PHYS 2 : **Électricité & Magnétisme**
TD N° 1 : ***Compléments Mathématiques***
(*Intégrales double et triple, Opérateurs vectoriels*)

» Exercice N° 1 : (*Intégrale de surface et de volume*)

1. Rappeler les expressions du vecteur position $\vec{r}$ d'un point M dans les trois systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques (polaires) et sphériques.
2. Donner pour chaque système de coordonnées, le vecteur déplacement, les surafces et volume élémentaires.
3. Calculer, par intégration de l'élément de surface, la surface :
   (a) d'un disque de rayon R,
   (b) d'un cylindre à base circulaire de rayon R et de heuteur h,
   (c) d'une sphère de rayon R.
4. Calculer, par intégration de l'élément de volume, le volume :
   (a) d'un cylindre à base circulaire de rayon R et de heuteur h
   (b) d'une sphère de rayon R.

» Exercice N° 2 : (*Opérateur gradient*)

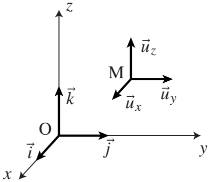
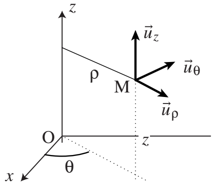
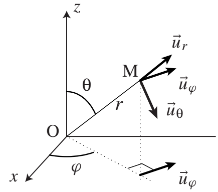
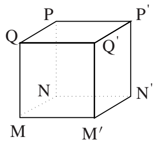
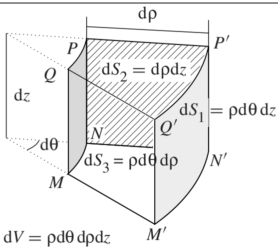
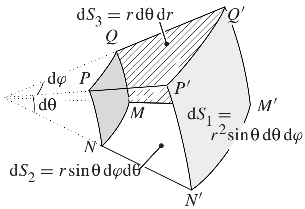
Soit $f(\vec{r})$ un champ scalaire défini en tout point $M(x,y,z)$ de l'espace.

1. Définir le vecteur gradient $\overrightarrow{\text{grad}}$ en coordonnées cartésiennes.
2. Soit $df(x,y,z)$ la différentielle totale de f. Montrer que : $df = \overrightarrow{\text{grad}}\,(f) \cdot \overrightarrow{dr}$
3. En utilisant la définition de df, déterminer les composantes du vecteur gradient de f en coordonnées cylindriques et sphériques.
4. Calculer : $\overrightarrow{\text{grad}}\,(r)$, $\overrightarrow{\text{grad}}(1/r)$.

» Exercice N° 3 : (*Opérateurs vectoriels*)

Soit le champ vectoriel : $\vec{V}(x,y,z) = (2x - y)\,\vec{i} + (2y - x)\,\vec{j} - 4z\,\vec{k}$

1. Calculer $\text{div}(\vec{V})$.
2. Vérifier que $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$.
3. Déterminer la fonction scalaire $\varphi(x,y,z)$ telle que : $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\varphi)$

COORDONNÉES CARTÉSIENNES	COORDONNÉES CYLINDRIQUES	COORDONNÉES SPHÉRIQUES
		
x y z	$= \rho\cos\theta$ $= \rho\sin\theta$ $= z$	$= r\sin\theta\cos\varphi$ $= r\sin\theta\sin\varphi$ $= r\cos\theta$
	$0 \leq \theta \leq 2\pi$	$0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$
$\vec{u}_x = \vec{i}$ $\vec{u}_y = \vec{j}$ $\vec{u}_z = \vec{k}$	$\vec{u}_\rho = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$ $\vec{u}_\theta = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta$ $\vec{u}_z = \vec{k}$	$\vec{u}_r = \vec{i}\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}\sin\theta$ $\vec{u}_q = \vec{i}\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\sin\theta$ $\vec{u}_\varphi = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi$
$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}l \left[\begin{array}{l}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z\end{array}\right.$ $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$	$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}l \left[\begin{array}{l}\mathrm{d}\rho\\ \rho\mathrm{d}\theta\\ \mathrm{d}z\end{array}\right.$ $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}z^2$	$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}l \left[\begin{array}{l}\mathrm{d}r\\ r\mathrm{d}\theta\\ r\sin q\,\mathrm{d}\varphi\end{array}\right.$ $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2$
 $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}x\mathrm{d}z = \mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	 $\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z$	 $\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$
$\vec{\nabla}\Phi = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{\imath} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{\jmath} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}$	$\vec{\nabla}\Phi = \dfrac{\partial\Phi}{\partial\rho}\vec{u}_\rho + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{u}_z$	$\vec{\nabla}\Phi = \dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{u}q + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi$
$\vec{\nabla}.\vec{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla}.\vec{A} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla}.\vec{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)$
$\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \dfrac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{u}_\rho & \rho\vec{u}_\theta & \vec{u}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\theta & A_z\end{vmatrix}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\vec{u}_r & r\vec{u}_\theta & r\sin\theta\vec{u}_\varphi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi\end{vmatrix}$
$\Delta\Phi = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi$	$\Delta\Phi = \left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial}\left(\rho\dfrac{\partial}{\partial}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi$	$\Delta\Phi = \left(\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\Phi$