation déterministe des propriétés mécaniques d'un matériau, les essais de fatigue fournissent des données statistiques. Cela est dû à la forte dispersion des valeurs de durée de vie, qui peut varier de 1 à 3, typiquement. Une série d'essais est donc généralement réalisée pour une même contrainte.

Il est important de noter que le logarithme de la durée de vie suit une distribution normale. Exploiter cette caractéristique log-normale permet notamment de déterminer avec une bonne précision le nombre de cycles admissibles garanti pour un certain niveau de risque de rupture.

Dans le cas de contraintes faibles, notamment dans le domaine de l'endurance, on considère que la majeure partie de la durée de vie est consacrée à l'amorçage des fissures, tandis que la propagation des fissures joue un rôle prépondérant lorsque les contraintes sont élevées, en particulier dans le domaine oligocyclique.

L'endommagement en fatigue est un processus insidieux. En dehors du domaine oligocyclique, où une déformation plastique généralisée peut se produire, la pièce soumise à la fatigue-endurance conserve généralement sa forme initiale jusqu'au dernier cycle avant la rupture. Ainsi, il n'y a généralement pas de signes macroscopiques de dégradation observable. L'endommagement se manifeste à l'échelle microscopique au sein de zones de concentration de contraintes, telles que les singularités géométriques, les défauts de surface, ou les défauts microstructuraux tels que les inclusions, les micro-retassures, ou les particules durcissantes comme les carbures, les nitrures ou les carbonitrures. Localement, dans ces zones, la contrainte peut dépasser la limite d'élasticité du matériau. La dispersion des valeurs de durée de vie est directement liée à la probabilité de rencontrer dans l'éprouvette testée un de ces défauts susceptibles de provoquer la plasticité confinée.

De nombreux facteurs influencent le comportement en fatigue, notamment la température, l'environnement (par exemple, atmosphère oxydante ou vide), l'état de surface, les contraintes résiduelles, la taille de l'éprouvette ou de la pièce, la forme du chargement, l'humidité relative, la fréquence des cycles, et les caractéristiques intrinsèques du matériau, telles que sa microstructure, sa composition, et la taille des grains.

Dans certains cas, notamment en présence de plasticité confinée où une zone d'intérêt est entourée d'une zone déformée élastiquement qui impose ses conditions aux limites, les éprouvettes d'essai sont soumises à des cycles de déformation imposée plutôt qu'à des cycles de contrainte. La contrainte est alors enregistrée en fonction du nombre de cycles appliqués ou de la déformation plastique cumulée. Dans la plupart des cas, la contrainte diminue au fil des cycles, provoquant un adoucissement du matériau, puis se stabilise avant la rupture. Cependant, dans certains matériaux, la contrainte peut augmenter au moins pendant les premiers cycles, ce qui est appelé durcissement cyclique. Il est généralement admis qu'il existe une relation entre la déformation plastique et la durée de vie, comme formulé par Manson & Coffin.

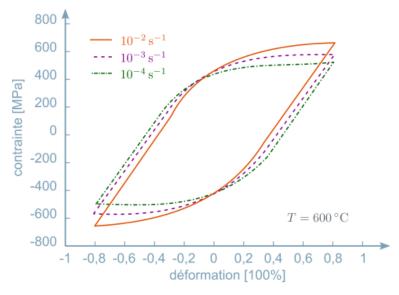


Figure IV.3. Boucle d'hysteresis contrainte-déformation pour un acier X38CrMoV5.

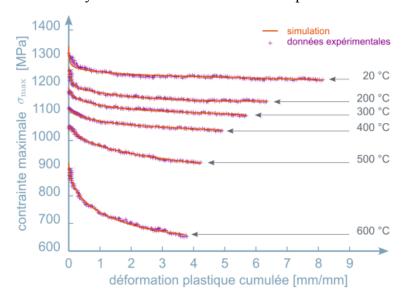


Figure IV.4. Relaxation de contrainte

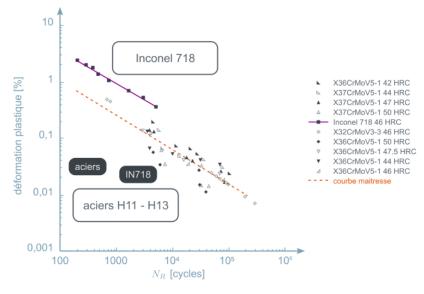


Figure IV.5. Courbe de Manson Coffin (acier H11-H13 et l'INCO718 testés à 550 °C).

IV .3. Approche différentielle : la loi de Paris

Les courbes de Wölher donnent seulement des informations sur la durée de vie des matériaux soumis à des cycles de contrainte. Elles ne renseignent en rien sur les mécanismes d'initiation et de propagation des fissures. L'initiation des fissures dans un matériau soumis à des cycles de fatigue relève de processus complexes qu'il est difficile de modéliser. Nous verrons par la suite comment on peut les décrire qualitativement. En revanche, on sait modéliser analytiquement avec une bonne précision les phénomènes de propagation des fissures après qu'elles aient été amorcées. Généralement, le paramètre estimé est la vitesse de propagation de la fissure que l'on détermine en exploitant les résultats d'un essai de tolérance au dommage. L'essai consiste à générer, typiquement au droit d'un trou, une pré fissuration en soumettant le matériau, sous la forme d'une éprouvette plate par exemple (voir figure), à des cycles de fatigue (figure suivante). L'idée est d'initier au sein du matériau une fissure susceptible de se propager au cours des cycles de chargement cumulés qui suivent (Figure IV.9).



Figure IV.6. Essai de tolérance au dommage : éprouvette de type Irwin.

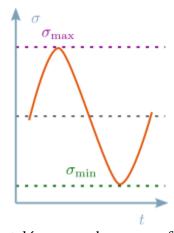


Figure IV .7. Essai de tolérance au dommage : forme du chargement

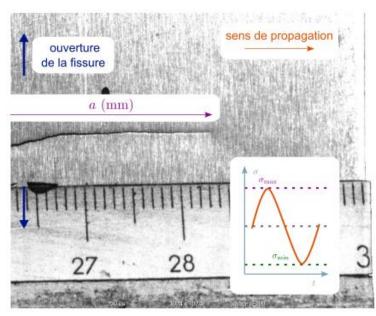


Figure IV.8. Essai de tolérance au dommage : progression d'une fissure dans un alliage Aluminium Cuivre (2024)

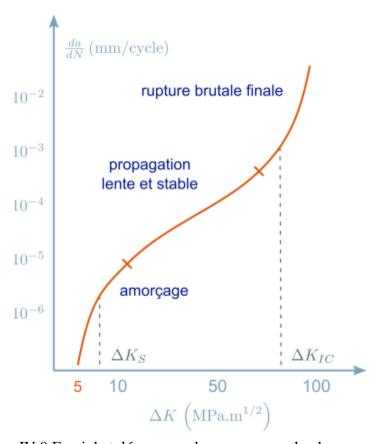


Figure IV.9. Essai de tolérance au dommage : courbe de propagation

La longueur de la fissure, notée "a", est mesurée en fonction du nombre de cycles dans le cadre de l'essai de tolérance au dommage. Cette mesure peut être effectuée de différentes manières, notamment optiquement à l'aide de caméras ou électriquement en exploitant les variations de résistance électrique. Cette résistance est préalablement calibrée de manière à être sensible aux

changements de dimensions du ligament de l'éprouvette, à travers lequel un courant électrique passe. En surveillant ces variations, la longueur de la fissure peut être déterminée. La vitesse de propagation de la fissure, exprimée en millimètres par cycle, est ensuite calculée directement.

La vitesse de propagation de la fissure augmente progressivement depuis son amorçage jusqu'à la rupture finale brutale et catastrophique de l'éprouvette. Cependant, cette évolution de la vitesse de propagation suit une loi relativement simple dans la période intermédiaire, où la propagation est lente, stable et prédictible. Cette loi est gouvernée par la loi de Paris, qui s'exprime comme suit :

$$\frac{da}{dN} = C. \Delta K^{\rm m}$$

ou C et m sont des constantes caractéristiques du matériau et . ΔK est la variation du facteur d'intensité de contrainte. Il vient :

$$\frac{da}{dN} = C. \Delta \sigma^{\rm m}. \pi^{\rm m/2}. \alpha^{\rm m/2}$$

et donc

$$\frac{da}{dN} = \frac{da}{\lambda \cdot \alpha^{m/2}}$$

avec $\lambda = C. \alpha^{m}. \Delta \sigma^{m}. \pi^{m/2}$

Le nombre de cycles $\Delta N = N_2 - N_1$ nécessaires pour accroitre la taille d'une fissure de $\Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ s'écrit donc :

$$N_2 - N_1 = \frac{1}{\lambda} \int_{a1}^{a2} \frac{da}{a^{\text{m}/2}}$$
 IV .1

IV .4.Initiation, propagation des fissures et fractographie

L'analyse fractographique des faciès de rupture en fatigue fournit une mine d'informations précieuses. Généralement, on identifie trois zones distinctes correspondant aux différentes phases de défaillance : l'amorçage, la propagation stable et la rupture finale instantanée. Cependant, il est souvent difficile, du point de vue expérimental, de déterminer de manière précise les mécanismes d'amorçage des fissures en fatigue.

L'amorçage des fissures se produit généralement à la surface du matériau ou à des interfaces, telles que celles entre la matrice et les inclusions, ou le long des joints de grains. En surface du matériau, des instabilités plastiques locales peuvent se développer, provoquant une concentration de contrainte. Cela résulte de la localisation de la déformation dans des bandes de glissement,

accompagnée de phénomènes d'intrusion (où le matériau est repoussé vers l'intérieur) et d'extrusion (où le matériau est repoussé vers l'extérieur). Ces processus créent une surface rugueuse en forme de dents de scie, propice à la formation de concentrations de contraintes.

Après l'amorçage, un premier stade de propagation se produit, caractérisé par des déformations purement cristallographiques le long des plans atomiques du matériau. Cette phase initiale de propagation s'étend généralement sur une zone correspondant à quelques grains métallurgiques.

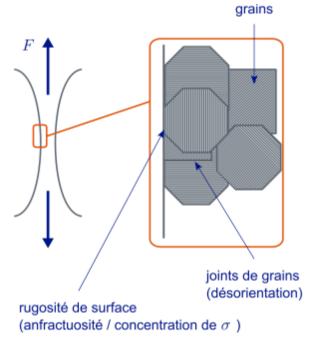


Figure IV.10 Rupture en fatigue : amorçage d'une fissure en surface.

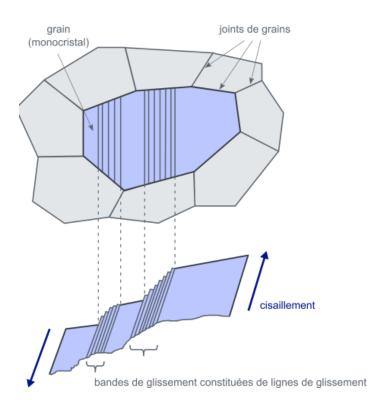


Figure IV.11 Rupture en fatigue : phénomène d'intrusion/extrusion.

Au-delà de cette phase initiale, la propagation des fissures se poursuit de manière transgranulaire, toujours caractérisée par une progression lente et stable. La surface de rupture présente alors un aspect lisse et soyeux, principalement plane. À l'échelle macroscopique, on peut identifier certaines caractéristiques dans cette région (comme illustré dans la figure suivante):

- 1. Lignes d'arrêt (ou lignes frontales) : Elles correspondent aux macro-cycles que le matériau a subis lors des différentes phases de fonctionnement de la pièce, marquant précisément les moments où la fissure s'est arrêtée. Il convient de noter que ces lignes ne sont généralement pas visibles si la structure est soumise à des conditions sous vide, ce qui suggère qu'elles sont probablement liées à des phénomènes d'oxydation.
- 2. Lignes de crête (ou lignes radiales) : Elles témoignent d'une légère irrégularité par rapport à la planéité parfaite du faciès de rupture, résultant de la propagation de la fissure le long de plans cristallins voisins. Ces plans cristallins sont généralement parallèles les uns aux autres mais légèrement décalés.

En examinant attentivement les lignes d'arrêt et les lignes de crête, il est en principe possible de déterminer avec précision la zone d'amorçage de la fissure.

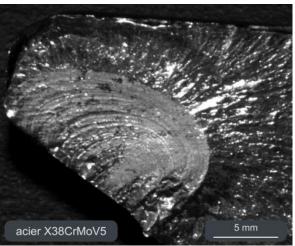


Figure IV.12 Rupture en fatigue : faciès de rupture en fatigue d'un acier X38CrMoV5

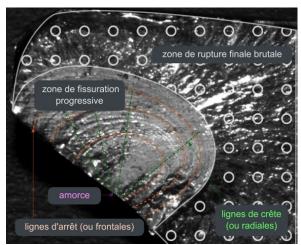


Figure IV.13 Rupture en fatigue : description schématique de la rupture en fatigue d'un acier X38CrMoV5

À l'échelle microscopique, des stries (comme illustré dans les figures suivantes) peuvent être observées, également liées à l'oxydation du front de fissure. Chacune de ces stries correspond à un cycle de fatigue, ce qui signifie qu'elles reflètent l'avancée élémentaire de la fissure au cours de sa propagation globale. L'analyse en comptant ces stries de fatigue fournit des informations précieuses sur le comportement du matériau. Par exemple, il est possible, grâce à une analyse fractographique approfondie, de déterminer la vitesse de propagation de la fissure ou de comparer de manière critique l'historique de la rupture du matériau à la sollicitation mécanique supposée.

Pendant la phase de propagation lente et stable, conforme à la loi de Paris, la taille de la fissure ainsi que les contraintes locales en pointe de fissure augmentent progressivement. Le facteur d'intensité de contrainte suit la même tendance. Lorsque ce facteur atteint sa valeur limite, appelée ténacité, la fissure se propage brusquement. Cette propagation est

caractérisée par une rupture catastrophique du matériau, se produisant quasiment instantanément et à une vitesse équivalente à celle du son dans le matériau (environ 3000 à 5000 m/s). Le faciès de rupture final présente une caractéristique ductile, se distinguant clairement de la région de propagation lente et stable par son aspect rugueux (comme illustré dans les figures suivantes).

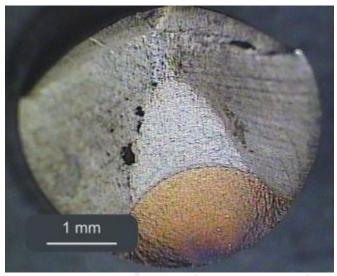


Figure IV.14 Rupture en fatigue : faciès de rupture d'une éprouvette d'IN718 rompue en fatigue à 550 °C.

Lorsqu'on étudie l'endommagement des matériaux soumis à des sollicitations en fatigue, il s'agit d'un phénomène intrinsèquement complexe et non linéaire. Pour le modéliser, il existe des approches sophistiquées, bien que peu couramment utilisées. Cependant, il existe un modèle simplifié, proposé par Miner, qui, bien que peu réaliste, est largement utilisé. Ce modèle repose sur la décomposition d'une charge complexe, constituée de cycles présentant des amplitudes variables entre différents niveaux de contrainte, en cycles partiels correspondant à chaque niveau de contrainte spécifique.

L'endommagement pour chaque cycle partiel est défini comme le rapport entre le nombre de cycles effectués à ce niveau de contrainte et le nombre de cycles nécessaires pour provoquer la rupture à ce niveau de contrainte. Les endommagements globaux sont considérés comme additifs, ce qui est appelé le cumul linéaire. La rupture survient lorsque le paramètre d'endommagement atteint la valeur unité.

Pour illustrer cela, prenons l'exemple d'une figure où le matériau subit N1 cycles à une contrainte maximale σ 1, N2 cycles à une contrainte maximale σ 2, et N3 cycles à une contrainte maximale σ 3. En général, si le matériau est soumis uniquement à des cycles au niveau de contrainte σ i (où i peut être 1, 2 ou 3), alors la rupture intervient après un nombre de cycles Ni. Le paramètre d'endommagement pour un niveau de contrainte σ i après Ni cycles est exprimé comme suit :

$$d_i = \frac{N_i}{N_{Ri}},$$
 IV .2

et l'endommagement total est :

$$d = \sum_{i} d_{i} = \sum_{i} \frac{N_{i}}{N_{Ri}}$$
 IV .3

Ce modèle suppose que la rupture se produit lorsque le paramètre d'endommagement atteint l'unité (D_i = 1). Cependant, il néglige totalement l'influence de la chronologie des cycles précédents sur l'endommagement subi lors d'un cycle donné. Cette simplification est peu réaliste, car il est bien établi que l'endommagement généré par un cycle particulier peut être fortement influencé par l'historique des chargements subis par la structure.

Par exemple, si un matériau fissuré est soumis à une surcontrainte pendant un cycle au cours d'un chargement cyclique, la propagation de la fissure peut ralentir. Cela se produit car la zone plastique en pointe de fissure s'élargit instantanément lorsque la surcontrainte est appliquée. Cependant, lors du cycle suivant, lorsque la contrainte nominale est rétablie, le retour élastique du matériau autour de la zone plastique exerce des contraintes de compression qui confinent la fissure et retardent sa propagation. Cette interaction complexe entre les cycles précédents et le cycle actuel est négligée dans le modèle de Miner, ce qui limite sa précision dans la prédiction de l'endommagement réel.

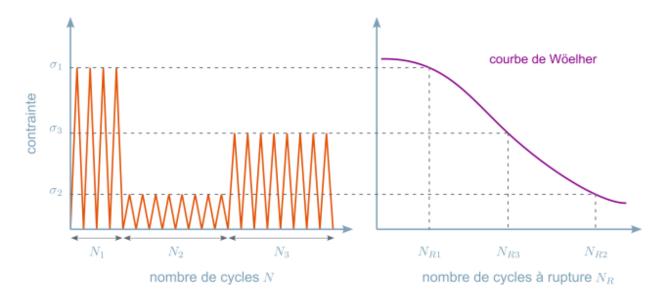


Figure IV.15 Endommagement de Miner

IV .5.Diagramme de Goodman - Smith

Les limites d'endurance d'un matériau pour différentes valeurs de contrainte alternée σa , allant de $\sigma a = -1$ à $\sigma a = +1$, peuvent être représentées graphiquement sur un diagramme, similaire à celui illustré dans la Figure IV.16. Sur ce diagramme, l'axe des abscisses représente la contrainte

moyenne σm , tandis que l'axe des ordonnées représente les contraintes maximales (σmax) et minimales (σmin). Pour construire ce diagramme, on utilise les résultats expérimentaux obtenus en appliquant différentes combinaisons de contraintes R (rapport entre σmin et σmax) et A (amplitude de la contrainte).

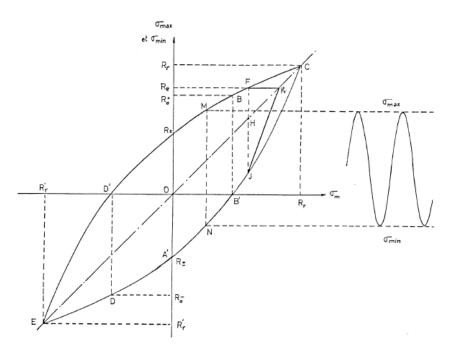


Figure IV.16 Diagramme de Goodman - Smith.

EXERCICES PROPOSES

Exercice n°1:

Un réservoir sous pression cylindrique de diamètres intérieur et extérieur 40 et 48 cm est réalisé en alliage d'aluminium ayant les propriétés suivantes :Re = 385 MPa,

 K_{1C} = 44 MPa \sqrt{m} . Le réservoir doit être soumis à une pression interne p = 70 MPa. Les techniques d'inspection ne permettent pas de déceler en service des fissures débouchant sur la face interne de moins de 0,5 cm de profondeur et de 3 cm de longueur.

- a) Le réservoir est-il sûr ?
- b) Que peut-on préconiser pour le rendre sûr ?

Rappel : le facteur d'intensité de contrainte peut être calculé de la façon suivante ;

$$K_{I}=1.12\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{1.07}}$$

Exercice n°2:

Calculer la ténacité d'un matériau pour lequel on effectue un essai sur une plaque de largeur W = 500 mm, d'épaisseur B = 19 mm, contenant une fissure centrale de longueur 2a = 50mm.

- a) Est-on en état de déformation plane?
- b) Quel est le type de rupture observé ? rupture brutale, plastification généralisée ?
- c) Quelle est la dimension de la zone plastifiée au moment de la rupture ? AN : charge à rupture 1360 kN, limite d'élasticité : 480 MPa

$$K = \beta \sigma \sqrt{\pi a}$$
, avec $\beta = 1 + 0.256 \left(\frac{a}{w}\right)^2 - 1.152 \left(\frac{a}{w}\right)^2 + 12.2 \left(\frac{a}{w}\right)^3$

Exercice n°3:

Calculer la contrainte maximale au fond d'une fissure de forme elliptique de longueur de 10 mm et de rayon de courbure $\rho = 2,0$ mm, telle que la contrainte de traction extérieure appliquée est de 100 MPa.

Déduire le facteur de concentration de contrainte ?

Exercice n°4:

Trois fissures sont détectées dans une structure par l'ultrason. La première d'une longueur de 16 mm dans une région de contrainte de 100 MPa avec une fonction de forme (f = 1,2)

La deuxième d'une longueur de 9 mm sous une contrainte de 150 MPa, avec f=1.1 et la troisième est d'une longueur de 25 mm dans une région de contrainte de 70 MPa et (f=1,3).

Quelle est la plus dangereuse fissure dans cette structure ?

Déduire l'énergie de Griffith correspondant à cette fissure, sachant que E = 207 GPa

Exercice n°5:

Lors d'un essai de la ténacité sur une éprouvette compacte.

- a) Calculer K_O
- b) Vérifier si l'essai est valide $(K_Q = K_C)$
- c) Calculer l'énergie (état de déformation plane)

On donne:

$$\sigma_e$$
 =759 MPa, F_Q = 42.3 KN, B = 25. 4 mm, W= 50.8 mm, a = 27.7 mm, E = 207 GPa, ν = 0.28.

a/w	0.40	0.45	0.50	0.54
$f_1(a/w)$	7.18	8.22	9.52	11.17

Exercice n°6:

On considère deux matériaux, dont les caractéristiques mécaniques sont les suivantes :

- un alliage d'aluminium 2024-T3 : de limite d'élasticité R_e = 490 MPa et de ténacité $K_{\rm 1C}$ = 110 $MNm^{\text{-}3/2}$

- un acier de limite d'élasticité R_e = 1700 MPa et de ténacité K_{1C} = 60 MNm^{-3/2}.

On veut tester deux éprouvettes constituées respectivement de chacun de ces matériaux ; on utilise des plaques à entaille centrale, contenant une fissure de longueur initiale 2a = 2 mm.

- 1) Déterminer la contrainte critique conduisant à la rupture brutale pour ces matériaux.
- 2) Commentez les résultats obtenus : selon vous, quel type de rupture obtiendra-t-on pour chacun des matériaux ? Quel matériau suggéreriez-vous d'utiliser et pourquoi ?

Exercice n°7:

Une plaque de verre de 2 m par 200 mm par 2 mm contient une fissure centrale parallèle au côté de 200 mm. La plaque est fixée à une extrémité et chargée en tension de l'autre avec une masse de 500 kg. Quelle est la longueur maximale admissible de la fissure avant la rupture ? Supposons l'état de contrainte plane et les valeurs de propriété matérielle suivantes : E = 60 GPa, l'énergie de surface est de 0.5 J / m^2 .



Exercice n°8:

La charge sur une plaque de 30 mm d'épaisseur avec une fissure de bord de 50 mm de longueur a été augmentée très lentement et le déplacement du point de charge a été surveillé. On a observé qu'à la charge de 2100 N et le déplacement u = 4,1 mm, la fissure a commencé à croître. Le taux de croissance de la fissure était beaucoup plus rapide que le taux d'augmentation de la charge et, par conséquent, la fissure a été essentiellement augmentée à la charge de 2100 N. Grâce à un enregistrement rapide de la caméra, on a constaté que la fissure augmentait jusqu'à 65 mm de longueur avec une augmentation rapide du déplacement à u = 7,5 mm. Déterminer le taux critique de libération d'énergie.

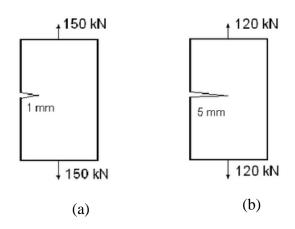
Exercice n°9:

La contrainte de rupture d'une plaque en acier, dont elle contienne une fissure centrale de longueur 40 mm est de 480 MPa.

Calculer la contrainte de rupture de ce même matériau, contenant une fissure d'une longueur de 100 mm.

Exercice n°10:

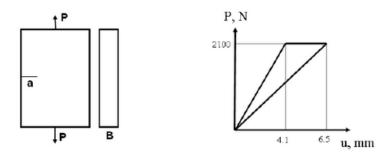
Un panneau, de 3 mm d'épaisseur et de 10 cm de large contenant une fissure de bord de 1 mm soumis en traction sous une charge de 150 Kn (a). Cependant, à une charge de 120 kN, un autre panneau de même matière est rompu en deux pièces lorsque la fissure avait une longueur de 5 mm (b). Avec cette information, calculer la contrainte élastique et la ténacité de rupture du matériau. Tel que le facteur de forme est de Y= 1.12



Exercice n°11:

Quelle est la contrainte maximale appliquée au niveau du fond d'une fissure intérieure de longueur 3,8.10⁻² mm, avec un rayon de courbature de 1,9.10⁻⁴ mm, sachant que la contrainte de traction nominale est de 140 MPa?

a) Déduire le facteur de concentration de contrainte ?



Exercice n°12:

Pour les matériaux ayant une ténacité modérée (par exemple des alliages d'aluminium), K_{Ic} peut être déterminé à partir de J_{Ic} . Exprimer l'épaisseur minimale requise pour l'essai J_{Ic} (Bj) en termes d'épaisseur minimale requise pour le test K_{Ic} (Bk).

Tels que:

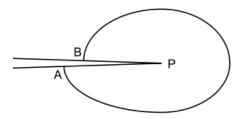
Le module d' Young E=70~000 MPa, la résistance élastique $\sigma_e=345$ MPa La résistance à la rupture $\sigma_r=500$ MPa

Exercice n°13:

La valeur de l'intégrale J est indépendante du chemin exact suivi par la pointe de fissure dans le sens antihoraire, en commençant parle plus bas et se terminant sur la fissure du flanc supérieure (figure ci-dessous).

a) Qu'est-ce que J pour un contour fermé, c'est-à-dire n'entourant pas la singularité de pointe de fissure?

b) Indiquez ce qui ne va pas dans le raisonnement du texte suivant : Le long du contour fermé ABPA représenté sur la figure, l'intégrale J est nulle. Le long des flancs AP et BP J est égal à zéro aussi. Par conséquent, J doit être nul le long du contour entourant fissure, \overrightarrow{AB} .



Exercice n°14:

Un test J_{Ic} est réalisé sur de l'acier avec les propriétés suivantes:

E=207 GPa ; $\sigma_{ys}=360$ MPa en $\sigma_{uts}=560$ MPa ; $\nu=0,28.$ A cet effet, une éprouvette de flexion à 3 points est utilisée ayant les dimensions suivantes :

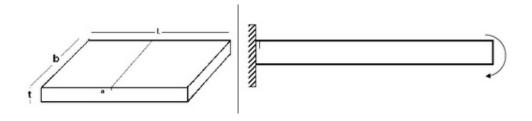
W = 50 mm; B = 20 mm; a = 30 mm.

La charge augmente linéairement avec le déplacement. Au début de l'extension de la fissure, la charge est de 25 kN, tandis que le déplacement est de 4 mm.

- a) Quelle valeur suit pour J_{Ic}, si cela est défini comme J au début de l'extension de la fissure?
- b) Quelle est la valeur correspondante pour K_{Ic} ?
- c) Quelle épaisseur doit avoir l'échantillon pour une détermination K_{Ic} valide ?

Exercice n°15:

Une plaque de perplexe rectangulaire de 600 mm par 300 mm par 6 mm d'épaisseur est décrite en deux carrés égaux par un couteau, laissant une coupe uniforme de profondeur de 0,3 mm. Quel est le moment de flexion nécessaire pour briser la plaque si la perplexe a un travail à une fracture de 500 J / m^2 ? Notez que E = 2.5 GPa pour perplexe.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIE

- 1 H.D. Bui, J.M. Proix Découplage des modes mixtes de rupture en thermoélectricité par des intégrales indépendantes du contour. Actes du troisième colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structures, Bastia, pp. 631-643, novembre 1985.
- 2 A. Ehrlacher Contribution à l'étude thermodynamique de la progression de fissure et à la mécanique de l'endommagement brutal, Thèse de doctorat d'état de l'Université Pierre et Marie Curie Paris 6, Février 1985.
- 3 A.L. Gurson Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I Yield criteria and flow rules for porous ductile media, Transaction of the ASME, Janvier 1977.
- 4 . Lemaitre et J.L. Chaboche Mécanique des matériaux solides, Dunod 2ème édition, Paris, 1988
- 5 A. Needleman and V. Tvergaard An analysis of ductile rupture modes at a crack tip, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 35, N° 2, pp. 151-183, 1987.
- 6 G. Rousselier Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture, Nucl.Engng. And Design, Vol. 105, pp. 97-111, 1987.
- 7 J.R. Rice A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, J.appl.mech, p.378-386, 1968Azzouz N., Cours de corrosion, Ecole NormaleSupérieure de Jijel, (2003)
- 8 Victor E. Saouma, Fracture Mechanics, Dept. of Civil Environmental and Architectural Engineering University of Colorado, Boulder, CO 80309-0428
- 9 T. Pardoen, Mécanique de larupture et son lien avec lamétallurgie, Ecole Polytechnique de Louvain, Belgium& Institute of Mechanics, Materials and Civil Engineering 2012.
- 10 S.G.IALLOUF, Approche Probabiliste du Dimensionnement Contre le Risque de Rupture, Thèse de doctorat, université de PauIverlaine de Metz et de l'université d'Alep, 2006
- 11 A. El Malki Alaoui, Influence du chargement sur la propagation en fatigue de fissures courtes dans un acier de construction navale, Thèse de doctorat, Université de Metz, 2005.
- 12 A.Zeghloul, Concepts fondamentaux de la Mécanique de la rupture, université de Lorraine, 2016
- 13 L. Giasson, Développement des méthodes de calcul et de mesure de la courbe J-R d'un composite polymère particulaire propergol, Mémoire de maitrise, Université du Québec, 2003
- 14 Bul H. D. « Mécanique de la rupture fragile », Masson (1978).

- 15 P. Chauchot, J. Labeyrie, Rupture Fragile minces des pièces et Méthodes des équations intégrales, Bretagne, 1982.
- 16 J. Desquines, Contribution à l'analyse de la rupture des composants mécaniques polycristallins, Habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard Lyon I, 2015.
- 17 D.François, Endommagement et rupture de matériaux, École Centrale de Paris, 2004.
- 18 K. Hachour, Contribution à l'élaboration d'un critère de plasticité pour le PEHD, Thèse de doctorat en Génie Mécanique, Université Mouloud Mammeri Tizi-ouzou, 2012.
- 19 El 152-95, Standard Test Methods for Determining J-R Curves of Plastic Materials, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1995.
- 20 D6068-96, Standard Test Method for Determining J-R Curves of Plastic Materials, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1996.
- 21 E813-81, Standard Test Method for Ji& A Measure of Fracture Toughness, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1981.
- 22 E813-87, Standard Test Method for Jiç, A Measure of Fracture Toughness, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1987.
- 23 E813-89, Standard Test Methodfor J1C, A Measure of Fracture Toughness, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1989.
- 24 J. Desquines, Analyse limite et éstimation simplifiée de l'intégrale J pour des tuyaux droits fissurés, Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1996.
- 25 J. Zuidema, M. Janssen, Exercises on Fracture Mechanics, sponpress, London, 2002.

Annexes

Tableau 1: Décades successives

Symbole	Nom usuel	Décade	Exemple
P	Pico	10 ⁻¹²	pF
N	Nano	10 ⁻⁹	nm, nF
μ (mm)	Micro	10^{-6}	
M	Mili	10^{-3}	mm, mg
		1	-
K	Kilo	10^{3}	KW, KN, KHz, KJ
M	Méga	10^{6}	MPa, MHz, M Ω
G	Giga	10^9	GPa, GHz
T	tera	10^{12}	THz

Tableau 2: Unités Physiques S.I.

rabicad 2. Offices raysiques 5.1.						
Symbole	Nom usuel	Grandeur	Exemples			
S	Second	Temps	t, Δt			
m	Mètre	Longueur	$r, D, e, h, \Delta l, l_0$			
m^2	Mètre carré	Surface	A, S, S_0			
m ³ ou 1	Mètre cube, litres	Volume	V			
m.s ⁻¹		Vitesse	х, v			
N.Kg ⁻¹ ou m.s ⁻²		accélération	ä, g			
MPa ou N.mm ⁻²	Méga Pascal	résistance mécanique, pression	σ, Ρ			
N	Newtons	force	F, T, N			
J ou N.m (KW.h EDF)	Joules	énergie, travail	W			
W ou J.s ⁻¹ ou V.A	Watts	puissance	P			
K	Kelvins	température	T, Δt			
°C	Degrés Celcius	température	θ			
A	Ampères	courant	i, 1			
V	Volts	tension	U, V, E			
Ω	Ohms	résistance	r, R			