

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**Université Ibn Khaldoun de Tiaret**

**Faculté des Sciences Appliquées**

**Département de Génie civil**



***Polycopié***

***Application de la méthode des éléments  
finis aux problèmes unidimensionnels  
(Cours et Exercices)***

***1<sup>ère</sup> Année Master option structure en Génie Civil***

Elaboré par:

Dr. ABDELAZIZ HADJ HENNI

Experts:

Pr. Ait Amar Meziane Mohamed

Pr. Hadji Lazrag

***Année universitaire: 2024-2025***

# Sommaire

Sommaire	i
<b>PREFACE</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>	<b>2</b>
<b>1 Principe et objectifs de la méthode des éléments finis</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction . . . . .	4
1.2 Discrétisation . . . . .	4
1.3 Types d'éléments finis . . . . .	5
1.4 Étapes de calcul par la méthode des éléments finis . . . . .	5
1.5 Objectifs de ce cours . . . . .	6
1.6 Conclusion . . . . .	6
<b>2 Éléments liés à un seul axe soumis à des actions axiales</b>	<b>7</b>
2.1 Introduction . . . . .	7
2.2 Éléments barre à deux nœuds en sollicitations de traction ou de compression	7
2.3 Formulation en élément finis . . . . .	8
2.3.1 Matrice de rigidité élémentaire . . . . .	9
2.4 Technique d'assemblage pour plusieurs éléments . . . . .	10
2.5 Exemples d'application . . . . .	12
2.5.1 Exemple 1 . . . . .	12
2.5.2 Exemple 2 . . . . .	17
2.6 Conclusion . . . . .	18
<b>3 Systèmes de treillis</b>	<b>19</b>
3.1 Introduction . . . . .	19
3.2 Passage du système local au global . . . . .	19
3.2.1 Formulation en éléments finis . . . . .	19
3.3 Conclusion . . . . .	26
<b>4 Elements poutre en flexion simple</b>	<b>27</b>
4.1 Introduction . . . . .	27
4.2 Equations de base de la théorie des poutres . . . . .	27
4.3 Formulation en éléments finis . . . . .	28
4.4 Exemple 01 . . . . .	32
4.4.1 Solution . . . . .	32
4.4.2 Vecteur des forces nodales $\{\mathbf{F}\}$ . . . . .	33
4.5 Exemple 2 (Sans solution) . . . . .	37

4.6	Conclusion . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Partie exercices</b>	<b>38</b>
5.1	Exercice N°1 . . . . .	38
5.2	Exercice N°2 . . . . .	41
5.3	Exercice N°3 . . . . .	43
5.4	Exercice N°4 . . . . .	48
	<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>	<b>51</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	

# PREFACE

Le domaine de génie civil comporte des documentations qui sont riches et disponibles. Dans ce cadre, nous avons mis au point ce travail présente comme un support du cours de la méthode des éléments finis. Ce dernier définit le principe de la méthode et les différentes étapes de calcul numérique de structures unidimensionnelles.

Ce polycopié s'adresse aux étudiants de Master 1 structure en génie civil. Il est rédigé de manière que l'attention du lecteur se concentre sur les applications pratiques du sujet traité. Des problèmes sont accompagnés de leurs solutions sont laissés à la réflexion des étudiants et pourront faire l'objet de travaux dirigés.

Enfin avec le développement de la formulation par éléments finis détaillée de quelques applications, ce polycopié constitue une référence pédagogique orientée au niveau de l'université de Tiaret, dans l'objectif de faciliter toutes consultation ou enseignement de la matière concernée.

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Durant ces dernières décennies, la méthode des éléments finis a connu un essor important lié au développement des ordinateurs avec le développement des moyens informatiques, elle s'est avérée au cours du temps plus conviviale et plus efficace.

Dans de nombreuses situations le modèle adéquat peut être obtenu en utilisant un nombre fini de composants, alors on parlera de problème discret. Si la subdivision doit être poursuivie indéfiniment, c'est-à-dire mettre en jeu un nombre infini d'élément alors ces problèmes sont continus. Donc pour étudier un système continu on le remplace par un système discret censé lui être proche en un certain sens (Batoz & Dhatt, 1990).

La résolution des problèmes de construction dans le domaine élastique revient généralement à la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles avec des conditions données sur le contour. Il est très difficile d'obtenir une solution analytique exacte de ces équations, pour cela beaucoup de savants ont dû recourir en premier lieu à des méthodes numériques approchées et peu précises (Liu, 1998).

La résolution des problèmes par ces méthodes a poussé d'autres auteurs à chercher des méthodes plus exactes qui peuvent supprimer certaines ambiguïtés dans les résultats de calcul, notamment la suppression d'hypothèses non conformes à la recherche pour cela la méthode des éléments finis est le fruit de cette recherche.

L'idée principale de cette méthode consiste à appliquer un procédé analogue à l'analyse des milieux continus tels que les poutres, la résolution du système linéaire donne les déplacements des nœuds à partir desquels on calcule les déformations puis les contraintes dans le milieu (Dhatt et al., 2004).

De même consiste à utiliser une approximation simple des variables (déplacements) pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle fait appel aux trois domaines suivants:

- Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Méthode numérique pour résoudre les équations algébriques.
- Programmation pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur.

Ce polycopie porte principalement l'application de la méthode des éléments finis aux problèmes à une seule dimension. À cet effet, ce modeste contexte est composé de cinq

chapitres accompagnés par des exercices corrigés.

Le premier chapitre expose le principe et les objectifs de la méthode des éléments finis.

Dans le second chapitre concernant les problèmes des éléments liés à un seul axe soumis à des actions axiales.

Dans le troisième aux problèmes des systèmes de treillis.

Le quatrième chapitre est consacré aux problèmes des poutres travaillant en flexion simple.

Le dernier chapitre expose des exercices proposés avec solutions.

# Chapitre 1

## Principe et objectifs de la méthode des éléments finis

### 1.1 Introduction

la méthode des éléments finis est une méthode approximative à moins qu'un certain problème puisse être extrêmement simple conduisant ainsi à une formule exacte toujours valable.

Par conséquent ce processus de modélisation d'un corps en le divisant en un système équivalent de plus petits corps d'unité (éléments finis) interconnectés en des points communs à deux ou plusieurs éléments (points nodaux).

### 1.2 Discrétisation

Le domaine géométrique est subdivisé en sous domaines de géométrie simple appelé 'élément' sur lequel l'étude du problème peut se faire en une seule opération.

La solution finale s'obtient en résolvant un système d'équations global forme en assemblant les équations obtenues sur tous les éléments constituant le domaine.

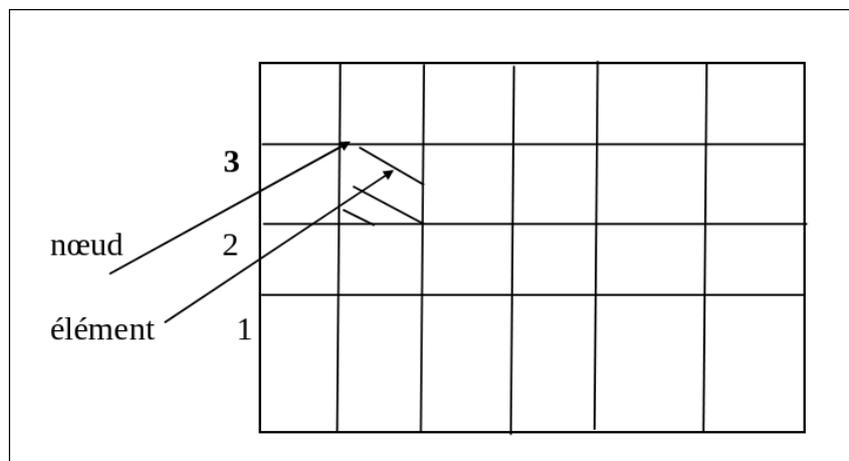


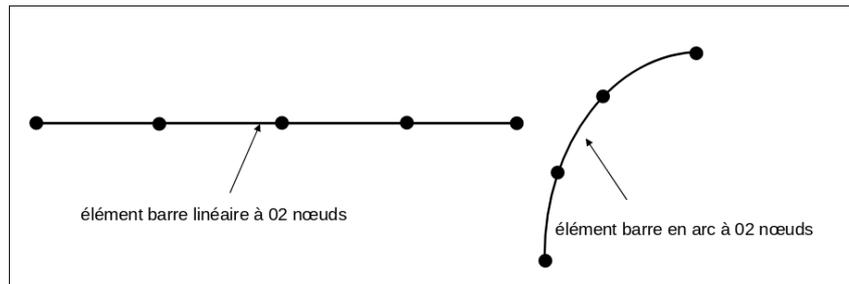
Figure 1.1: Discrétisation du domaine

### 1.3 Types d'éléments finis

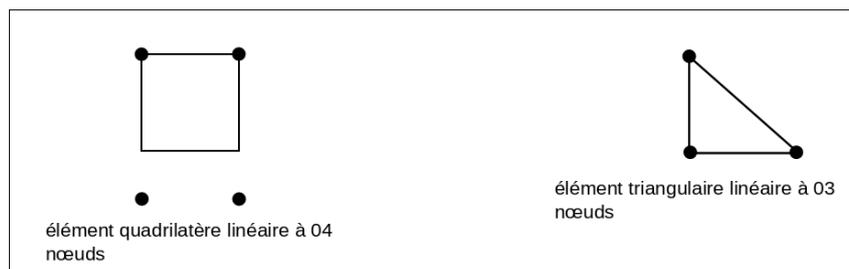
Dans la discrétisation des structures unidimensionnelle, bidimensionnelle et tridimensionnelle on a affaire à choisir les types d'éléments qui sont identifiés par la forme géométrique et le nombre de nœuds constituant l'élément.

A cet effet, nous allons représenter les différents types les plus utilisés suivants :

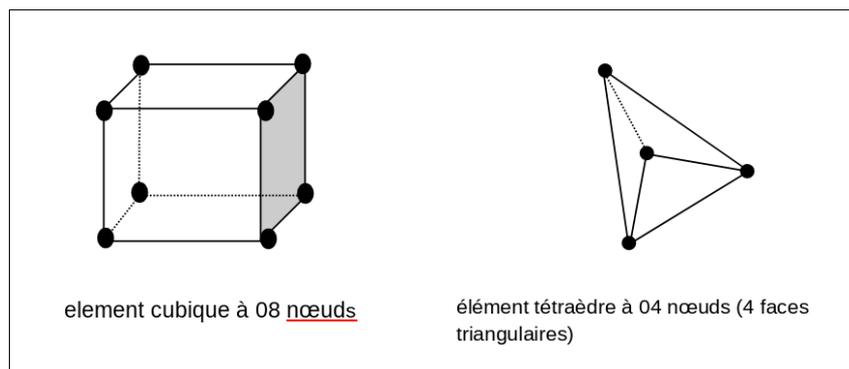
a) Éléments barre à 1 dimension :



b) Éléments plaque à deux dimensions :



c) Éléments coque à trois dimensions :



### 1.4 Étapes de calcul par la méthode des éléments finis

- Introduction des données du problème à traiter concernant les caractéristiques géométriques et physico-mécaniques de la structure.
- Discrétisation: numérotation des nœuds et des éléments ainsi que les charges appliquées étant concentrées et rapportées aux nœuds de la structure.

- Construction des matrices de rigidité élémentaires  $[k]^{(e)}$ .
- Construction de la matrice de rigidité globale de la structure par la technique d'assemblage  $[K]$  ainsi que le vecteur global des forces nodales  $F$
- Introduction des conditions d'appuis.
- Résolution du système d'équations  $[K].d=F$  afin de déterminer les composantes inconnues du vecteur de déplacement  $d$ .
- Calcul des efforts internes (Contraintes).
- Impression des résultats.

## 1.5 Objectifs de ce cours

Ce polycopié est un guide adressé aux étudiants a pour but de :

- Comprendre l'idée fondamentale de cette approche.
- Comprendre l'usage et le comportement de chaque type d'élément vu dans ce cours.
- Etre capable de mettre en place le modelé élément fini adéquat au problème traité.
- Etre capable d'évaluer la qualité des résultats.
- Prendre conscience des limites de cette méthode.

## 1.6 Conclusion

La méthode des éléments finis est basée sur un principe de la discrétisation de la structure parce que le choix du maillage et le type d'élément influent sur la qualité des résultats et cela est lié à la proposition du modèle de déplacement sous forme d'un polynôme en fonction des coordonnées .De même il faut respecter l'ordre de la numérotation des nœuds et des éléments.

# Chapitre 2

## Éléments liés à un seul axe soumis à des actions axiales

### 2.1 Introduction

Dans cette section nous allons présenter la formulation en éléments finis dans l'analyse des structures liées à un seul axe (soit l'axe des  $x$ ) et sollicitées en traction ou compression par exemple les poutres ou les éléments travaillant en traction ou compression possédant une longueur suivant l'axe des  $x$ .

la formulation en elements finis est basee sur le principe des travaux virtuel en terme des variables de déplacements et a partir de ces derniers on peut deduire les deformations et les contraintes dans l'element a etudier.

### 2.2 Éléments barre à deux nœuds en sollicitations de traction ou de compression

Considérons un élément de barre de 2.0 nœuds de longueur  $L$ , de module d'élasticité longitudinal  $E$  ou de Young et une section transversale  $A$ . (on les supposés constants au long de la longueur  $L$ ), cet type d'élément possède un seul degré de liberté en chaque nœud soit le déplacement axial "u" dû à l'effet de traction ou de compression. (Voir figure ci-dessous) (Foulard, 1988).

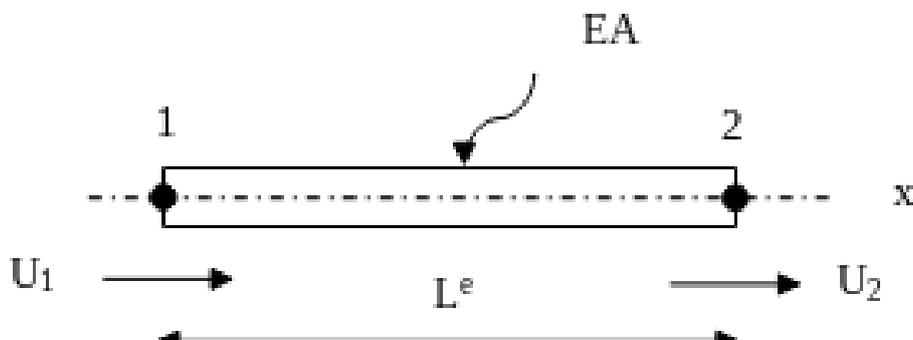


Figure 2.1: Geometrie et discretisation de l'element de barre a deux noeud

Considérant élément est soumis à des forces axiales appliquées aux nœuds 1 et 2,  $F_{x1}$

et  $F_{x2}$  respectivement. (Forces de traction ou de compression).

De cela, on peut écrire le vecteur de déplacement aux nœuds par  $u_1, u_2$  et le vecteur des forces nodales par  $F_{x1}, F_{x2}$ .

### 2.3 Formulation en élément finis

Dans ce cas, on se propose le modèle de déplacement correspondant à cette sollicitation (traction ou compression) sous forme d'un polynôme linéaire suivant:

soit  $u(x) = a_1 + a_2 x$  avec  $a_1$  et  $a_2$  : sont les paramètres de l'approximation  $\rightarrow$  la présence des deux paramètres étant égales aux deux degrés de liberté affectés aux nœuds de l'élément 1 et 2.

Déterminons les paramètres  $a_1$  et  $a_2$  en intervenant les conditions de déplacements aux nœuds 1 et 2 (conditions initiales) :

En  $x = 0$  (neud 1) :

$$U(x = 0) = a_1 + a_2(0) = U_1 \quad (2.1)$$

En  $x = L$  (neud 2) :

$$U(x = L) = a_1 + a_2(L) = U_2 \quad (2.2)$$

De (1.1) on tire  $a_1 = U_1$  et de (1.2)  $a_2 = \frac{(U_2 - U_1)}{L}$

En remplaçant dans l'équation (1). Alors  $U(x) = U_1 + \frac{(U_2 - U_1)}{L}x$

Ou encore :

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L(e)}\right) u_1 + \left(\frac{x}{L(e)}\right) u_2 \quad (2.3)$$

$$U(x) = N_1(x)U_1 + N_2(x)U_2 = \sum_{i=1}^2 N_i(x)U_i \quad (2.4)$$

Avec  $N_1(x)$  et  $N_2(x)$  sont les fonctions d'interpolation ou de forme.  
Sous forme matricielle :

$$U(x) = \begin{pmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$$U(x) = \begin{pmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{pmatrix} \{u\}^e \quad (2.5)$$

Donc les fonctions de forme pour cette sollicitation (H et en Cp) sont :

$$N_1(x) = \frac{1-x}{L(e)} \text{ et } N_2(x) = \frac{x}{L(e)}$$

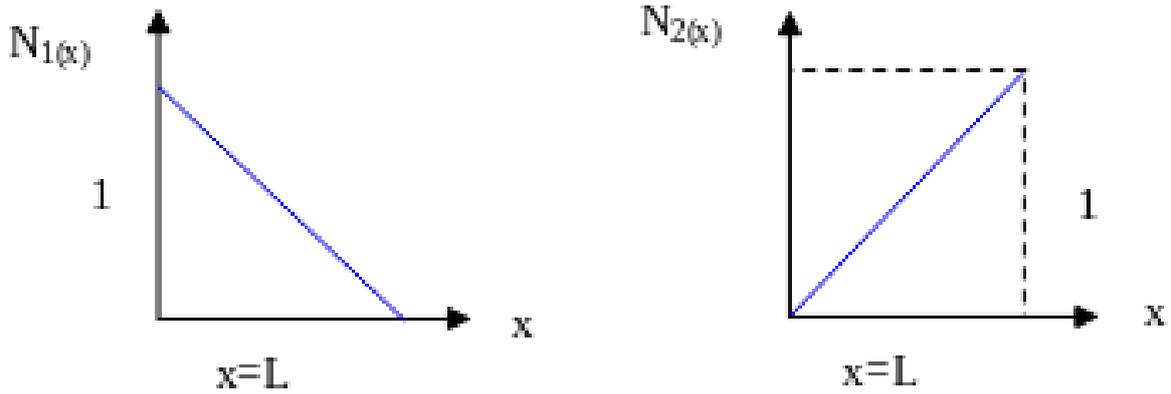


Figure 2.2: variation des fonctions d'interpolation

Maintenant déterminons la déformation axiale  $e_x$  dans l'élément qui se dérive du déplacement selon :

$$e_x^e = \frac{dU(x)}{dx} \quad \text{on dérive l'équation (2.1)}$$

$$e_x^e = \left\langle -\frac{dN(x)}{dx} \right\rangle \{u\}^e = \left( -\frac{1}{L^{(e)}} \quad \frac{1}{L^{(e)}} \right) \{u\}^e$$

où  $\langle B \rangle$  est le vecteur des dérivées des fonctions d'interpolation.

$$e_x^e = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \{u\}^e \quad (2.6)$$

Calcul des contraintes :

D'après la loi de Hooke, la contrainte axiale dans l'élément est :

$$\sigma_x^e = E \cdot e_x^e = \frac{E}{L^{(e)}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \{u\}^e \quad (2.7)$$

### 2.3.1 Matrice de rigidité élémentaire

La construction de la matrice de rigidité d'un élément de barre nécessite d'appliquer des méthodes énergétiques ou plutôt le principe des travaux virtuels qui stipule que la variation de l'énergie totale (énergie de déformation interne + énergie potentielle des forces extérieures appliquées en état statique) est égale à zéro.

Alors la variation du travail des forces internes (contraintes) est égale à la variation du travail des forces extérieures appliquées à l'élément.

C-à-d:

$$W_{int} - W_{ext} = 0 \quad (W : \text{le travail})$$

$$\text{où: } W_{int} = \int_{\Omega^e} \delta \varepsilon_x^e \sigma_x^e dV^e \quad \text{et} \quad W_{ext} = \delta \{u\}^e \cdot \{F\}^e$$

à savoir :  $\delta\varepsilon_x^e = \langle B \rangle^T \delta\{\mathbf{u}\}^e$  et  $\sigma_x^e = E \langle B \rangle \{\mathbf{u}\}^e$

$$W_{int} = \int_{\Omega^e} \delta\{\mathbf{u}\}^e \langle B \rangle^T E \langle B \rangle \{\mathbf{u}\}^e dV^e$$

ce qui entraîne:

$$\left( \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dV^e \right) \delta\mathbf{u}^{eT} \mathbf{u}^e - \delta\mathbf{u}^{eT} \mathbf{F}^e = 0$$

où encore:

$$\delta\mathbf{u}^e \left( \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dAdx \right) \mathbf{u}^e - \mathbf{F}^e = 0$$

$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e$  (2.8) c'est bien l'équation fondamentale de la méthode des éléments finis.

Avec:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dAdx$$

$\mathbf{u}^e$  : vecteur des déplacements aux nœuds

$\mathbf{F}^e$  : vecteur des forces extérieures appliquées aux nœuds

Après le développement de l'intégrale sur le volume  $\Omega^e$  de l'élément on a:

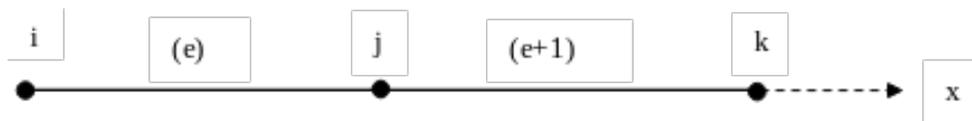
$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

avec : (EA) constant

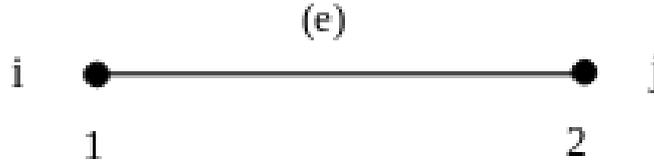
et  $K^e$  est la rigidité axiale d'un élément de barre à 2 nœuds sous l'action des forces de traction ou de compression.

## 2.4 Technique d'assemblage pour plusieurs éléments

Généralement on discrétise une structure 1D en un certain nombre d'éléments à savoir les rigidités élémentaires donc on veut déterminer la matrice de rigidité globale de la structure en additionnant toutes les rigidités élémentaires par la technique d'assemblage en respectant La numérotation des nœuds pour chaque élément, pour cela prenons le cas de deux éléments adjacents composant la structure globale de numérotation (i-j-k) comme il est montré en figure ci-dessous :



Prenons le cas le plus simple en affectant à chaque nœud un seul degré de liberté ce qui entraîne la construction des matrices de rigidité pour chaque élément suivant : Élément (e) → sa connectivité i-j :

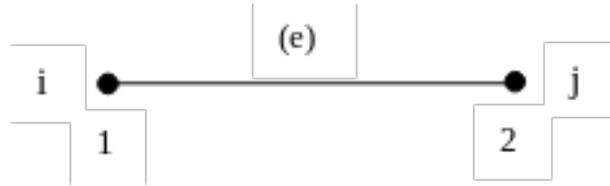


$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^{(e)} & K_{ij}^{(e)} \\ K_{ji}^{(e)} & K_{jj}^{(e)} \end{bmatrix}$$

Étape de stockage de  $\mathbf{K}^{(e)}$  dans la matrice globale initiale de termes nuls :

	$i$	$j$	$k$
$i$	$K_{ii}^{(e)}$	$K_{ij}^{(e)}$	0
$j$	$K_{ji}^{(e)}$	$K_{jj}^{(e)}$	0
$k$	0	0	0

De même pour l'élément  $(e + 1) \rightarrow$  sa connectivité  $j-k$  :



$$\mathbf{K}^{(e+1)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(e+1)} & K_{12}^{(e+1)} \\ K_{21}^{(e+1)} & K_{22}^{(e+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{jj}^{(e+1)} & K_{jk}^{(e+1)} \\ K_{kj}^{(e+1)} & K_{kk}^{(e+1)} \end{bmatrix}$$

Stockage :

$$\mathbf{D} \quad \mathbf{K}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{jj}^{(e+1)} & K_{jk}^{(e+1)} \\ 0 & K_{kj}^{(e+1)} & K_{kk}^{(e+1)} \end{bmatrix}$$

Après ce stockage, on peut facilement effectuer l'opération d'addition :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(e)} + \mathbf{K}^{(n)}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{ii}^{(e)} & K_{ij}^{(e)} & 0 \\ K_{ji}^{(e)} & K_{jj}^{(e)} + K_{jj}^{(e+1)} & K_{jk}^{(e+1)} \\ 0 & K_{kj}^{(e+1)} & K_{kk}^{(e+1)} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

- On remarque que l'addition se concentre au niveau du nœud commun ( $j$ ) entre  $(e)$  et  $(e+1)$

À la fin, on peut généraliser cette technique d'assemblage si les nœuds d'une structure discrétisée comportent le même nombre de degrés de liberté supérieur soit  $n$ . Dans ce cas, chaque case de la matrice globale correspondra à l'intersection de la ligne et colonne et sera représentée par une sous-matrice de dimension  $(n \times n)$ .

## 2.5 Exemples d'application

### 2.5.1 Exemple 1

Soit une poutre console de longueur  $L$  et chargée comme il est montré en figures ci-dessous:

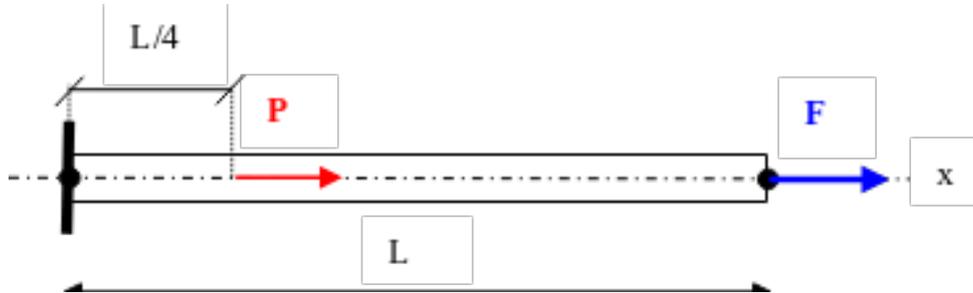


Figure 2.3: géométrie et chargement de la poutre console

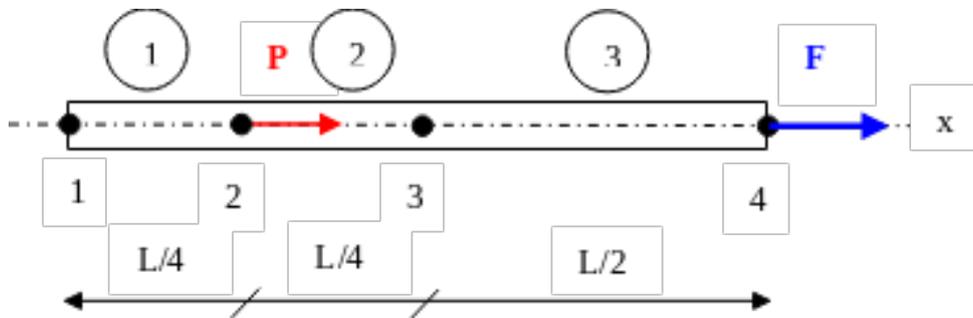


Figure 2.4: discretisation de la poutre console

On propose la discrétisation de la poutre en trois éléments de barre à deux nœuds comme il est représenté en figure 1.2 de même elle est caractérisée par un module de Young ( $E$ ) et une section  $A$ . Les distances en m et les forces en KN sont données. On demande de déterminer par l'approche éléments finis:

1. Les matrices de rigidité élémentaires  $[K]^e$
2. La matrice de rigidité globale  $[K]$
3. Le vecteur des forces nodales global  $F$
4. Les déplacements inconnus du vecteur  $U$
5. Les contraintes dans chaque élément

#### 2.5.1.1 Solution

Puisque cette poutre est soumise à des actions axiales de traction  $P$  et  $F$ , on utilise l'expression de la matrice de rigidité élémentaire suivante :

$$[K]^e = \frac{EA}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } L^e \text{ est la longueur d'un élément de barre}$$

- Élément 1: ( $e = 1$ );  $L^1 = \frac{L}{4}$

$$[\mathbf{K}]^1 = \frac{EA}{L/4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{4EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Élément 2: ( $e = 2$ );  $L^2 = \frac{L}{4}$

$$[\mathbf{K}]^2 = \frac{EA}{L/4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{4EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Élément 3: ( $e = 3$ );  $L^3 = \frac{L}{2}$

$$[\mathbf{K}]^3 = \frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit :  $[\mathbf{K}]^{(1)} = [\mathbf{K}]^{(2)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  et  $[\mathbf{K}]^{(3)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Pour les longueurs spécifiques :

- $[\mathbf{K}]^{(1)} = [\mathbf{K}]^{(2)} = \frac{4EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  (kN/m)
- $[\mathbf{K}]^{(3)} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  (kN/m)

2. Construction de la matrice de rigidité globale  $[\mathbf{K}]$  en utilisant la technique d'assemblage selon les connectivités des éléments (1), (2) et (3) :

Éléments	Connectivités	
(1)	i=1	j=2
(2)	i=2	j=3
(3)	i=3	j=4

Stockage des matrices élémentaires  $[\mathbf{K}]^{(1)}$ ,  $[\mathbf{K}]^{(2)}$  et  $[\mathbf{K}]^{(3)}$  dans une matrice  $[\mathbf{K}]$  globale initialement nulle :

$$[\mathbf{K}]^{(1)} = \frac{4EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}]^{(2)} = \frac{4EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}]^{(3)} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

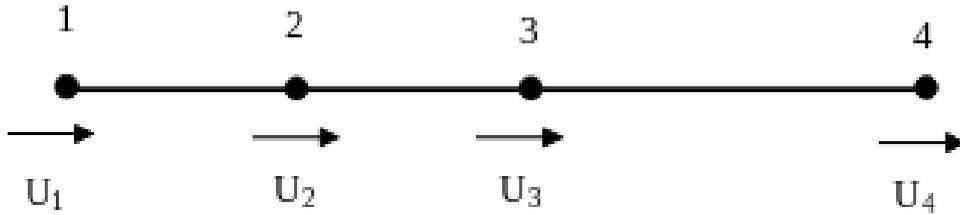


Figure 2.5:

Donc, la matrice globale :

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}]^{(1)} + [\mathbf{K}]^{(2)} + [\mathbf{K}]^{(3)}$$

$$[\mathbf{K}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4+4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 4+2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ (kN/m)} \quad (2.11)$$

3. Le vecteur des forces globales: Les forces appliqués aux nœuds sont: au nœuds (1) une réaction  $R_{x1}$  au niveau de l'encastrement inconnu; au nœuds (2) une force  $P$  positive au nœuds (3) une force nulle 0 au nœuds (4) une force  $F_x$  positive, donc:

Le vecteur des forces appliquées est donné par :

$$\{\mathbf{F}\}^e = \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ P \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

4. Détermination des déplacements inconnus

Pour cette poutre, on a une condition initiale de déplacement au nœud 1 (encasté) : le nœud ne se déplace pas, c-à-d  $u_1 = 0$ , et les déplacements  $u_2, u_3$  et  $u_4$  sont inconnus.

Par résolution du système d'équations  $[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}$  :

$$[\mathbf{K}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{F}\} = \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ P \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

Équations du système à résoudre :

$$-4u_2 = R_{x1} \frac{L}{EA} \quad (1)$$

$$8u_2 + 4u_3 = \frac{PL}{EA} \quad (2)$$

$$-4u_2 + 6u_3 - 2u_4 = 0 \quad (3)$$

$$-2u_3 + 2u_4 = \frac{FL}{EA} \quad (4)$$

**Étapes de résolution :**

De (3) :

$$6u_3 - 4u_2 - 2u_4 = 0$$

$$u_3 = \frac{P-F}{4} \times \frac{L}{EA}$$

De (2) :

$$8u_2 - 4u_3 = \frac{PL}{EA}$$

$$u_2 = \frac{P+2F}{4} \times \frac{L}{EA}$$

**Déplacements inconnus :**

$$u_2 = \frac{1}{4}(P + 2F) \times \frac{L}{EA}$$

$$u_3 = \frac{1}{4}(P - F) \times \frac{L}{EA}$$

$$u_4 = \frac{1}{4}(P + F) \times \frac{L}{EA}$$

**Calcul de la réaction  $R_{x1}$  :**

$$R_{x1} = -4 \frac{EA}{L} u_2 = -\frac{4EA}{L} \left( \frac{P + 2F}{4} \frac{L}{EA} \right) = -(P + 2F) \quad (\text{vérifié})$$

5. Détermination des contraintes dans chaque élément

On utilise la relation :

$$\sigma_x^{(e)} = \frac{E}{L^{(e)}}(u_j - u_i) \quad (2.12)$$

où :

- $\sigma_x^{(e)}$  est la contrainte dans l'élément  $e$
- $L^{(e)}$  est la longueur de l'élément  $e$
- $u_i$  et  $u_j$  sont les déplacements aux nœuds de l'élément

- Élément (1) : nœuds  $i=1, j=2$

$$\sigma^{(1)} = \frac{E}{L/4}(u_2 - u_1) = \frac{4E}{L} \left( \frac{P + 2F}{4} \frac{L}{EA} \right) = \frac{P + 2F}{A}$$

- Élément (2) : nœuds  $i=2, j=3$

$$\sigma^{(2)} = \frac{E}{L/4}(u_3 - u_2) = \frac{4E}{L} \left( \frac{P - F}{4} \frac{L}{EA} - \frac{P + 2F}{4} \frac{L}{EA} \right) = -\frac{3F}{A}$$

- Élément (3) : nœuds  $i=3, j=4$

$$\sigma^{(3)} = \frac{E}{L/2}(u_4 - u_3) = \frac{2E}{L} \left( \frac{P + F}{4} \frac{L}{EA} - \frac{P - F}{4} \frac{L}{EA} \right) = \frac{F}{A}$$

### Déformations dans les éléments

De même, on peut déterminer les déformations dans les éléments correspondants :

$$\begin{aligned} \epsilon_x^{(1)} &= \frac{\sigma_x^{(1)}}{E} = \frac{P + 2F}{EA} = \frac{20 + 2 \times 60}{8 \times 10^4} = 1.75e - 3 \\ \epsilon_x^{(2)} &= \frac{\sigma_x^{(2)}}{E} = -\frac{3F}{EA} = -\frac{3 \times 60}{8 \times 10^4} = -2.25e - 3 \\ \epsilon_x^{(3)} &= \frac{\sigma_x^{(3)}}{E} = \frac{F}{EA} = \frac{60}{8 \times 10^4} = 0.75e - 3 \end{aligned}$$

### Application numérique

- Longueur  $L = 1$
- Rigidité axiale  $EA = 8e4$
- Section  $A = 400$
- Force  $P = 20$
- Force  $F = 60$

### Résultats numériques (déplacements en mm)

Nœuds	1	2	3	4
Déplacement	0	0.25	0.4375	0.8125

### Contraintes et déformations dans les éléments

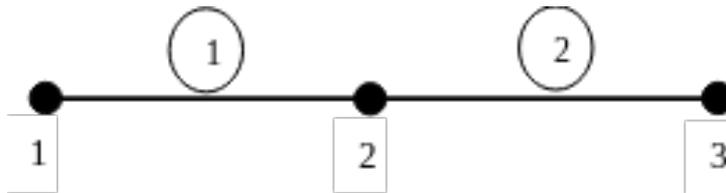
La déformation totale  $\epsilon_x^t$  dans la poutre console est :

$$\epsilon_x^t = \epsilon_x^{(1)} + \epsilon_x^{(2)} + \epsilon_x^{(3)} = 2.5 \times 10^{-3}$$

Élément	Contrainte ()	Déformation ( $\times 10^{-3}$ )
1	$\sigma_x^{(1)} = 200$	$\varepsilon_x^{(1)} = 1.0$
2	$\sigma_x^{(2)} = 150$	$\varepsilon_x^{(2)} = 0.75$
3	$\sigma_x^{(3)} = 150$	$\varepsilon_x^{(3)} = 0.75$

### 2.5.2 Exemple 2

À partir de cet exemple, par la technique d'assemblage, on veut déterminer la matrice de rigidité globale d'une structure discrétisée en deux éléments de barre. Nous admettons que chaque nœud possède deux degrés de liberté ( $n = 2$ ).



Sachant que les matrices de rigidité des éléments sont exprimées par :

$$[\mathbf{K}]^{(1)} = [\mathbf{K}]^{(2)} = \begin{bmatrix} 60 & 30 & -60 & 30 \\ 30 & 20 & -30 & 10 \\ -60 & -30 & 60 & -30 \\ 30 & 10 & -30 & 20 \end{bmatrix} \quad (\text{unités: kN/mm})$$

**Solution :**

Tout d'abord, construisons les connectivités des deux éléments :

- Élément (1) : nœuds  $i=1, j=2$
- Élément (2) : nœuds  $i=2, j=3$

Ensuite, on effectue le stockage de  $[\mathbf{k}]^{(1)}$  dans la matrice globale  $[\mathbf{K}]$  initialement nulle ( $6 \times 6$  pour 3 nœuds avec 2 DDL par nœud) :

$$[\mathbf{K}]^{(1)} = \begin{bmatrix} 60 & 30 & -60 & 30 & 0 & 0 \\ 30 & 20 & -30 & 10 & 0 & 0 \\ -60 & -30 & 60 & -30 & 0 & 0 \\ 30 & 10 & -30 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 30 & -60 & 30 \\ 0 & 0 & 30 & 20 & -30 & 10 \\ 0 & 0 & -60 & -30 & 60 & -30 \\ 0 & 0 & 30 & 10 & -30 & 20 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}]^{(1)} + [\mathbf{K}]^{(2)} = \begin{bmatrix} 60 & 30 & -60 & 30 & 0 & 0 \\ 30 & 20 & -30 & 10 & 0 & 0 \\ -60 & -30 & 120 & 0 & -60 & 30 \\ 30 & 10 & 0 & 40 & -30 & 10 \\ 0 & 0 & -60 & -30 & 60 & -30 \\ 0 & 0 & 30 & 10 & -30 & 20 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Cette règle d'assemblage des matrices de rigidité élémentaires consiste, pour un nœud donné, à additionner les sous-matrices de rigidité (ici des matrices  $2 \times 2$ ) des éléments ayant ce nœud en commun.

## 2.6 Conclusion

Dans le cas des éléments de structure présentant une longueur liée à un seul axe soumis à des charges de traction ou de compression, le modèle de déplacement est simple qui prend une forme linéaire et cela est du au nombre de degré de liberté en chaque nœud. Comme il est montré que la rigidité axiale dépend des paramètres à savoir le module de Young, la section transversale et la longueur de l'élément qui influent sur la résistance de la structure.

# Chapitre 3

## Systemes de treillis

### 3.1 Introduction

Généralement les treillis sont des systèmes articulés composés de certains nombres d'éléments barre qui peuvent être horizontaux, verticaux ou inclinés. Dans ce cadre, nous voulons effectuer l'analyse de ce type de systèmes en utilisant la méthode des éléments finis de type barres linéaires à deux nœuds liés aux deux repères local et global (Anissimov, 1993).

### 3.2 Passage du système local au global

Dans cette section, considérons un élément barre à deux nœuds possédant des orientations d'un angle  $\theta$ , par rapport à l'horizontale (l'axe des X).

Désignons par :

Dans le système local

$$\{\mathbf{u}\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad \text{vecteur des déplacements nœuds}$$

$$\{\mathbf{F}\}^e = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{xj} \end{Bmatrix} \quad \text{vecteur des forces nœuds}$$

Dans le système global

$$\{\mathbf{u}\}^e = \begin{Bmatrix} u_i^* \\ u_j^* \end{Bmatrix} \quad \text{vecteur des déplacements nœuds}$$

$$\{\mathbf{F}\}^e = \begin{Bmatrix} F_{xi}^* \\ F_{xj}^* \end{Bmatrix} \quad \text{vecteur des forces nœuds}$$

#### 3.2.1 Formulation en éléments finis

En premier lieu, déterminons la relation qui lie les vecteurs de déplacement dans les deux systèmes, caractérisée par les cosinus directeurs :

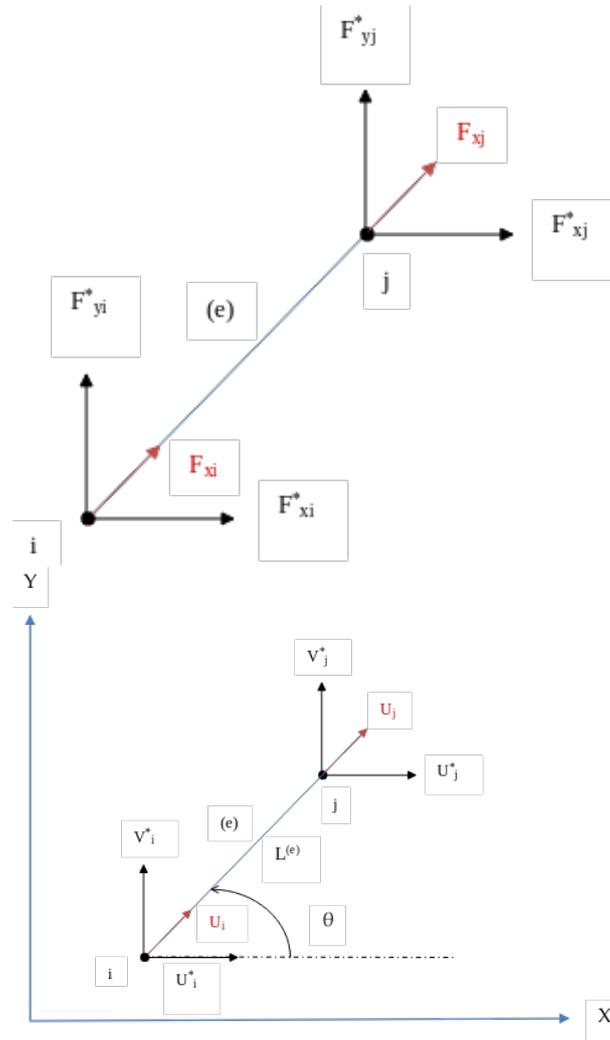


Figure 3.1: Partition des degrés de liberté et des forces nodales dans les deux systèmes local et global

$$\begin{cases} u_i = u_i^* \cos \theta + v_i^* \sin \theta \\ u_j = u_j^* \cos \theta + v_j^* \sin \theta \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\{\mathbf{u}\}^e = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \{\mathbf{u}^*\}^e = [\mathbf{T}] \{\mathbf{u}^*\}^e \quad (3.1)$$

où :

- $\{\mathbf{u}\}^e$  est le vecteur des déplacements dans le système local
- $\{\mathbf{u}^*\}^e$  est le vecteur des déplacements dans le système global
- $[\mathbf{T}]$  est la matrice de transformation (matrice des cosinus directeurs)
- $\theta$  est l'angle entre les systèmes local et global

### 3.2.1.1 Matrice de rigidité élémentaire dans le système global (X,Y)

Cette matrice  $[\mathbf{K}]$  est déterminée en utilisant la relation de l'égalité de la variation des travaux des forces extérieures dans les deux systèmes (x,y) et (X,Y) selon :

$$\delta W_{ext}^{local} = \delta W_{ext}^{global} \Rightarrow \delta \{\mathbf{u}\}^{eT} \{\mathbf{F}\}^e = \delta \{\mathbf{U}\}^{eT} \{\mathbf{F}^*\}^e$$

En substituant la relation de transformation  $\{\mathbf{u}\}^e = [\mathbf{T}]\{\mathbf{U}\}^e$  ainsi que l'équation fondamentale d'élément fini dans le repère local  $[\mathbf{k}]^e \{\mathbf{u}\}^e = \{\mathbf{F}\}^e$ , on obtient :

$$\delta \{\mathbf{U}\}^{eT} [\mathbf{T}]^T [\mathbf{k}]^e [\mathbf{T}]\{\mathbf{U}\}^e = \delta \{\mathbf{U}\}^{eT} \{\mathbf{F}^*\}^e$$

Cette égalité devant être valable pour tout  $\delta \{\mathbf{U}\}^e$ , on en déduit :

$$[\mathbf{K}]^e \{\mathbf{U}\}^e = \{\mathbf{F}^*\}^e \quad \text{dans le repère global} \quad (3.2)$$

La matrice de rigidité dans le système global s'exprime donc par :

$$[\mathbf{K}]^e = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{k}]^e [\mathbf{T}] \quad (3.3)$$

Avec :

- $[\mathbf{k}]^e$  : matrice de rigidité dans le repère local
- $[\mathbf{K}]^e$  : matrice de rigidité dans le repère global
- $[\mathbf{T}]$  : matrice de transformation (cosinus directeurs)
- $\{\mathbf{U}\}^e$  : vecteur déplacement en coordonnées globales
- $\{\mathbf{F}^*\}^e$  : vecteur force en coordonnées globales

Avec :

$$[\mathbf{k}]^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(matrice de rigidité élémentaire en coordonnées locales déjà déterminée)

En effectuant l'opération de multiplication des trois matrices  $[\mathbf{T}]^T$ ,  $[\mathbf{k}]^e$  et  $[\mathbf{T}]$ , on aboutit à l'expression suivante de la matrice de rigidité en coordonnées globales :

$$[\mathbf{K}]^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Sous forme condensée (par des sous-matrices 2×2) la matrice  $[\mathbf{K}]^e$  est exprimée par :

$$[\mathbf{K}]^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{(e)} & -\mathbf{R}^{(e)} \\ -\mathbf{R}^{(e)} & \mathbf{R}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Avec :

$$\mathbf{R}^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

où  $\theta$  est l'orientation de la barre par rapport à l'axe X.

### 3.2.1.2 Contraintes dans les barres d'orientation quelconque

Après avoir déterminé les déplacements des nœuds dans le système global par résolution du système  $[\mathbf{K}]^e \{\mathbf{U}\}^e = \{\mathbf{F}\}^{e*}$ , on peut calculer les contraintes axiales suivant la direction en inversant l'équation (6) :

$$\sigma^{(e)} = E\epsilon^{(e)} = \frac{E}{L^{(e)}} [-1 \quad 1] [\mathbf{T}]\{\mathbf{U}\}^{e*}$$

À savoir :

$$\{\mathbf{u}\}^e = [\mathbf{T}]\{\mathbf{U}\}^e$$

$$\sigma^{(e)} = \frac{E}{L^{(e)}} [-1 \quad 1] [\mathbf{T}]\{\mathbf{U}\}^e$$

avec la matrice de transformation :

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\sigma^{(e)} = \frac{E}{L^{(e)}} (-\cos \theta \cdot u_i - \sin \theta \cdot v_i + \cos \theta \cdot u_j + \sin \theta \cdot v_j) \quad (3.5)$$

### 3.2.1.3 Exemple d'application

Soit un système articulaire composé de trois barres (AB), (BC) et (CD) soumis à une force  $\mathbf{F}$  comme le montre la figure ci-contre.

On se propose de déterminer pour ce système discontinu les (03) éléments de barre à deux nœuds :

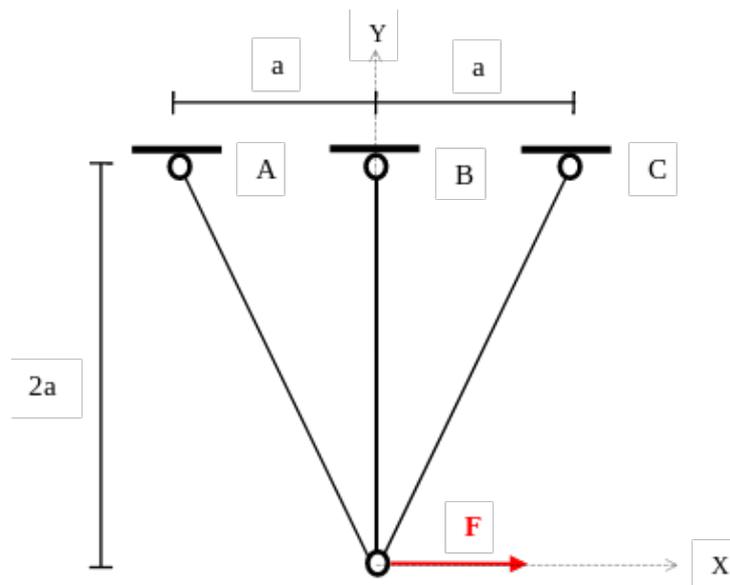


Figure 3.2: geometrie et chargement du systeme treillis

## Problème à résoudre

Déterminer pour le système articulé :

1. Les matrices de rigidité  $[\mathbf{K}]^{e*}$  de chaque élément.
2. La matrice de rigidité globale  $[\mathbf{K}]^*$ .
3. Les equations de determination des déplacements et reactions d'appuis.

## Solution

### 1. Matrices de rigidité élémentaire

La connectivité des éléments est donnée par :

Élément	Connectivité
1	1 - 2
2	1 - 3
3	1 - 4

Les coordonnées des nœuds :

Nœud	X	Y
1 (A)	0	0
2 (B)	-a	2a
3 (C)	4a	2a
4 (D)	a	2a

## Calculs préliminaires

### Longueur et orientation des barres

Pour chaque élément  $e$  :

$$L^{(e)} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \quad (3.6)$$

$$\cos \theta = \frac{X_j - X_i}{L^{(e)}}, \quad \sin \theta = \frac{Y_j - Y_i}{L^{(e)}}$$

### Élément 1 (nœuds 1-2)

$$L^{(1)} = \sqrt{(-a - 0)^2 + (2a - 0)^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{-a}{a\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \theta_1 = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

### Matrice de rigidité élémentaire

La sous-matrice de rigidité pour l'élément 1 :

$$\mathbf{R}^{(1)} = \frac{EA}{a\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_1 & \sin^2 \theta_1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{5a} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

### Élément 2 (nœuds 1-3)

Connectivité :  $i = 1, j = 3$

$$L^{(2)} = \sqrt{(4a - 0)^2 + (2a - 0)^2} = \sqrt{16a^2 + 4a^2} = 2a\sqrt{5}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{4a}{2a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \theta_2 = \frac{2a}{2a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

### Matrice de rigidité élémentaire

La sous-matrice de rigidité pour l'élément 2 :

$$\mathbf{R}^{(2)} = \frac{EA}{2a\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_2 & \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \sin \theta_2 & \sin^2 \theta_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{10a} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

### Élément 3 (nœuds 1-4)

Connectivité :  $i = 1, j = 4$

$$L^{(3)} = \sqrt{(a - 0)^2 + (2a - 0)^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$$

$$\cos \theta_3 = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \theta_3 = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

### Matrice de rigidité élémentaire

La sous-matrice de rigidité pour l'élément 3 :

$$\mathbf{R}^{(3)} = \frac{EA}{a\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_3 & \cos \theta_3 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 \sin \theta_3 & \sin^2 \theta_3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{5a} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

### Matrice de rigidité globale

Assemblage des trois éléments :

$$[\mathbf{K}] = \left[ \begin{array}{cccc|cc} \frac{6EA}{5a} & -\frac{2EA}{5a} & \frac{4EA}{5a} & \frac{2EA}{5a} & \frac{EA}{5a} & \frac{2EA}{5a} \\ -\frac{2EA}{5a} & \frac{4EA}{5a} & \frac{2EA}{5a} & \frac{EA}{5a} & \frac{2EA}{5a} & \frac{4EA}{5a} \\ \frac{4EA}{5a} & \frac{2EA}{5a} & \frac{4EA}{5a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EA}{5a} & \frac{EA}{5a} & 0 & \frac{EA}{5a} & 0 & 0 \\ \frac{EA}{5a} & \frac{2EA}{5a} & 0 & 0 & \frac{EA}{5a} & \frac{2EA}{5a} \\ \frac{2EA}{5a} & \frac{4EA}{5a} & 0 & 0 & \frac{2EA}{5a} & \frac{4EA}{5a} \end{array} \right] \quad (3.7)$$

## Déplacements inconnus

Vecteur de déplacement global :

$$\{\mathbf{U}\}^* = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix}$$

## Conditions aux limites

Introduction des conditions d'appui pour les nœuds 2, 3 et 4 :

$$U_2 = V_2 = U_3 = V_3 = U_4 = V_4 = 0$$

avec  $U_1 \neq 0$  et  $V_1 \neq 0$  (déplacements inconnus au nœud 1).

## Résolution du système

Le système global  $[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\}^* = \{\mathbf{F}\}^*$  devient :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{81} & K_{82} & \cdots & K_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ R_{x2} \\ R_{y2} \\ R_{x3} \\ R_{y3} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

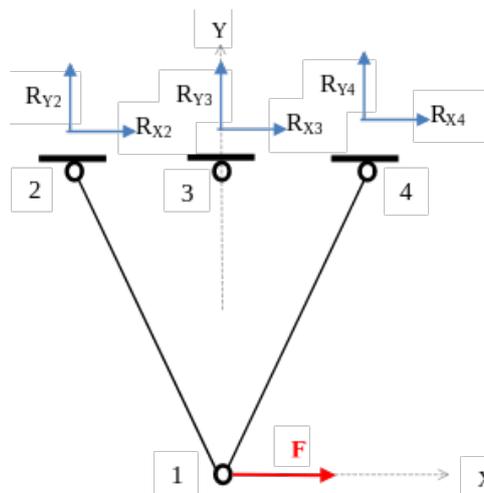


Figure 3.3: Partition des réactions aux niveau d'appuis

$$\text{On remarque que le système se réduit à : } \begin{cases} K_{11}U_1 + K_{12}V_1 = F_1 \\ K_{21}U_1 + K_{22}V_1 = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

pour les déplacements inconnus, et donne les réactions d'appui pour les autres équations.

### 3.3 Conclusion

Les structures en treillis sont des systèmes articulés rapportés aux deux repères local et global pour cela les composantes de déplacements du repère local se décomposent en deux déplacements soient horizontal et vertical liés au repère global. A cet effet en introduisant la matrice de passage qui comporte l'orientation des éléments. En utilisant la formulation en élément finis a fin de déterminer la matrice de rigidité ainsi les composantes de contraintes qui dépendent de l'inclinaison des éléments et on peut attirer l'attention que l'utilisation de cette approche nous facilite la tâche de calcul il s'agit des systèmes hyperstatiques Comportant un nombre important des éléments constituant les treillis.

# Chapitre 4

## Elements poutre en flexion simple

### 4.1 Introduction

Une poutre est caractérisée par la fibre moyenne et une section transversale, dans cette section on veut développer la formulation en éléments finis par un type d'élément de barre à deux noeuds en sollicitation de flexion simple. A cet effet, en utilisant le principe des travaux virtuels on a exprimé l'équation fondamentale du problème afin de prédire les déplacements inconnus puis les expressions des moments fléchissant (Welgosz, 1999).

### 4.2 Equations de base de la théorie des poutres

En flexion de la théorie des poutres on considère deux composantes de déplacement horizontal et vertical selon:

$$u(x, y) = -y \frac{dv(x)}{dx} \quad (4.1)$$

En notant que  $u = u(x, y)$  et  $v = v(x)$ , le champ de déplacement est complètement décrit par  $v(x)$ .

La déformation normale due à l'effet de flexion est exprimée par:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{d^2v(x)}{dx^2} \quad (4.2)$$

À partir de la loi de Hooke et de l'équilibre des moments :

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -Ey \frac{d^2v}{dx^2} \quad (4.3)$$

Le moment fléchissant est donné par :

$$M_z = \int_A y\sigma_x dA = -E \frac{d^2v}{dx^2} \int_A y^2 dA = -EI_z \frac{d^2v}{dx^2} \quad (4.4)$$

- avec:  $I_z$ : moment d'inertie de la section A

Équation de la ligne élastique:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M_z(x)}{EI_z} \quad (4.5)$$

### 4.3 Formulation en éléments finis

Dans cette section, on reformule les équations de base de la théorie des **poutres** en utilisant un **élément poutre à deux nœuds** dans le repère  $(x, y)$  de longueur  $L^e$ , caractérisé par des constantes  $E$  (module de Young) et  $I$  (moment d'inertie).

#### Degrés de liberté

À chaque nœud sont associés deux degrés de liberté :

- $v$  : déplacement vertical selon  $y$
- $\theta$  : rotation autour de l'axe  $z$  ( $\theta = \frac{dv}{dx}$ )

#### Vecteurs associés

1. Vecteur de déplacement  $\{\mathbf{u}\}^e$  :

$$\{\mathbf{u}\}^e = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

2. Vecteur des forces nodales  $\{\mathbf{F}\}^e$  :

$$\{\mathbf{F}\}^e = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_1 \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

où :

- $M_1$  et  $M_2$  sont les moments appliqués aux nœuds 1 et 2
- $F_{y1}$  et  $F_{y2}$  sont les forces verticales aux nœuds 1 et 2

Modèle de déplacement s'exprime par:

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (4.6)$$

avec  $a_1, a_2, a_3, a_4$  comme paramètres d'interpolation.

Le **nombre de paramètres d'approximation est de quatre relatif au nombre de degrés de liberté total** dans l'élément.

#### Déformation en flexion

La rotation  $\theta$  est la dérivée du déplacement  $v(x)$  :

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (4.7)$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = [P(x)]\{\mathbf{a}\} \quad (4.8)$$

Détermination des coefficients à partir des conditions aux nœuds

- Au nœud (1) :  $x = 0$

$$v(0) = v_1, \quad \theta(0) = \theta_1$$

- Au nœud (2) :  $x = L^e$

$$v(L^e) = v_2, \quad \theta(L^e) = \theta_2$$

$$\begin{cases} v(0) = a_1 = v_1 \\ \theta(0) = a_2 = \theta_1 \\ v(L^e) = a_1 + a_2L^e + a_3L^{e^2} + a_4L^{e^3} = v_2 \\ \theta(L^e) = a_2 + 2a_3L^e + 3a_4L^{e^2} = \theta_2 \end{cases}$$

Système sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L^e & L^{e^2} & L^{e^3} \\ 0 & 1 & 2L^e & 3L^{e^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

ou  $[A]\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{u}\}^e \quad (4.9)$

Résolution du système :

$$\{\mathbf{a}\} = [A]^{-1}\{\mathbf{u}\}^e$$

Substitution donne :

$$\begin{bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{bmatrix} = [P(x)][A]^{-1}\{\mathbf{u}\}^e = [N(x)]\{\mathbf{u}\}^e \quad (4.10)$$

où  $[N(x)]$  est la matrice des fonctions de forme, obtenue par multiplication de  $[P(x)]$  et  $[A]^{-1}$ .

#### 4.3.0.1 Matrice de rigidité élémentaire de flexion $[\mathbf{K}]^e$

Cette matrice se détermine par le **principe des travaux virtuels** selon :

$$\int_{V^e} \delta\varepsilon_x \sigma_x dV^e - \delta\{\mathbf{u}\}^{eT} \{\mathbf{F}\}^e = 0 \quad (\text{relation d'équilibre}) \quad (4.11)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -y \frac{d^2v(x)}{dx^2} \quad (\text{déformation en flexion}) \\ \sigma_x &= E\varepsilon_x \quad (\text{loi de Hooke}) \end{aligned}$$

Le déplacement vertical s'exprime en fonction des fonctions de forme :

$$v(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \{\mathbf{u}\}^e$$

où  $N_i(x)$  sont les termes de la première ligne de la matrice .

La variation de déformation s'écrit :

$$\delta\varepsilon_x = -y \frac{d^2}{dx^2}(\delta v(x)) = -y \left[ \frac{d^2 N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_4}{dx^2} \right] \delta\{\mathbf{u}\}^e$$

### Dérivées secondes des fonctions de forme

Les dérivées secondes des fonctions de forme de poutre sont :

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_2}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_3}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}$$

La déformation virtuelle et la déformation s'expriment matriciellement :

$$\delta\varepsilon_x = -y \cdot \delta\{\mathbf{u}\}^{eT} \mathbf{B}(x), \quad \varepsilon_x = -y \cdot \{\mathbf{u}\}^{eT} \mathbf{B}(x)$$

En substituant dans le principe des travaux virtuels (4.13) :

$$\int_{V^e} \delta\{\mathbf{u}\}^{eT} \mathbf{B}(x)^T E(-y)(-y)\mathbf{B}(x)\{\mathbf{u}\}^e dV^e - \delta\{\mathbf{u}\}^{eT} \{\mathbf{F}\}^e = 0$$

On obtient la formulation standard :

$$\left( EI \int_0^{L^e} \mathbf{B}(x)^T \mathbf{B}(x) dx \right) \{\mathbf{u}\}^e = \{\mathbf{F}\}^e$$

La matrice de rigidité de flexion est donc :

$$[\mathbf{K}]^e = EI \int_0^{L^e} \mathbf{B}(x)^T \mathbf{B}(x) dx \quad (4.12)$$

où :

- $E$  est le module de Young
- $I$  est le moment d'inertie
- $\mathbf{B}(x)$  contient les dérivées secondes des fonctions de forme

Calcul des coefficients de rigidité en flexion.

Les termes de la matrice de rigidité s'expriment par :

$$K_{ij} = EI \int_0^L B_i(x) B_j(x) dx \quad (i, j = 1 \text{ à } 4) \quad (4.13)$$

Avec les fonctions de courbure :

$$\begin{aligned}
 B_1(x) &= -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\
 B_2(x) &= -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\
 B_3(x) &= \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\
 B_4(x) &= -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}
 \end{aligned}$$

Exemple de calcul du terme  $K_{11}$ :

Pour  $i = j = 1$  :

$$K_{11} = EI \int_0^L \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right)^2 dx = \frac{12EI}{L^3}$$

Les autres termes :

$$\begin{aligned}
 K_{12} &= K_{21} = \frac{6EI}{L^2} \\
 K_{13} &= K_{31} = -\frac{12EI}{L^3} \\
 K_{14} &= K_{41} = \frac{6EI}{L^2} \\
 K_{23} &= K_{32} = -\frac{6EI}{L^2} \\
 K_{24} &= K_{42} = \frac{2EI}{L} \\
 K_{34} &= K_{43} = -\frac{6EI}{L^2}
 \end{aligned}$$

Les termes diagonaux :

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= \frac{12EI}{L^3} \\
 K_{22} &= \frac{4EI}{L} \\
 K_{33} &= \frac{12EI}{L^3} \\
 K_{44} &= \frac{4EI}{L}
 \end{aligned}$$

Par symétrie :  $K_{ij} = K_{ji}$  (matrice symétrique)

## Matrice de rigidité élémentaire de flexion

$$[\mathbf{K}]^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Expression du moment fléchissant  $M(x)$

À partir de la relation de courbure :

$$M(x)^e = -EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = EI \sum_{i=1}^4 \frac{d^2 N_i(x)}{dx^2} u_i^e$$

où  $N_i(x)$  sont les fonctions de forme de l'élément poutre.

On aura:

$$M(x)^e = EI \left[ \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) u_i^e + \left( \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) u_j^e + \left( \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \theta_j^e \right] \quad (4.15)$$

pour un élément (e) de connectivité (i-j), l'expression du Moment fléchissant s'écrit:

$$M(x)^e = EI \left[ \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) v_i + \left( \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \theta_i + \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) v_j + \left( \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \theta_j \right] \quad (4.16)$$

## 4.4 Exemple 01

Déterminer les déplacements inconnus aux nœuds et le diagramme du moment fléchissant  $M(x)$  dans la poutre hyperstatique suivante :

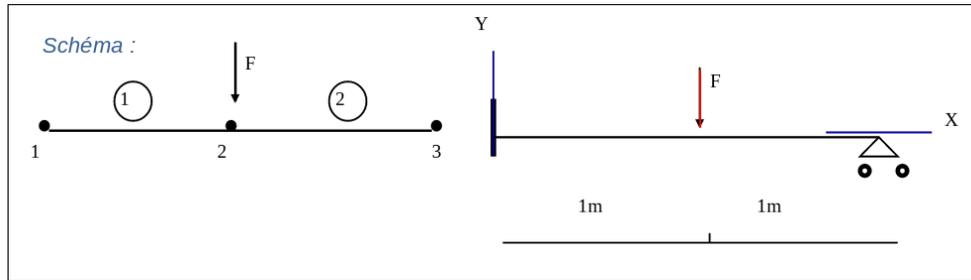


Figure 4.1: Geometrie et chargement d'une poutre hyperstatique

(E,I) sont constants, F est la charge verticale

### 4.4.1 Solution

#### 4.4.1.1 Matrices de rigidité élémentaires (éléments 1 et 2)

Pour les éléments de longueur  $L = 1 m$  :

$$[\mathbf{K}]^1 = [\mathbf{K}]^2 = EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

#### 4.4.1.2 Matrice de rigidité globale $[\mathbf{K}]$

Assemblage des deux éléments :

$$[\mathbf{K}] = EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

- Les termes  $K_{33}$  et  $K_{44}$  résultent de la superposition des contributions des éléments 1 et 2
- La matrice est symétrique ( $K_{ij} = K_{ji}$ )
- Dimensions :  $6 \times 6$  (3 nœuds avec 2 DDL chacun)

#### 4.4.2 Vecteur des forces nodales $\{\mathbf{F}\}$

Conditions aux limites et chargements :

- Nœud 1 : réaction verticale  $R_{y1}$ , moment de réaction  $M_1$
- Nœud 2 : force appliquée  $F_{y2} = -F$ , moment  $M_2 = 0$
- Nœud 3 : réaction verticale  $R_{y3}$ , moment  $M_3 = 0$

$$\{\mathbf{F}\} = \begin{Bmatrix} R_{y1} \\ M_1 \\ -F \\ 0 \\ R_{y3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathbf{U}\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

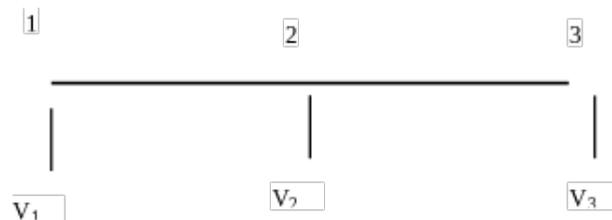


Figure 4.2: discrétisation de la poutre

## 4. Résolution du système

Le système global s'écrit :

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (4.19)$$

- Nœud 1 : encastré  $\Rightarrow v_1 = 0, \theta_1 = 0$
- Nœud 3 : appui simple  $\Rightarrow v_3 = 0$

Le système est réduit à 3 inconnues :

$$\{\mathbf{U}\} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

### Équations du système réduit

$$EI \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Équations du système :

$$12v_2 + 6\theta_2 = R_{x1}/EI \quad (1)$$

$$6v_2 + 4\theta_2 = M_1/EI \quad (2)$$

$$-12v_2 - 6\theta_2 + 2\theta_3 = -F/EI \quad (3)$$

$$16\theta_2 - 2\theta_3 = 0 \quad (4)$$

$$-6v_2 - 6\theta_2 + 4\theta_3 = R_{y3}/EI \quad (5)$$

$$6v_2 + 2\theta_2 - 6\theta_3 = 0 \quad (6)$$

**Décomposition du système global en deux sous-systèmes :**

#### 1. Système de détermination des déplacements inconnus

Sous-système pour  $v_2, \theta_2, \theta_3$  (équations 3, 4, 6) :

$$24v_2 + 6\theta_3 = -F/EI \quad (7)$$

$$8\theta_2 + 2\theta_3 = 0 \Rightarrow \theta_3 = -4\theta_2 \quad (8)$$

$$6v_2 + 2\theta_2 + 16\theta_2 = 0 \quad (9)$$

Résolution :

Remplacement dans les équations :

$$24v_2 - 24\theta_2 = -\frac{F}{EI}$$

$$6v_2 - 14\theta_2 = 0 \Rightarrow \theta_2 = \frac{3}{7}v_2$$

En substituant  $\theta_2$  dans l'équation (4.12)) :

$$\begin{aligned}
 24v_2 - 24 \left( \frac{3}{7}v_2 \right) &= -\frac{F}{EI} \\
 \left( 24 - \frac{72}{7} \right) v_2 &= -\frac{F}{EI} \\
 \frac{96}{7} v_2 &= -\frac{F}{EI}
 \end{aligned}$$

Solution finale :

$$\begin{aligned}
 v_2 &= -\frac{7}{96} \times \frac{F}{EI} \\
 \theta_2 &= -\frac{3}{32} \times \frac{F}{EI} \quad (4.21) \\
 \theta_3 &= \frac{1}{8} \times \frac{F}{EI}
 \end{aligned}$$

## 2. Détermination des réactions d'appui

Calcul des réactions  $R_{Y1}$ ,  $R_{M1}$ , et  $R_{Y3}$  à partir des équations (1), (2), et (5) :

$$\begin{aligned}
 R_{Y1} &= EI [12v_2 + 6\theta_2] \\
 &= EI \left[ 12 \left( -\frac{7}{96} \frac{F}{EI} \right) + 6 \left( -\frac{3}{32} \frac{F}{EI} \right) \right] \\
 &= \frac{11}{16} F
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{M1} &= EI [6v_2 + 4\theta_2] \\
 &= EI \left[ 6 \left( -\frac{7}{96} \frac{F}{EI} \right) + 4 \left( -\frac{3}{32} \frac{F}{EI} \right) \right] \\
 &= -\frac{5}{16} FL \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{Y3} &= EI [-6v_2 - 6\theta_2 + 4\theta_3] \\
 &= EI \left[ -6 \left( -\frac{7}{96} \frac{F}{EI} \right) - 6 \left( -\frac{3}{32} \frac{F}{EI} \right) + 4 \left( \frac{1}{8} \frac{F}{EI} \right) \right] \\
 &= \frac{5}{16} F
 \end{aligned}$$

Vérifications d'équilibre:

1. Somme des forces verticales

$$\sum F_y = R_{Y1} + R_{Y3} - F = \frac{11}{16} F + \frac{5}{16} F - F = 0 \quad (\text{vérifié}) \quad (4.23)$$

2. Somme des moments au point A

$$\sum M_A = -F \cdot L + R_{Y3} \cdot 2L + M_1 = -F \cdot L + \frac{5}{16}F \cdot 2L + \left(-\frac{5}{16}FL\right) = 0 \quad (\text{vérifié}) \quad (4.24)$$

### 3. Diagramme des moments fléchissants

#### Relation générale pour le moment fléchissant

Pour chaque élément poutre :

$$M(x) = EI \left[ \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) v_i + \left( \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \theta_i + \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) v_j + \left( \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \theta_j \right] \quad (4.25)$$

Élément (1) : e=1, i=1, j=2

Conditions :  $v_1 = 0, \theta_1 = 0$

$$\begin{aligned} M^{(1)}(x=0) &= EI \left[ \frac{6}{L^2} v_2 + \frac{2}{L} \theta_2 \right] \\ &= \frac{3}{8}F \quad (\text{moment à l'encastrement}) \quad (4.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^{(1)}(x=L) &= EI \left[ \frac{6}{L^2} v_2 + \frac{4}{L} \theta_2 \right] \\ &= -\frac{5}{16}FL \end{aligned}$$

Élément (2) : e=2, i=2, j=3, L=1 m

$$\begin{aligned} M^{(2)}(x=0) &= EI \left[ \frac{6}{L^2} v_2 + \frac{4}{L} \theta_2 + \frac{2}{L} \theta_3 \right] \\ &= -\frac{5}{16}FL \quad (\text{continuité vérifiée}) \quad (4.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^{(2)}(x=L) &= EI \left[ -\frac{6}{L^2} v_2 - \frac{2}{L} \theta_2 + \frac{4}{L} \theta_3 \right] \\ &= 0 \quad (\text{moment nul à l'appui simple}) \end{aligned}$$

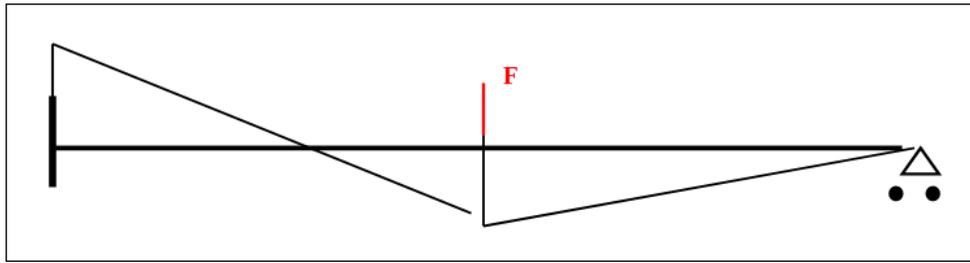


Figure 4.3: Diagramme des moments

## 4.5 Exemple 2 (Sans solution)

Même question que l'exemple précédent, pour la poutre montrée ci-dessous :

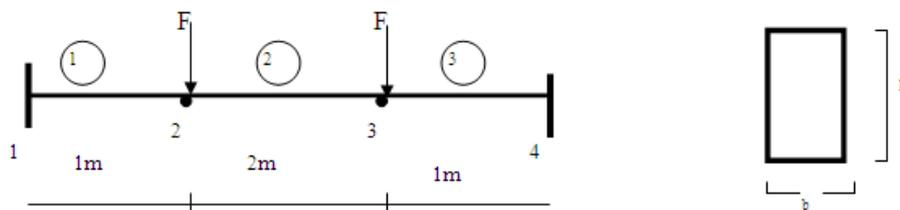


Figure 4.4: Geometrie et chargement de la poutre bi-encastree

**Données :**

- $E = 30000 \text{ MPa} = 30000 \times 10^6 \text{ Pa}$
- $F = 5 \text{ kN} = 5000 \text{ N}$
- Section transversale :  $b = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}$ ,  $h = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}$

**Moment d'inertie :**

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.3 \times (0.4)^3}{12} = 1.6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

**Matrice de raideur d'un élément en flexion :**

$$[K]^{(e)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a développé la formulation en élément finis des poutres travaillant en flexion simple en utilisant le type simple de barre à deux nœuds. Dans ce type de sollicitation on intervient les degrés de liberté à savoir le déplacement Vertical et la rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan de la poutre. A partir de cette formulation on peut déterminer les expressions des moments fléchissant ainsi cette méthode est utile s'il s'agit des poutres Continues vue la complexité d'hyperstaticité dans la résolution.

# Chapitre 5

## Partie exercices

### 5.1 Exercice N°1

Considérons un tirant de longueur  $2L$ , soumis à des forces de traction comme illustré ci-dessous :

Schéma du tirant:

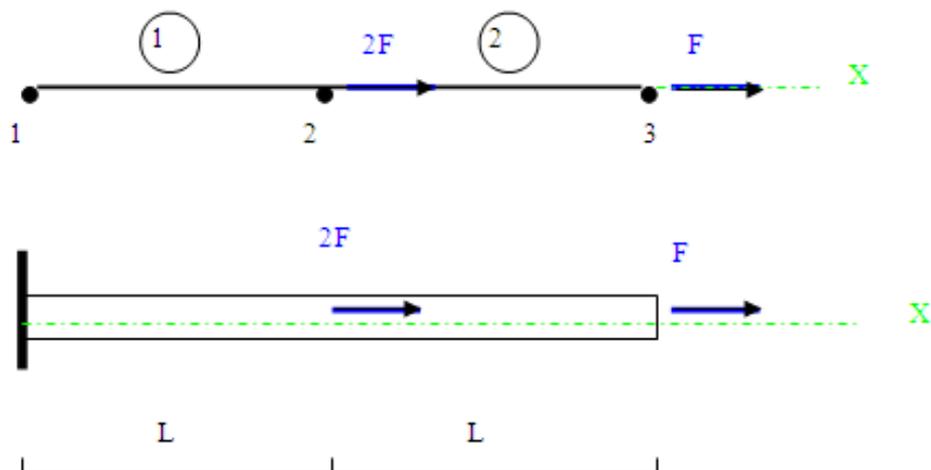


Figure 5.1: Geometrie et discretisation du tirant

a) Déterminer les déplacements inconnus des nœuds, après avoir :

- Construit les matrices de rigidité élémentaires.
- Formé la matrice de rigidité globale.
- Établi le vecteur des forces nodales.

b) Calculer les déformations ainsi que les contraintes dans chaque élément.

Données :

- $L = 1$  m
- $E = 10^5$  MPa =  $10^{11}$  Pa

- $A = 3000 \text{ mm}^2 = 3 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
- $F = 6000 \text{ N}$

**Solution :**

**a.1) Matrices de rigidité élémentaires  $[K]^{(1)}$  et  $[K]^{(2)}$**

À savoir :

$$[K]^{(e)} = \frac{EA}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Élément (1) :  $i = 1, j = 2$

$$L^{(1)} = 1 \text{ m} \Rightarrow$$

$$[K]^{(1)} = \frac{EA}{L^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 10^7 \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

Élément (2) :  $i = 2, j = 3$

$$L^{(2)} = 1 \text{ m} \Rightarrow$$

$$[K]^{(2)} = [K]^{(1)} = 10^7 \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

**a.2) Matrice de rigidité globale  $[K]$**

Par assemblage de  $[K]^{(1)}$  et  $[K]^{(2)}$  dans la matrice initiale :

$$[K]^{(1)} = 10^7 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (N/m)} \quad \text{et} \quad [K]^{(2)} = 10^7 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ (N/m)}$$

Assemblage des matrices élémentaires :

$$[K] = [K]^{(1)} + [K]^{(2)} = 10^7 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3+3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} = 10^7 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ (N/m)}$$

**Vecteur des forces nodales  $\{F\}$**

- Au nœud (1) : réaction  $R_{x1}$  (encastrement)
- Au nœud (2) : force  $+2F$
- Au nœud (3) : force  $+F$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ 2F \\ F \end{Bmatrix}$$

Résolution du système:

Condition : déplacement initial nul au nœud (1), donc  $U_1 = 0$

$$[K] \times \{u\} = \{F\} \Rightarrow 10^7 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ 2F \\ F \end{Bmatrix}$$

Équations :

$$\begin{aligned} 3U_1 - 3U_2 &= R_{x1} \Rightarrow R_{x1} = -3U_2 \quad (\text{inconnue}) \\ (-3U_1 + 6U_2 - 3U_3) \times 10^7 &= 2F \Rightarrow 6U_2 - 3U_3 = 2F \times 10^{-7} \\ (-3U_2 + 3U_3) \times 10^7 &= F \Rightarrow -3U_2 + 3U_3 = F \times 10^{-7} \end{aligned}$$

En valeurs numériques (avec  $F = 6000 \text{ N}$ ) :

$$U_2 = 6000 \times 10^{-7} \text{ m} = 0,06 \text{ mm}, \quad U_3 = \frac{4}{3} \times 6000 \times 10^{-7} \text{ m} = 0,08 \text{ mm}$$

b) Calcul des déformations et des contraintes de chaque élément

Formule de déformation dans un élément :

$$\varepsilon_x^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}}(U_j - U_i)$$

Élément (1) :  $L^{(1)} = 1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{1}{1000}(U_2 - U_1) \quad \text{avec } U_1 = 0$$

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{0.06}{1000} = 0.06\% = 6 \times 10^{-4}$$

Élément (2) :  $L^{(2)} = 1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{1}{1000}(U_3 - U_2) = \frac{1}{1000}(0.08 - 0.06)$$

$$\varepsilon_x^{(2)} = 0.02\% = 2 \times 10^{-4}$$

Contraintes selon la loi de Hooke :  $\sigma = E \cdot \varepsilon$

• Élément (1) :

$$\sigma_x^{(1)} = 10^5 \times \frac{0.06}{1000} = 6 \text{ MPa}$$

$$\text{ou } \sigma_x^{(1)} = E \cdot \varepsilon_x^{(1)} = 10^5 \times 6 \times 10^{-4} = 6 \text{ MPa}$$

• Élément (2) :

$$\sigma_x^{(2)} = 10^5 \times \frac{0.02}{1000} = 2 \text{ MPa}$$

$$\text{ou } \sigma_x^{(2)} = E \cdot \varepsilon_x^{(2)} = 10^5 \times 2 \times 10^{-4} = 2 \text{ MPa}$$

## 5.2 Exercice N°2

Une structure unidimensionnelle est discrétisée en quatre éléments de barre à deux nœuds (voir la figure).

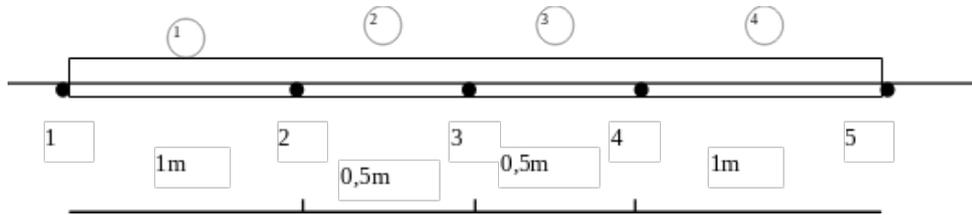


Figure 5.2: Geometrie et discretisation de la structure

**Données :**

- Rigidité axiale :  $EA = 10^6 \text{ kN} = 10^9 \text{ N}$
- Déplacements imposés :

$$u_1 = -u_3 = -4 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$u_3 = 0$$

$$u_2 = -u_4 = -10^{-5} \text{ m}$$

**Questions :**

1. En construisant le système d'équations  $[K]U = F$ , déterminer les forces nécessaires appliquées aux nœuds 1, 2, 3, 4 et 5.
2. Calculer la déformation totale ( $e_x^T$ ) dans la structure.

**Solution :**

### 1) Matrices de rigidité élémentaires $[K]^{(e)}$

Pour une structure à 5 nœuds avec 4 éléments identiques :

$$[K]^{(1)} = [K]^{(4)} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (kN/m)}$$

$$[K]^{(2)} = [K]^{(3)} = 10^6 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ (kN/m)}$$

### 2) Matrice de rigidité globale $[K]$ par assemblage

$$[K] = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2+2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (kN/m)}$$

Vecteur des forces nodales  $\{F\}$

$$\{F\} = [K]\{U\} = 10^6 \begin{Bmatrix} (U_1 - U_2) \\ (-U_1 + 3U_2 - 2U_3) \\ (-2U_2 + 4U_3 - 2U_4) \\ (-2U_3 + 3U_4 - U_5) \\ (-U_4 + U_5) \end{Bmatrix} \quad (\text{kN})$$

avec :

$$U_1 = -4 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$U_2 = -10^{-5} \text{ m}$$

$$U_3 = 0 \text{ m}$$

$$U_4 = 10^{-5} \text{ m}$$

$$U_5 = 4 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Composantes des forces :

En utilisant la relation  $\{F\} = [K]\{U\}$  avec  $[K]$  la matrice de rigidité globale :

$$F_{x1} = (-U_1 + U_2) \times 10^6 = (-4 + 1) \times 10^6 \times 10^{-5} = -30 \text{ kN}$$

$$F_{x2} = (U_1 - 3U_2 + 2U_3) \times 10^6 = (4 - 3) \times 10^6 \times 10^{-5} = 10 \text{ kN}$$

$$F_{x3} = (2U_2 - 4U_3 + 2U_4) \times 10^6 = (2 \times -1 - 0 + 2 \times 1) \times 10^6 \times 10^{-5} = 0 \text{ kN}$$

$$F_{x4} = (2U_3 - 3U_4 + U_5) \times 10^6 = (0 - 3 \times 1 + 4) \times 10^6 \times 10^{-5} = 10 \text{ kN}$$

$$F_{x5} = (-U_4 + U_5) \times 10^6 = (-1 + 4) \times 10^6 \times 10^{-5} = 30 \text{ kN}$$

Calcul de la déformation totale  $e_x^T$

Formule:

$$e_x^T = \sum_{i=1}^4 e_{xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{U_{i+1} - U_i}{L_i}$$

En remplaçant :

$$L^{(1)} = L^{(4)} = 1 \text{ m}$$

$$L^{(2)} = L^{(3)} = 0.5 \text{ m}$$

Le calcul donne :

$$\begin{aligned} e_x^T &= \frac{U_2 - U_1}{1} + \frac{U_3 - U_2}{0.5} + \frac{U_4 - U_3}{0.5} + \frac{U_5 - U_4}{1} \\ &= (-1 + 4) \times 10^{-5} + \frac{(0 + 1) \times 10^{-5}}{0.5} + \frac{(1 - 0) \times 10^{-5}}{0.5} + (4 - 1) \times 10^{-5} \\ &= 3 \times 10^{-5} + 2 \times 10^{-5} + 2 \times 10^{-5} + 3 \times 10^{-5} \\ &= 10 \times 10^{-5} = 10^{-4} \end{aligned}$$

### 5.3 Exercice N°3

Soit un système de treillis composé de cinq barres soumis à une force horizontale comme il est montré en figure ci-dessous.

On demande de déterminer pour ce système en fonction de  $E$ ,  $A$ ,  $a$  et  $p$  les déplacements inconnus ainsi les contraintes dans chaque barre.

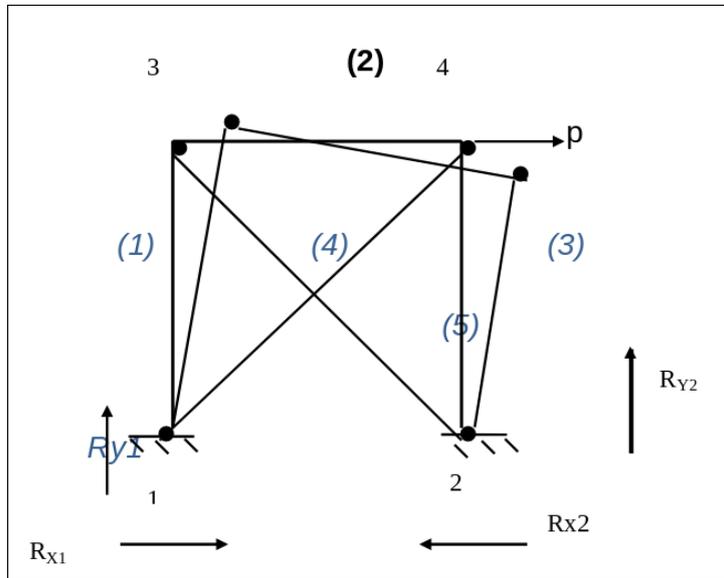


Figure 5.3: Discretisation et chargement du treillis

Équations du système :

$$(1 + a)V_3 - U_4 = 0 \quad (\text{Équation 1})$$

$$-aU_3 + (1 + a)V_3 = 0 \quad (\text{Équation 2})$$

$$-aU_3 + (1 + a)aU_4 + V_4 = \frac{Pa}{EA} \quad (\text{Équation 3})$$

$$aU_4 + (1 + a)aV_4 = 0 \quad (\text{Équation 4})$$

Déductions :

De l'Équation (2) :

$$V_3 = \frac{a}{1 + a}U_3$$

De l'Équation (4) :

$$V_4 = -\frac{a}{1 + a}U_4$$

En remplaçant dans l'équation (1) :

$$(1+a)U_3 - U_4 = 0$$

$$\left[1+a - \frac{a^2}{1+a}\right] U_3 - U_4 = 0$$

$$U_4 = \frac{1+a+a^2}{1+a} U_3$$

En substitution dans l'équation (3) :

$$-aU_3 + (1+a)aU_4 + V_4 = \frac{Pa}{EA}$$

$$-aU_3 + (1+a)a \left(\frac{1+a+a^2}{1+a}\right) U_3 - \frac{a}{1+a} U_4 = \frac{Pa}{EA}$$

$$U_3 = \frac{(1+a)^2}{a(2+3a)} \frac{Pa}{EA}$$

Pour  $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$  :

$$U_3 = 1.6927 \frac{Pa}{EA}$$

Simplification :

$$U_4 = 1.261 \times 1.6927 \frac{Pa}{EA} = 2.134 \frac{Pa}{EA}$$

$$V_3 = \frac{0.3536 \times 1.6927}{1.3536} \frac{Pa}{EA} = 0.442 \frac{Pa}{EA}$$

$$V_4 = -0.557 \frac{Pa}{EA}$$

$$R_{x1} = -0.3536 \times 1.134 \frac{Pa}{EA} + 0.3536 \times 0.557 \frac{Pa}{EA} = -0.557P$$

$$R_{y1} = -0.442 \times 0.3536 \times 1.134 + 0.3536 \times 0.577 = -0.999P \approx -P$$

$$R_{x2} = -0.3536 \times 1.6927 + 0.3536 \times 0.442 = -0.442P$$

$$R_{y2} = 0.3536 \times 1.6927 - 0.3536 \times 0.442 + 0.557 = 0.9999P \approx P$$

Résultats :

$$U_3 = 1.6927 \frac{Pa}{EA}$$

$$V_3 = 0.442 \frac{Pa}{EA}$$

$$U_4 = 2.134 \frac{Pa}{EA}$$

$$V_4 = -0.557 \frac{Pa}{EA}$$

Réactions :

$$\begin{aligned} R_{X1} &= -0.557P \\ R_{Y1} &= -0.999P \approx -P \\ R_{X2} &= -0.442P \\ R_{Y2} &= 0.999P \approx P \end{aligned}$$

Contraintes dans les éléments :

Élément (1) : Nœuds 1 - 3 ( $=90^\circ$ )

$$\sigma_x^1 = \frac{E}{a}(U_3 - U_1) = 1.6927 \frac{P}{A} \quad (\text{traction})$$

Élément (2) : Nœuds 3 - 4 ( $=0^\circ$ )

$$\sigma_x^2 = \frac{E}{a}(U_4 - U_3) = (2.134 - 1.6927) \frac{P}{A} = 0.441 \frac{P}{A} \quad (\text{traction})$$

Élément (3) : Nœuds 2 - 4

$$\sigma_x^3 = \frac{E}{a}(U_4 - U_2) = 2.134 \frac{P}{A} \quad (\text{traction})$$

Élément (4) : Nœuds 2 - 3 (longueur  $L = \sqrt{2}a$ )

$$\sigma_x^4 = \frac{E}{\sqrt{2}a}(U_3 - U_2) = \frac{1.6927 P}{1.414 A} = 1.197 \frac{P}{A} \quad (\text{traction})$$

Élément (5) : Nœuds 1 - 4 (longueur  $L = \sqrt{2}a$ )

$$\sigma_x^5 = \frac{E}{\sqrt{2}a}(U_4 - U_1) = (\text{calcul à compléter})$$

Élément (1) : Composante verticale ( $=90^\circ$ )

$$\sigma_y^1 = \frac{E}{a}(V_3 - V_1) = -0.442 \frac{P}{A} \quad (\text{compression})$$

Élément (2) : Composante verticale ( $=0^\circ$ )

$$\sigma_x = \frac{E}{a}(U_3 - U_4) = -0.441 \frac{P}{A} \quad (\text{compression})$$

Système de résolution :

Forme matricielle du système :

$$\begin{bmatrix} R^{(1)} + R^{(2)} + R^{(4)} & -R^{(2)} & -1 & 0 \\ -R^{(2)} & R^{(2)} + R^{(4)} + R^{(5)} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1.3536 & 0.3536 \\ 0 & 0 & 0.3536 & 1.3536 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Pa}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On écrit ce système sous forme numérique :

$$\begin{bmatrix} 1.3536 & -0.3536 & -1 & 0 \\ -0.3536 & 1.3536 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1.3536 & 0.3536 \\ 0 & 0 & 0.3536 & 1.3536 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Pa}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Détail du calcul :

$$1.3536V_1 - 0.3536V_3 - U_4 = 0 \quad (\text{Équation 1})$$

$$-0.3536V_1 + 1.3536V_3 = 0 \quad (\text{Équation 2})$$

$$-U_3 + 1.3536U_4 + 0.3536V_4 = \frac{Pa}{EA} \quad (\text{Équation 3})$$

$$0.3536U_4 + 1.3536V_4 = 0 \quad (\text{Équation 4})$$

Résultats des déplacements nodaux :

$$U_3 = 1.6927 \left( \frac{Pa}{EA} \right)$$

$$V_3 = 0.442 \left( \frac{Pa}{EA} \right)$$

$$U_4 = 2.134 \left( \frac{Pa}{EA} \right)$$

$$V_4 = -0.557 \left( \frac{Pa}{EA} \right)$$

On écrit ce système sous forme numérique :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.3536 & -0.3536 \\ 0 & -1 & -0.3536 & 0.3536 \\ 0.3536 & 0.3536 & 0 & 0 \\ 0.3536 & -0.3536 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x2} \\ R_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.6927 \frac{Pa}{EA} \\ 0.442 \frac{Pa}{EA} \\ 2.134 \frac{Pa}{EA} \\ -0.557 \frac{Pa}{EA} \end{Bmatrix}$$

Les resultats :

$$R_{x1} = -0.3536 \times 1.6927P - 0.3536 \times 0.442P = -0.557P$$

$$R_{y1} = -0.442P - 0.3536 \times 1.134P + 0.3536 \times 0.557P = -0.999P$$

$$R_{x2} = -0.3536 \times 1.6927P + 0.3536 \times 0.442P = -0.442P$$

$$R_{y2} = 0.3536 \times 1.6927P - 0.3536 \times 0.442P + 0.557P = 0.999P$$

Vérification de l'équilibre :

$$\sum F_x = R_{x1} + R_{x2} = -0.557P - 0.442P \approx -P$$

$$\sum F_y = R_{y1} + R_{y2} = -P + P = 0$$

Résultats numériques – Déplacements aux nœuds :

$$\begin{aligned}
 U_1 &= V_1 = 0 \\
 U_3 &= \frac{1.6927 \times 3000P}{8 \times 10^7} = 0.634 \text{ mm} \\
 V_3 &= \frac{0.442 \times 3000P}{8 \times 10^7} = 0.166 \text{ mm} \\
 U_4 &= \frac{1.345 \times 3000P}{8 \times 10^7} = 0.800 \text{ mm} \\
 V_4 &= \frac{-0.557 \times 3000P}{8 \times 10^7} = -0.208 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Calcul des contraintes dans les barres :

$$\sigma^{(e)} = \frac{E}{L^{(e)}} [-u_i \cos \theta - v_i \sin \theta + u_j \cos \theta + v_j \sin \theta]$$

**Élément (1) :** Nœuds 1-3

$$\begin{aligned}
 e &= 1; \quad i = 1; \quad j = 3; \quad L^{(1)} = a; \quad \theta = 90^\circ \\
 \cos \theta &= 0; \quad \sin \theta = 1 \\
 \sigma^{(1)} &= \frac{E}{a} [-0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + v_3 \cdot 1] \\
 &= \frac{E}{a} v_3 = \frac{0.442Pa}{EA} \cdot \frac{E}{a} = 0.442 \frac{P}{A} \quad (\text{traction})
 \end{aligned}$$

**Élément (2) :** Nœuds 3-4

$$\begin{aligned}
 e &= 2; \quad i = 3; \quad j = 4; \quad L^{(2)} = a; \quad \theta = 0^\circ \\
 \cos \theta &= 1; \quad \sin \theta = 0 \\
 \sigma^{(2)} &= \frac{E}{a} [-u_3 \cos \theta - v_3 \sin \theta + u_4 \cos \theta + v_4 \sin \theta] \\
 &= \frac{E}{a} (u_4 - u_3) \\
 &= \frac{E}{a} (2.134 - 1.6927) \frac{Pa}{EA} \\
 &= 0.441 \frac{P}{A} \quad (\text{traction})
 \end{aligned}$$

**Élément (3) :** Nœuds 2-4

$$\begin{aligned}
 e &= 3; \quad i = 2; \quad j = 4; \quad L^{(3)} = a; \quad \theta = 90^\circ \\
 \cos \theta &= 0; \quad \sin \theta = 1 \\
 \sigma^{(3)} &= \frac{E}{a} [-u_2 \cos \theta - v_2 \sin \theta + u_4 \cos \theta + v_4 \sin \theta] \\
 &= \frac{E}{a} (-v_2 + v_4) \\
 &= \frac{E}{a} (0 - 0.557) \frac{Pa}{EA} \\
 &= -0.557 \frac{P}{A} \quad (\text{compression})
 \end{aligned}$$

**Élément (4) :** Nœuds 2-3

$$\begin{aligned}
 e &= 4; \quad i = 2; \quad j = 3; \quad L^{(4)} = 1.414a; \quad \theta = 135^\circ \\
 \cos \theta &= -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \sigma^{(4)} &= \frac{E}{1.414a} [-u_2 \cos \theta - v_2 \sin \theta + u_3 \cos \theta + v_3 \sin \theta] \\
 &= \frac{E}{1.414a} \left[ u_3 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + v_3 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{E}{1.414a} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (-u_3 + v_3) \\
 &= \frac{1.6927 - 0.442 P}{2} \frac{P}{A} \\
 &= -0.625 \frac{P}{A} \quad (\text{compression})
 \end{aligned}$$

**Élément (5) :**

$$\begin{aligned}
 e &= 5; \quad i = 1; \quad j = 4; \quad L^{(5)} = \sqrt{2}a \\
 \cos \theta &= \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\theta = 45^\circ)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma^{(5)} &= \frac{E}{L^{(5)}} [-u_1 \cos \theta - v_1 \sin \theta + u_4 \cos \theta + v_4 \sin \theta] \\
 &= \frac{E}{\sqrt{2}a} \left[ 0 + 0 + u_4 \frac{\sqrt{2}}{2} + v_4 \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\
 &= \frac{E}{\sqrt{2}a} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (u_4 + v_4) \\
 &= \frac{2.134 + (-0.557) P}{2} \frac{P}{A} \\
 &= 1.345 \frac{P}{A} \quad (\text{traction})
 \end{aligned}$$

**Résumé des contraintes :**

En prenant  $P/A = 25$  kPa :

$$\begin{aligned}
 \sigma^{(1)} &= 0.442 \times 25 = 11.05 \text{ kPa} \quad (\text{Tr}) \\
 \sigma^{(2)} &= 0.441 \times 25 = 11.03 \text{ kPa} \quad (\text{Tr}) \\
 \sigma^{(3)} &= -0.557 \times 25 = -13.93 \text{ kPa} \quad (\text{Cp}) \\
 \sigma^{(4)} &= -0.625 \times 25 = -15.63 \text{ kPa} \quad (\text{Cp}) \\
 \sigma^{(5)} &= 1.345 \times 25 = 33.63 \text{ kPa} \quad (\text{Tr})
 \end{aligned}$$

## 5.4 Exercice N°4

Données :

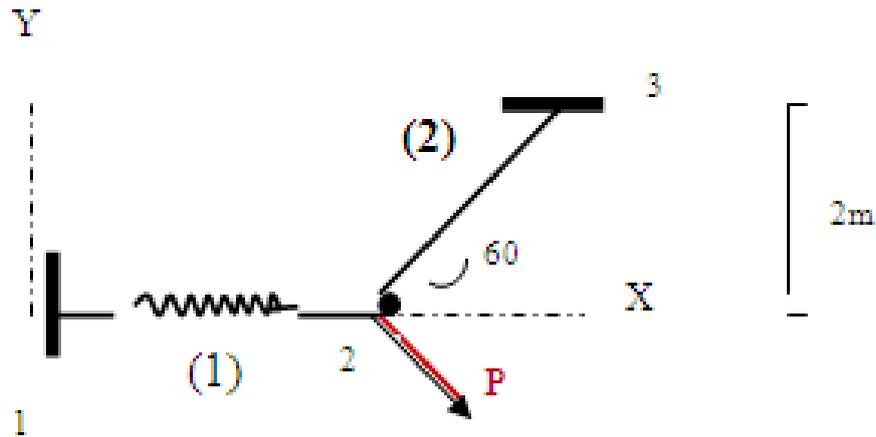


Figure 5.4: Geometrie et chargement du systeme

- $k$  : raideur du ressort
- $EA = 2 \times 10^5 \times 3 \times 10^2 = 6 \times 10^7 N$
- Longueur de l'élément (2) :

$$L^{(2)} \sin(60^\circ) = 2 \quad \Rightarrow \quad L^{(2)} = \frac{2}{\sin(60^\circ)} = \frac{4}{\sqrt{3}} m$$

#### Assemblage des matrices de rigidité :

Matrice de rigidité élémentaire (ressort) :

$$[K]^{(1)} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### Matrice de rigidité élémentaire (barre) :

$$[K]^{(2)} = \frac{EA}{L^{(2)}} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

avec  $\theta = 60^\circ$

#### Système global assemblé :

$$[K]_{\text{global}} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k + R_{11}^{(2)} & R_{12}^{(2)} & -R_{11}^{(2)} & -R_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & R_{21}^{(2)} & R_{22}^{(2)} & -R_{21}^{(2)} & -R_{22}^{(2)} \\ 0 & 0 & -R_{11}^{(2)} & -R_{21}^{(2)} & R_{11}^{(2)} & R_{21}^{(2)} \\ 0 & 0 & -R_{12}^{(2)} & -R_{22}^{(2)} & R_{12}^{(2)} & R_{22}^{(2)} \end{bmatrix}$$

où les termes  $R_{ij}^{(2)}$  sont les composantes de la matrice de rigidité de l'élément barre.  
Relations importantes :

$$R^{(1)} + R^{(2)} = k + \frac{EA}{L} \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta$$

**Transformation du second élément :**

$$K^{(2)} = \frac{6 \times 10^7}{\frac{4}{\sqrt{3}}} \times \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} = 1.125 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

**Système d'équations :**

$$\begin{aligned} (k + 0.648) \times 10^7 \cdot u_2 + 1.125 \times 10^7 \cdot v_2 &= 0.865P \\ 1.125 \times 10^7 \cdot u_2 + 1.946 \times 10^7 \cdot v_2 &= -0.5P \end{aligned}$$

**Solution du système :**

Le déterminant du système :

$$\det = (k + 0.648) \times 1.946 \times 10^{14} - (1.125)^2 \times 10^{14}$$

Solution pour  $u_2$  :

$$u_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.865P & 1.125 \\ -0.5P & 1.946 \end{vmatrix}}{\det} = \frac{(0.865 \times 1.946 + 0.5 \times 1.125)P}{\det} = \frac{2.245P}{\det}$$

Solution pour  $v_2$  :

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} (k + 0.648) \times 10^7 & 0.865P \\ 1.125 \times 10^7 & -0.5P \end{vmatrix}}{\det} = \frac{(-0.5(k + 0.648) - 0.973)P \times 10^7}{\det}$$

**Données techniques :**

- $EA = 2 \times 10^5 \times 3 \times 10^2 = 6 \times 10^7 \text{ N}$
- Longueur élément (2) :  $L^{(2)} = \frac{2}{\sin 60^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ m}$

$$e_x^{(t)} = \frac{1}{L^{(t)}} [-u_2 \cos \theta - v_2 \sin \theta + u_3 \cos \theta + v_3 \sin \theta]$$

La déformation se simplifie donc en :

$$e_x^{(t)} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( -\frac{1}{2}u_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_2 \right) = -\frac{\sqrt{3}}{8}u_2 - \frac{3}{8}v_2$$

En substituant les valeurs numériques :

$$e_x^{(t)} = 0.216(-u_2 - 1.732v_2)$$

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans le domaine de génie Civil il est nécessaire de connaître les méthodes de calcul des Structures mais des fois, on rencontre des difficultés de résolution des problèmes et surtout pour les Structures complexes par exemple des Systems hyperstatiques ou des structures procédant une forme irrégulière.

Dans ce cas on a le choix d'utiliser la présente méthode d'élément finis qui nous facilite la tâche de calcul en se basant sur le choix exacte des modèles de déplacements ainsi la discrétisation convenable à ces structures.

On tire l'attention la facilité de calcul se concentre sur le développement d'un programme de calcul qui ne prend pas beaucoup du temps dans l'exécution et qui nous donne des résultats acceptable et précis.

# Références bibliographiques

- Anissimov, A. (1993). *Calcul des barres dans les cas de sollicitations*. OPU.
- Batoz, J. L., & Dhatt, G. (1990). *Modélisation des structures par éléments finis: Poutres et plaques*. Hermès.
- Dhatt, G., Touzot, G., & Lefrançois, E. (2004). *Méthode des éléments finis*. Hermes Science Publications.
- Foulard, C. (1988). *Le calcul des structures par éléments finis*. Hermès.
- Liu, Y. (1998). *Introduction to finite element method*. University of Cincinnati.
- Welgosz, C. (1999). *Cours et exercices de résistance des matériaux, élasticité, éléments finis*. Marketing S.A.