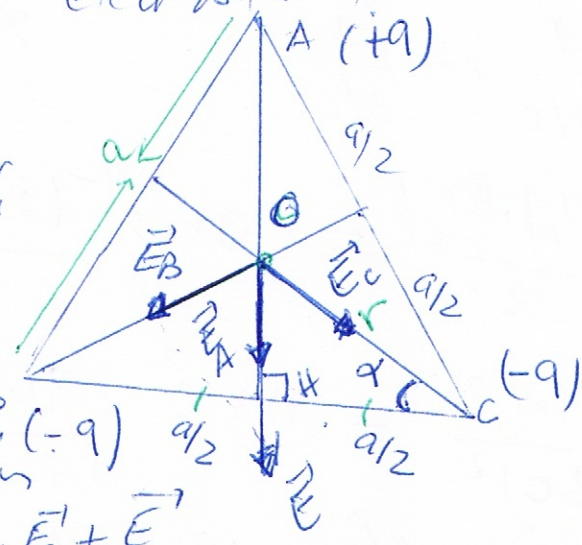
Elements de reponses
TD N° : 2
Electrostatique

• Exercice N° : 1 :

le centre (O) se trouve à la distance $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$



Theoreme de superposition

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$$

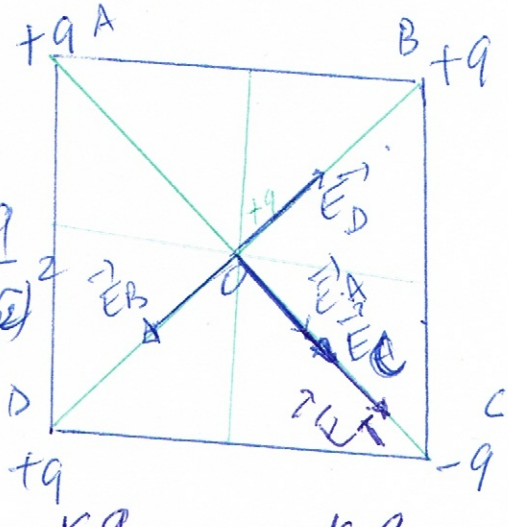
En intensité : $|\vec{E}| = |E_A| + |E_B| \cos\frac{\pi}{3} + |E_C| \cos\frac{\pi}{3}$

or : $E_A = E_B = E_C = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} = K\frac{q}{r^2}$.

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

Appli. Num : $\boxed{E = 540\ V/m}$.

Exercice N° : 02 :



le centre du carré (O) se trouve à la distance $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

$$\vec{E}_T = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$$

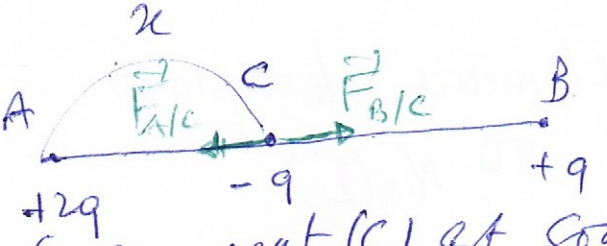
$$|\vec{E}_A| = |\vec{E}_B| = |\vec{E}_C| = |\vec{E}_D| = \frac{Kq}{(a/\sqrt{2})^2}$$

$$\vec{E}_B + \vec{E}_D = \vec{0}$$

$$\vec{E}_T = 2\vec{E}_A = 2\vec{E}_C$$

$$E_T = 2E_A \Rightarrow E_T = 2\frac{Kq}{(a/\sqrt{2})^2} = 4K\frac{q}{a^2} = \frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2} \approx 14400\ V/m$$

EX: 03 :



La charge placé au point (C) est soumise à deux forces: $\vec{F}_{A/C}$ et $\vec{F}_{B/C}$

$x = AC$ et $BC = d - x$

$$|\vec{F}_{A/C}| = K\frac{|q_A|\cdot|q_C|}{x^2} = 9\times10^9\,\frac{|2q|\cdot|-q|}{x^2} = 9\times10^9\,\frac{2q^2}{x^2}$$

$$|\vec{F}_{B/C}| = K\frac{|q_B|\cdot|q_C|}{(BC)^2} = 9\times10^2\,\frac{|+q|\cdot|-q|}{(d-x)^2} = 9\times10^9\,\frac{q^2}{(d-x)^2}$$

Pour avoir l'équilibre il faut que $|\vec{F}_{A/C}| = |\vec{F}_{B/C}|$

$$\cancel{9\times10^9}\,\frac{2q^2}{x^2} = \cancel{9\times10^9}\,\frac{q^2}{(d-x)^2}$$

$$\frac{2}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2} \Rightarrow 2(d^2 - 2dx + x^2) = x^2$$

$$x^2 - 4dx + 2d^2 = 0 \qquad \text{avec } d = 0{,}2\,m$$

$$x^2 - 0{,}8x + 0{,}08 = 0 \Rightarrow \boxed{x = AC = 0{,}11\,m}$$

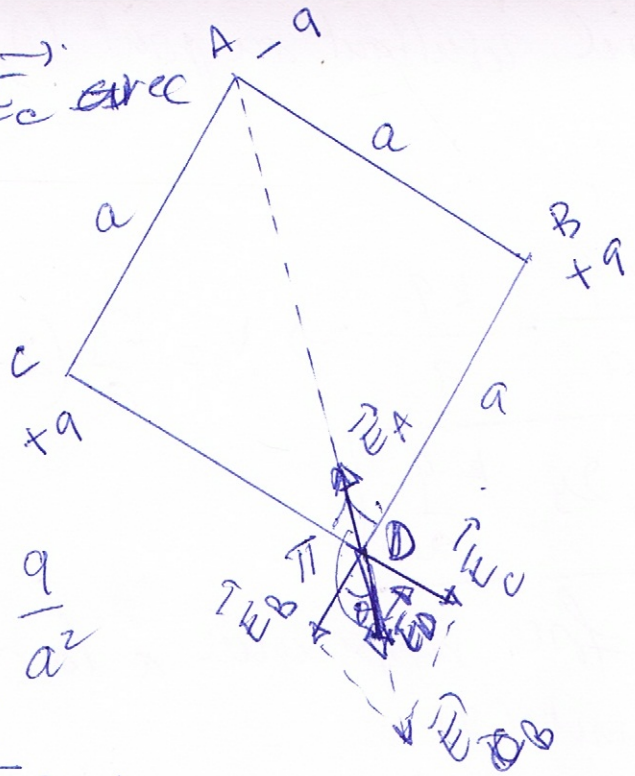
Ex 3 :

$\vec{E}_D = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$ avec

$\vec{E}_{CB} = \vec{E}_C + \vec{E}_B$

Donc :

$\vec{E}_D = \vec{E}_{CB} + \vec{E}_A$



$|\vec{E}_C| = |\vec{E}_B| = K \dfrac{q}{a^2}$

$|\vec{E}| = K \dfrac{q}{(AD)^2}$;

$AD = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

$$\boxed{|\vec{E}_A| = K \frac{q}{2a^2}}$$

L'angle formé entre $\vec{E}_B$ et $\vec{E}_C$ est $\alpha = \pi/2$

$E_{CB} = \sqrt{E_C^2 + E_B^2 + 2E_C E_B \cos \pi/2} \Rightarrow E_{CB} = E_C\sqrt{2}$.

$$\boxed{E_{CB} = \sqrt{2}\, \frac{Kq}{a^2}}$$

$\vec{E}_D = \vec{E}_{CB} + \vec{E}_A \Rightarrow E_D = \sqrt{E_{CB}^2 + E_A^2 - 2E_A E_{CB} \cos \pi}$

$\Leftrightarrow \quad E_D = E_{CB} - E_A$.

$E_D = \sqrt{2}\dfrac{Kq}{a^2} - K\dfrac{q}{2a^2} = \dfrac{Kq}{a^2}\left[\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\right] \Rightarrow$

$$\boxed{E_D = 0{,}914 \cdot \frac{Kq}{a^2}\ (V m^{-1})}$$

2/ Calcul du potentiel résultant au point (D)

$V_D = V_A + V_B + V_C$;

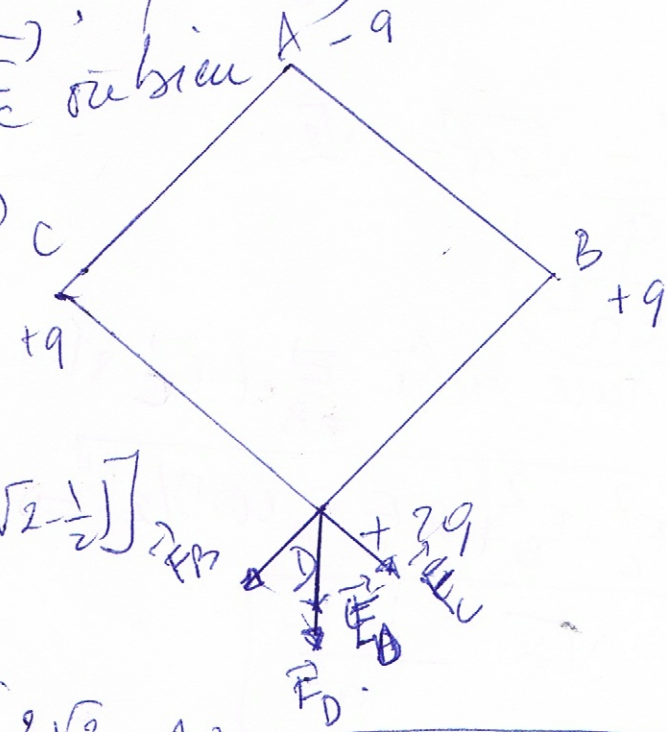
$$V_D = -\frac{Kq}{\sqrt{2}\,a} + \frac{Kq}{a} + \frac{Kq}{a} \Rightarrow V_D = \frac{Kq}{a}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{V_D = 1{,}29\ \frac{Kq}{a}}$$

3/ Calcul de la force appliquée à la charge +2q placée au point (D).

$\vec{F}_D = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C$ ou bien

$\vec{F}_D = 2q\,\vec{E}_D \Rightarrow$



$F_D = 2q\,E_D$

$$F_D = 2q\left[\frac{Kq}{a^2}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$F_D = \frac{Kq^2}{a^2}\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{F_D \simeq 1{,}83\ \frac{Kq^2}{a^2}\ N}$$

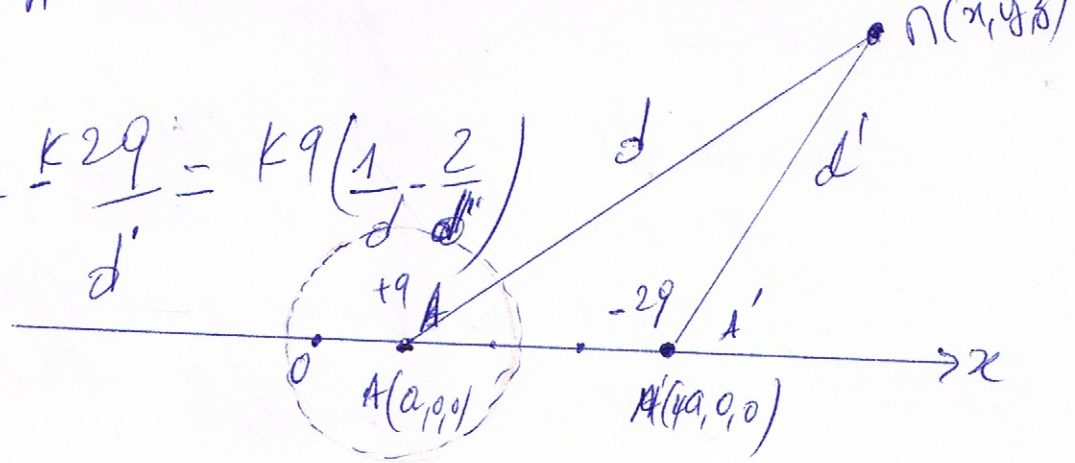
4/ Calcul de l'énergie potentielle de la charge +2q

$$E_p = 2q\,V \Rightarrow E_p = 2q\,\frac{Kq}{a}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{E_p = 2{,}59\ \frac{Kq^2}{a}}$$

$$V_{(M(x,y,z))} = V_A + V_{A'}$$

$d^2 =$



$$V_{M(x,y,z)} = \frac{kq}{d} - \frac{k2q}{d'} = kq\left(\frac{1}{d} - \frac{2}{d'}\right)$$

$$V_{M(x,y,z)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{2}{d'}\right)$$

d et d' sont les distances dans l'espace.

$$d^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2$$

$$d'^2 = (x-4a)^2 + y^2 + z^2$$

$$\boxed{V_M = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} - \frac{2}{\sqrt{(x-4)^2+y^2+z^2}}\right]}$$

2°/ <u>Surface equipotentielle</u> :

$$V(x,y,z) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} - \frac{2}{\sqrt{(x-4)^2+y^2+z^2}}$$

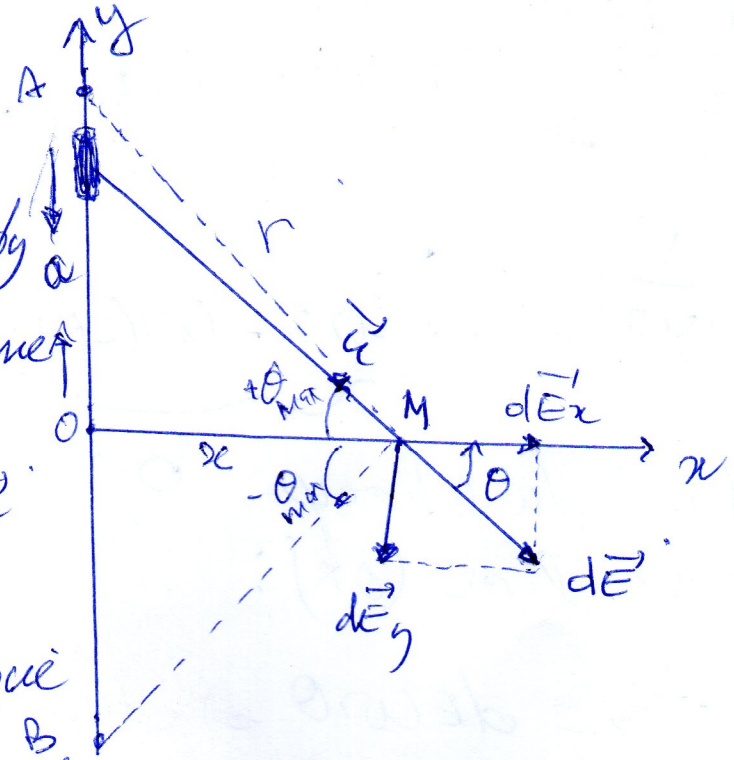
donc : $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$

montre que la surface equipotentielle $V=0$ est le centre d'une sphère de rayon $r = 2a$.

3°/ le champ électrostatique est perpendiculaire à la surface equipotentielle. quelque soit le point par lequel passe le champ ce dernier est perpendiculaire à la surface de la sphère et passe par conséquent par le centre de cette sphère.

EX : 06 :

$d\vec{E}$: est le champ crée au point M, par un élément de longueur $dl = dy$ du segment rectiligne



$$d\vec{E}(M) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}$$

avec $dq = \lambda dy$

le champ electrostatique $dE(M)$ a deux composants

$$d\vec{E}(M) = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$$

$$d\vec{E}(M) = dE_x\,\vec{u}_x + dE_y\,\vec{u}_y$$

$$\cos\theta = \frac{dE_x}{dE} \Rightarrow dE_x = dE\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{dE_y}{dE} \Rightarrow dE_y = dE\sin\theta$$

Demontrons que $E_y = 0$

$$dE_y = dE\sin\theta \Rightarrow dE_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{r^2}\sin\theta$$

on pose $r = AM$; $OM = x$; $OA = y$

$$r^2 = \frac{x^2}{\cos^2\theta} \text{ et } tg\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$y = x\,tg\theta \Rightarrow dy = \frac{x}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$dE_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\frac{x}{\cos^2\theta}d\theta \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{\cos^2\theta}}\sin\theta$$

$$dE_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\sin\theta\,d\theta$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\int_{-\theta}^{\theta}\sin\theta\, d\theta \Rightarrow E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\left[\cos\theta\right]_{-\theta}^{\theta}$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\underbrace{\left[\cos\theta - \cos(-\theta)\right]}_{0} \Rightarrow \boxed{E_y = 0}$$

2°/ calcul du champ sur l'axe (Ox) :

$$dE_x = dE\cos\theta \Rightarrow dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{r^2}\cos\theta$$

avec $r^2 = \frac{x^2}{\cos^2\theta}$

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\theta \Rightarrow dy = \frac{x}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\cos\theta\, d\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\int_{-\theta}^{\theta}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\left[\sin\theta\right]_{-\theta}^{\theta}$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\left[\sin(+\theta) - \underbrace{\sin(-\theta)}_{-\sin\theta}\right] \quad \text{or } \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\left[\sin\theta + \sin\theta\right] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\sin\theta$$

$$\sin\theta_{max} = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \Rightarrow E = E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

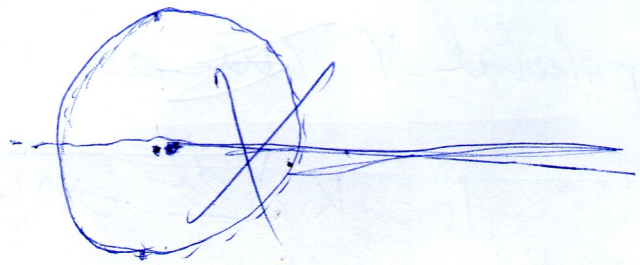
$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\vec{u_x}}$$

3°/ Dans le cas d'un fil infiniment long, on a $a \to +\infty$, ce qui conduit à :

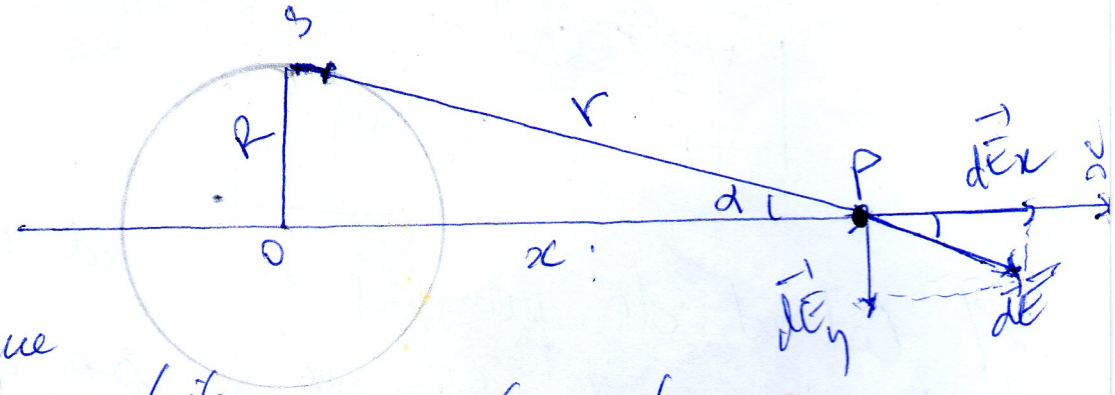
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \to 1$$

d'où $\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\vec{u}_x}$

~~EX : 07~~



EX : 07 :



le champ électrique élémentaire $d\vec{E}$ produit au point (P) par la charge élémentaire dq du fil

$$d\vec{E} = d\vec{E_x} + d\vec{E_y} = dE_x\vec{i} + dE_y\vec{j}$$

$E_y = 0$ (A cause de la symétrie) donc

$E = E_x$ d'où $dE = K\frac{dq}{r^2}$

$dE_x = dE\cos\alpha$ et $dq = \lambda dl$

$\Rightarrow dE_x = K\frac{dq}{r^2}\cdot\cos\alpha \Rightarrow dE_x = K\frac{\lambda dl}{r^2}\cos\alpha$

Dans le triangle POS, on a :

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \Rightarrow dE_x = \frac{K\lambda x}{(x^2+R^2)^{3/2}}dl$$

dmc

$$E_x = \frac{K\lambda x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow E_x = \frac{K\lambda x}{(x^2+R^2)^{3/2}}2\pi R$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda x R}{2\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\vec{i} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{\lambda x R}{2\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}} \text{ vim}$$

2°/ Calcul du potentiel V crée au même point (P)

$$dV = K\frac{dq}{r} ; dV = K\frac{\lambda dl}{r} \Rightarrow V = K\frac{\lambda}{(x^2+R^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow$$

$$\boxed{V_{(P)} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0(x^2+R^2)^{1/2}}}$$

3°/ Calcul du point pour lequel le champ E est max

le champ $\vec{E}$ est max si sa dérivée est nulle

$$\left.\frac{dE_x}{dx}\right|_n = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\lambda x R}{2\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\right] = 0$$

l'expression finale de cette dérivée est : page 11

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{R^2 - 2x^2}{(x^2+R^2)^{5/2}}\right]$$

$$\frac{dE_x}{dx} = 0 \Rightarrow R^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_{max} = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}}$$