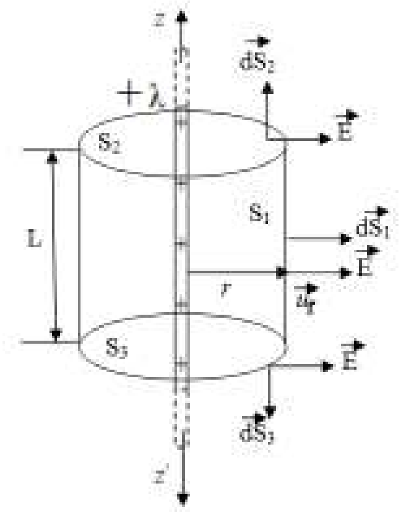
Corrigés des exercices TD 2 (physique 2)

Théorème de Gauss

Exercice 1

1/ Calcul de E et V

1.1/ Calcul de E



A cause de la symétrie cylindrique, on peut dire que le module du champ électrique est le même pour tous les points situés à une distance r u centre du fil.

Le champ $\vec{E}$ dépend que de *r* et il est de la forme vectorielle: $\vec{E}(r) = E\vec{u}_r$

Surface de Gauss : un cylindre d'axe *zz'* de rayon *r* et de hauteur L

$$\phi = \oiint \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{\text{int}} = \lambda L$$

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \int_{s_1} \vec{E}d\vec{S}_1 + \int_{s_2} \vec{E}d\vec{S}_2 + \int_{s_3} \vec{E}d\vec{S}_3$$

Sur les surfaces S_2 et S_3, $\vec{E}$ est perpendiculaire à $d\vec{S}_2$ et $d\vec{S}_3$ ce que signifie que le flux est nul à travers ces deux surfaces, sur la surface latérale S_1 le champ $\vec{E}$ est parallèle à $d\vec{S}_1$ et son module est constant.

$$E\int_{s_1} dS_1 + 0 + 0 = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Rightarrow ES_1 = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \qquad \text{avec : } S_1 = 2\pi r L$$

$$\Rightarrow E\,2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

donc : $\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0} = \frac{2K\lambda}{r}}$ car $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

en vecteur : $\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\vec{u}_r = \frac{2K\lambda}{r}\vec{u}_r}$

1.2/ Calcul du potentiel *V(r)* :

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -E.dr$$

$$\Rightarrow V(r) = -\int E.dr = -\int \frac{2K\lambda}{r}.dr = -2K\lambda \int \frac{1}{r}dr$$

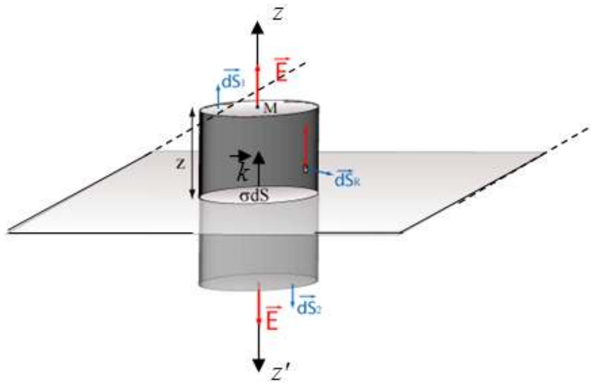
$$\Rightarrow \boxed{V(r) = -2K\lambda.\ln|r| + C}$$

<u>Exercice 2</u>

1.1/ Calcul du champ électrique :

La charge étant répartie sur un plan infini, tous les points équidistants du plan sont équivalents. On en déduit que le champ est perpendiculaire au plan.

Pour calculer le champ électrostatique à une distance z de la feuille chargée, on choisit donc comme surface de Gauss un cylindre de hauteur 2z et de section S dont l'axe est perpendiculaire et symétrique par rapport au plan chargé.



$$\Phi = \oint_{cylindre} \vec{E}.\vec{dS} = \int_{S_1} \vec{E_1}.\vec{dS_1} + \int_{S_R} \vec{E_R}.\vec{dS_R} + \int_{S_2} \vec{E_2}.\vec{dS_2}$$

Comme le champ électrostatique est perpendiculaire au plan chargé, son flux à travers la surface de révolution S_R du cylindre est nul.

$$\Phi = \int_{S_1} \vec{E_1}.\vec{dS_1} + \int_{S_2} \vec{E_2}.\vec{dS_2}$$

Le flux du champ électrostatique à travers la surface du cylindre (une surface fermée) se réduit au flux à travers les surfaces de base S_1 et S_2. Comme on a pris la précaution de prendre un cylindre symétrique par rapport à la feuille chargée, on trouve que :

$$\Phi = 2\int_{S_1} \vec{E_1}.\vec{dS_1}$$

Sur une surface de base, $\vec{E_1}$ et $\vec{dS_1}$ sont perpendiculaires. On peut alors écrire $\Phi = 2\int_{S_1} E_1 dS_1$. De plus E_1 ne dépend que de z, il est donc constant sur toute la surface S_1. On obtient donc $\Phi = 2\, E_1\, S$.

$$Q_{int} = \sigma S$$

On en déduit : $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

En vecteur :

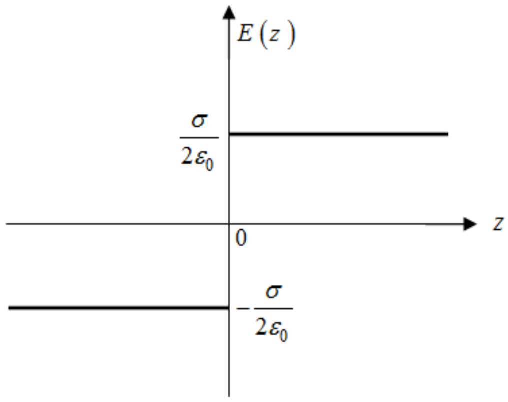
$$\boxed{\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|} = \begin{cases} +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}\,; & z \succ 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}\,; & z \prec 0 \end{cases}}$$

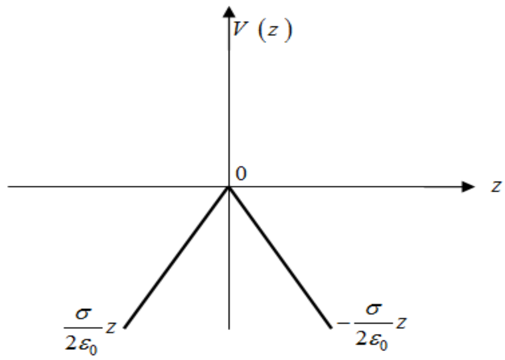
1.2 / Calcul du potentiel électrique *V(z)* :

$$dV = -E.dz \Rightarrow V(z) = -\int E.dz = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z|$$

$$\boxed{V(z) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}z\,; & z \succ 0 \\ +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}z\,; & z \prec 0 \end{cases}}$$

2/ La représentation graphique de E et V :





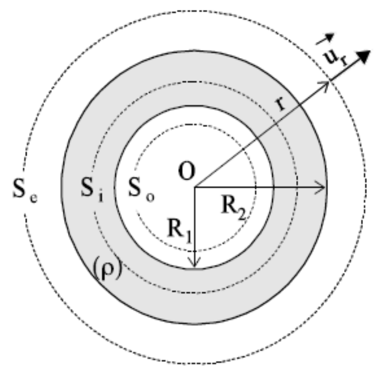
<u>Exercice 3</u>

1.1/ Calcul du champ électrique $\vec{E}$ par le théorème de Gauss :

En raison de la symétrie sphérique de centre O en tout point et porté par le vecteur $\vec{u}_r$ le champ $\vec{E}$ ne dépend que de sa distance de O à r et il est de la forme : $\vec{E}(r) = E\vec{u}_r$

La surface de Gauss : une sphère de centre O et de rayon r

$$\phi = \oiint \vec{E}d\vec{S} = ES_G = 4\pi r^2 E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



Q_{int} : dépend de r, 3 cas seront distingués :

<u>1^er^ cas</u> : $R_2 < r$:

$Q_{\text{int}} = \rho v = \rho \frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)$

$4\pi r^2 E = \frac{\rho 4\pi}{3\varepsilon_0}\left(R_2^3 - R_1^3\right) \Rightarrow \boxed{E\left(r\right) = \frac{\rho}{3r^2\varepsilon_0}\left(R_2^3 - R_1^3\right)}$

en vecteur : $\boxed{\vec{E}\left(r\right) = \frac{\rho}{3r^2\varepsilon_0}\left(R_2^3 - R_1^3\right)\vec{u}_r}$ $\quad R_2 < r$

2eme cas : $R_2 < r < R_1$:

$Q_{\text{int}} = \rho v = \rho \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^3\right)$

$4\pi r^2 E = \frac{\rho 4\pi}{3\varepsilon_0}\left(r^3 - R_1^3\right) \Rightarrow \boxed{E\left(r\right) = \frac{\rho}{3r^2\varepsilon_0}\left(r^3 - R_1^3\right)}$

en vecteur : $\boxed{\vec{E}\left(r\right) = \frac{\rho}{3r^2\varepsilon_0}\left(r^3 - R_1^3\right)\vec{u}_r}$ $\quad R_2 < r < R_1$

3eme cas : $r < R_1$:

Le flux à travers la surface sphérique $S_0(O, r)$ est nul car cette surface ne contient pas de charges.

$Q_{\text{int}} = 0$

$4\pi r^2 E = 0 \Rightarrow \boxed{E\left(r\right) = 0}$

donc : $\boxed{\vec{E}\left(r\right) = \vec{0}}$ $\quad : r < R_1$

Ecriture du champ sous forme compact :

$$\vec{E}\left(r\right) = \begin{cases} \frac{\rho}{3r^2\varepsilon_0}\left(R_2^3 - R_1^3\right)\vec{u}_r; & R_2 \prec r \\ \frac{\rho}{3r^2\varepsilon_0}\left(r^3 - R_1^3\right)\vec{u}_r; & R_2 \prec r \prec R_1 \\ \vec{0}; & r \prec R_1 \end{cases}$$

1.2/ Calcul du potentiel électrique *V(r)* :

1er cas : $R_2 < r$:

$dV = -\vec{E}d\vec{l} = -E.dr = -\frac{\rho}{3r^2\varepsilon_0}\left(R_2^3 - R_1^3\right).dr \Rightarrow \boxed{V\left(r\right) = \frac{\rho}{3r\varepsilon_0}\left(R_2^3 - R_1^3\right) + C_1}$

Détermination de la constante d'intégration C_1 :

Les conditions initiales : le potentiel est nul à l'infini

$V \longrightarrow 0$ *lorsque* $r \longrightarrow \infty$, *donc* $C_1 = 0$.

2eme cas : $R_2 < r < R_1$:

$dV = -\vec{E}d\vec{l} = -E.dr = -\frac{\rho}{3r^2\varepsilon_0}\left(r^3 - R_1^3\right).dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right).dr$

$$V = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right).dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r}\right) + C_2$$

Détermination de la constante d'intégration C_2 :

Pour $r=R_2$, *on a :*

$$-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r}\right) + C_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R_2^2 - \frac{R_1^3}{R_2}\right)$$

Il vient que :

$$\boxed{V\left(r\right) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} - \frac{3R_2^2}{2}\right)}$$

3eme cas : $r < R_1$:

Le champ est nul, ce qui entraine que le potentiel soit constant.

à $r=R_1 \Rightarrow \boxed{V\left(r\right) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_1^2 - R_2^2\right)}$

donc :

$$\boxed{V\left(r\right) = \begin{cases} \frac{\rho}{3r\varepsilon_0}\left(R_2^3 - R_1^3\right); & R_2 \prec r \\ -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{R_1^3}{r} - \frac{3R_2^2}{2}\right); & R_2 \prec r \prec R_1 \\ -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_1^2 - R_2^2\right); & r \prec R_1 \end{cases}}$$

2/ La représentation graphique de $\vec{E}\left(r\right)$ **et** $V\left(r\right)$: