Université Ibn Khaldoun de Tiaret

Faculté des Sciences Appliquées — Année Universitaire 2015-2016

Département des Sciences et de la Technologie — Semestre 1

Promotion : 1ère année LMD ST

Matière : *MathsI*

Fiche de TD *N°* 01

Exercice 1: Les propositions suivantes sont-elles *vraies* ou *fausses* ?

1) $\ln e = 1$ et $e \in \mathbb{Q}$

2) $\cos \pi = 1$ ou $\sin \pi = 0$

3) $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x < y$ alors $x^2 < y^2$

4) $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$

5) La négation de $\left(|x| > 1 \text{ ou } x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]\right)$ est $\left(x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]\right)$

6) La négation de $(x \neq 0 \text{ et } y \neq 0)$ est $(x \cdot y = 0)$

7) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 1$

8) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+,\ x + y > 0$

9) $\exists\, x \in \mathbb{R},\ |x| + 1 = 0$

Exercice 2: Compléter les propositions suivantes par ($\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$ et $\Rightarrow$) :

1) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4 \cdots\cdots x = 2$

2) $\forall\, z \in \mathbb{Z},\ z = \bar{z} \cdots\cdots z \in \mathbb{R}$

3) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x = \pi \cdots\cdots e^{2ix} = 1$

Exercice 3: Comparer les propositions suivantes et dire si elles sont *vraies* ou *fausses*:

1) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ x \geq y$

2) $\exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x \geq y$

Exercice 4: Prouver l'implication suivante : $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$

Exercice 5: Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$

Exercice 6: Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer l'équivalence : n est paire $\Leftrightarrow$ n^2 est paire

Exercice 7: Montrer que : $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 8: Démontrer par récurrence l'égalité : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 9: Soient A et B deux ensembles tels que : $A = \{x \in \mathbb{N},\ x > 10\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N},\ x \text{ pair}\}$

- Représenter les ensembles suivants :

A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $C_{\mathbb{N}}^{A}$, $C_{\mathbb{N}}^{B}$, $C_{\mathbb{N}}^{A} \cap C_{\mathbb{N}}^{B}$, $C_{\mathbb{N}}^{A} \cup C_{\mathbb{N}}^{B}$, $C_{\mathbb{N}}^{A \cap B}$ et $C_{\mathbb{N}}^{A \cup B}$

- En déduire les ensembles égaux

Exercice 10:

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E, montrer les égalités :

1. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
2. $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$
3. $C_{E}^{A} \,\Delta\, C_{E}^{B} = A \,\Delta\, B$

Exercice 11:

On donne A, B et C des sous-ensembles de E, Prouver que :

1. $(B \subset C) \Rightarrow (A \cap B) \subset (A \cap C)$
2. $((A \subset C) \wedge (B \subset C)) \Leftrightarrow ((A \cup B) \subset C)$

Exercice 12:

On définit sur $\mathbb{R}^*$, la relation **R** par

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^* :\ x \mathbf{R}\, y \iff x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}$$

1- Montrer que **R** est une relation d'équivalence

2- Déterminer la classe d'équivalence pour tout a de $\mathbb{R}^*$

3- En déduire la classe d'équivalence de 2

Exercice 13:

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit une relation **R** comme suit :

$(x, y)\, \mathbf{R}\, (x', y') \Leftrightarrow ((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y'))$

- Montrer que **R** est une relation d'ordre
- L'ordre de **R** est-il *total* ou *partiel* ?