SERIE DE TD N°01

Solution de L'exercice 01:

1)

$$A+B=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0&1+1\\1+1&0+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$$

$$A\times B=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times0+1\times1&2\times1+1\times2\\1\times0+0\times1&1\times1+0\times2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\times2+1\times1&0\times1+1\times0\\1\times2+2\times1&1\times1+2\times0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}$$

$$A^2=A\times A=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times2+1\times1&2\times1+1\times0\\1\times2+0\times1&1\times1+0\times0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}$$

$$B^2=B\times B=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\times0+1\times1&0\times1+1\times2\\1\times0+2\times1&1\times1+2\times2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$$

2) $(A+B)^2=A^2+B^2+2\cdot(A\times B)$?

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times2+2\times2&2\times2+2\times2\\2\times2+2\times2&2\times2+2\times2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8&8\\8&8\end{pmatrix}$$

$$A^2+B^2+2\cdot(A\times B)=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5+1+2\times1&2+2+2\times4\\2+2+2\times0&1+5+2\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&12\\4&8\end{pmatrix}$$

$(A+B)^2\neq A^2+B^2+2\cdot(A\times B)$ car le produit entre matrices est non commutatif.

Solution de L'exercice 02:

$$A=\begin{pmatrix}-3&2\\0&4\\1&-1\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

1)

$$A-2B-C=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-3&2\\0&4\\1&-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\\c_{31}&c_{32}\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases}-3-2\times1-c_{11}=0\\0-2\times0-c_{21}=0\\1-2\times1-c_{31}=0\end{cases}\text{ et }\begin{cases}2-2\times2-c_{12}=0\\4-2\times1-c_{22}=0\\-1-2\times1-c_{32}=0\end{cases}$$

Alors :

$$C=\begin{pmatrix}-5&-2\\0&2\\-1&-3\end{pmatrix}$$

2)

$$A+B+C-4D=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-3&2\\0&4\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&-2\\0&2\\-1&-3\end{pmatrix}-4\times\begin{pmatrix}d_{11}&d_{12}\\d_{21}&d_{22}\\d_{31}&d_{32}\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases}-3+1-5-4d_{11}=0\\0+0+0-4d_{21}=0\\1+1-1-4d_{31}=0\end{cases}\text{ et }\begin{cases}2+2-2-4d_{12}=0\\4+1+2-4d_{22}=0\\-1+1-3-4d_{32}=0\end{cases}$$

Alors :

$$D=\begin{pmatrix}-7/4&1/2\\0&7/4\\1/4&-3/4\end{pmatrix}$$

3) Transposées de A et de B :

$$A^t=\begin{pmatrix}-3&0&1\\2&4&-1\end{pmatrix}\ ;\ B^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}$$

Solution de L'exercice 03:

1)

$$\begin{pmatrix}2&1&-2&0\\3&0&1&8\\0&-5&3&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3&1&5\\2&7&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}3\cdot2+\\1\cdot3+\\5\cdot0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}3\cdot1+\\1\cdot0+\\5\cdot(-5)\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}3\cdot(-2)\\+1\cdot1\\+5\cdot3\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}3\cdot0+\\1\cdot8+\\5\cdot4\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}2\cdot2+\\7\cdot3+\\0\cdot0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}2\cdot1+\\7\cdot0+\\0\cdot(-5)\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}2\cdot(-2)\\+7\cdot1\\+0\cdot3\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}2\cdot0+\\7\cdot8+\\0\cdot4\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9&-22&10&28\\25&2&3&56\end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = (-3)\cdot 2 + 0\cdot(-4) + 5\cdot(-3)$$

$$= -21$$

3)

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-3) & 2\cdot 0 & 2\cdot 5 \\ (-4)\cdot(-3) & (-4)\cdot 0 & (-4)\cdot 5 \\ (-3)\cdot(-3) & (-3)\cdot 0 & (-3)\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 0 & 10 \\ 12 & 0 & -20 \\ 9 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

<u>Solution de L'exercice 04</u>:

I) Calcul des déterminants :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 5 - 3\times(-7) = 26$$

$$det\,(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 15 & 7 \\ \overset{(+)}{0} & \overset{(-)}{-2} & \overset{(+)}{0} \end{vmatrix}$$

$$= 0\times\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 15 & 7 \end{vmatrix} - (-2)\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2\times 7 - 3\times 5) = -2$$

Remarque : On peut calculer le déterminant selon n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne.

Règle de SARRUS (*pour matrices 3×3*) :

$$det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 15 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Selon la diagonale principale :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 15 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\times 15\times 0 + 3\times 7\times 0 + 5\times(-2)\times 3 = -30$$

Selon la diagonale Non-principale :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 15 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3\times 15\times 0 + 3\times 5\times 0 + 7\times(-2)\times 2 = -28$$

Alors $det(B) = -30 - (-28) = -2$

$$det(C) = \begin{vmatrix} (+)\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ (-)\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ (+)\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ (-)\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$+2\begin{vmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -5 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-61) - 2(-45) - 2(-4) = -24$$

II) Résolution des équations :

1) $$\begin{vmatrix} \overset{(+)}{1} & \overset{(-)}{m} & \overset{(+)}{1} \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow +\begin{vmatrix} 1 & m-1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - m\times\begin{vmatrix} m & m-1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2 + (m-1) - m(2m - m + 1) - m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2 + m - 1 - m^2 - m - m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -m^2 - m = 0$$

$$\Rightarrow -m(m+1) = 0 \Rightarrow m = 0 \vee m = -1$$

2) $$\begin{vmatrix} 3-m & 0 & 1 \\ 2 & 1-m & 1 \\ -1 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = 0$$

Par la règle de SARRUS :

$$\Rightarrow [(3-m)(1-m)(1-m) + 2\times 1\times 1 + 0\times 1\times(-1)]$$

$$-[-(1-m) + 1\times 1\times(3-m) + 0\times 2\times(1-m)] = 0$$

$$\Rightarrow (3-m)(1-m)^2 + 2 + (1-m) - (3-m) = 0$$

$$\Rightarrow (3-m)(1-m)^2 = 0 \Rightarrow m = 1 \vee m = 3$$

3) A est inversible $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$

$$det(A) = \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix}$$

Par la règle de SARRUS :

$$\Rightarrow det(A) = [(t+3)(t-3)(t+4) + (-1)\times 1\times 6 + 5\times(-6)\times 1]$$

$$-[1\times(t-3)\times 6 + 1\times(-6)\times(t+3) + (-1)\times 5\times(t+4)]$$

$$\Rightarrow det(A) = (t+3)(t-3)(t+4) - 36 - 6t + 18 + 6t + 18 + 5(t+4)$$

$$\Rightarrow det(A) = (t+3)(t-3)(t+4) + 5(t+4)$$

$$\Rightarrow det(A) = (t+4)\left[(t^2-9)+5\right]$$

$$\Rightarrow det(A) = (t+4)(t^2-4) = (t+4)(t+2)(t-2)$$

A est inversible $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$

$$\Leftrightarrow t \neq -4 \wedge t \neq -2 \wedge t \neq +2$$

L'inverse de A :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\left(C^A\right)^t = \frac{1}{(t+4)(t^2-4)}\left(C^A\right)^t$$

$$C^A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \text{ Avec}$$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \times \left\{\begin{matrix} le\ déterminant\ d'ordre\ inférieur \\ en\ éliminant\ la\ i^{ème} ligne\ et\ la\ j^{ème} colonne \end{matrix}\right\}$$

$$C^A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} t-3 & 1 \\ -6 & t+4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & t+4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & t-3 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -6 & t+4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} t+3 & 1 \\ 6 & t+4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} t+3 & -1 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ t-3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} t+3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} t+3 & -1 \\ 5 & t-3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{(t+4)(t^2-4)} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} t-3 & 1 \\ -6 & t+4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -6 & t+4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ t-3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & t+4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} t+3 & 1 \\ 6 & t+4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} t+3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 5 & t-3 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} t+3 & -1 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} t+3 & -1 \\ 5 & t-3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Solution de L'exercice 05:

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f_a(x,y,z) = \left(x + ay + az^2, y + 2az, z\right)$$

1) $M_a = M(f_a / B, B)$

$$\begin{cases} f_a(e_1) = f_a(1,0,0) = (1,0,0) = e_1 \\ f_a(e_2) = f_a(0,1,0) = (a,1,0) = a \cdot e_1 + e_2 \\ f_a(e_3) = f_a(0,0,1) = (a^2, 2a, 1) = a^2 \cdot e_1 + 2ae_2 + e_3 \end{cases}$$

Ce qui donne : $M_a = M(f_a / B, B) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $M_a \times M_b = M_{a+b}$

$$M_a \times M_b = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a+b & 2ab + b^2 + a^2 \\ 0 & 1 & 2a + 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b & (a+b)^2 \\ 0 & 1 & 2 \cdot (a+b) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= M_{a+b}$$

3) la matrice M_a est inversible :

$\forall a,b \in R$, on a : $M_a \times M_b = M_{a+b}$

Donc $\forall a \in R$, on a : $M_a \times M_{-a} = M_{a-a} = M_0$

Or $M_0 = I_3$, donc $\forall a \in R$, $\exists M_{-a}$ tel que :

$$M_a \times M_{-a} = M_{-a} \times M_a = I_3$$

La matrice M_a est alors inversible et $(M_a)^{-1} = M_{-a}$

Solution de L'exercice 06:

PARTIE I :

$$f(x,y,z) = (x - y - z, -x + y - z, -x - y + z)$$

$$g(x,y,z) = (2x - z, 2y - z)$$

1) Calcul de $g \circ f$ et $M(g \circ f / B_1, B_2)$ par un calcul direct

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g \circ f(x,y,z) = g[f(x,y,z)]$$

$$(g \circ f)(x,y,z) = g(x - y - z, -x + y - z, -x - y + z)$$

$$= g(2(x-y-z) - (-x-y+z), 2(-x+y-z) - (-x-y+z))$$

Donc

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$
$$(g \circ f)(x,y,z) = (3x - y - 3z, -x + 3y - 3z)$$

$$M(g \circ f / B_1, B_2)$$

$B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ $\qquad B_2 = \{u_1, u_2\}$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (g \circ f)(e_1) = (g \circ f)(1,0,0) = (3,-1) = 3u_1 - u_2 \\ (g \circ f)(e_2) = (g \circ f)(0,1,0) = (-1,3) = -u_1 + u_2 \\ (g \circ f)(e_3) = (g \circ f)(0,0,1) = (-3,-3) = -3u_1 - 3u_2 \end{cases}$$

$$M(g \circ f / B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

2) $M\left(f/\ B_1, B_1\right)$ et $M\left(g/\ B_1, B_2\right)$

$$\begin{cases} f(e_1) = f(1,0,0) = (1,-1,-1) = e_1 - e_2 - e_3 \\ f(e_2) = f(0,1,0) = (-1,1,-1) = -e_1 + e_2 - e_3 \\ f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,-1,1) = -e_1 - e_2 + e_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(f/\ B_1, B_1\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases} g(e_1) = g(1,0,0) = (2,0) = 2u_1 + 0 \cdot u_2 \\ g(e_2) = g(0,1,0) = (0,2) = 0 \cdot u_2 + 2u_2 \\ g(e_3) = g(0,0,1) = (-1,-1) = -u_1 - u_2 \end{cases}$$

$$M\left(g/\ B_1, B_2\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3)

$M\left(g \circ f/\ B_1, B_2\right) = M\left(g/\ B_1, B_2\right) \times M\left(f/\ B_1, B_1\right)$?

$M\left(g/\ B_1, B_2\right) \times M\left(f/\ B_1, B_1\right) =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = M\left(g \circ f/\ B_1, B_2\right)$$

***PARTIE* II :**

On considère $B'_1 = \left\{ u'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

a) B'_1 forme une base de $R^3 \Leftrightarrow B'_1$ famille génératrice **<u>ou</u>** B'_1 famille libre (car on connait : $dim(R^3) = 3$)

- B' famille génératrice $\Leftrightarrow \forall\, v = (x, y, z) \in R^3$; $v = \lambda_1 u'_1 + \lambda_2 u'_1 + \lambda_3 u'_1$ tels que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ y = \lambda_2 + \lambda_3 \\ z = \lambda_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - (\lambda_2 + \lambda_3) \\ \lambda_2 = y - z \\ \lambda_3 = z \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - y \\ \lambda_2 = y - z \\ \lambda_3 = z \end{cases}$; d'où B'_1 est une famille génératrice

Alors B'_1 est une base de R^3.

<u>Ou bien</u> :

- B' famille libre $\Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma \in R$;

$\alpha, u'_1 + \beta\, u'_1 +, \gamma\, u'_1 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \beta = \gamma = 0$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ d'où B'_1 est une famille libre, alors B'_1 est une base de R^3.

b) Matrice de Passage de B_1 à B'_1 :

$P_{B_1, B'_1} = ?$

Il suffit d'écrire les vecteurs de la base B'_1 en fonction de la base B_1, alors :

$$\begin{cases} u'_1 = (1, 0, 0) = e_1 \\ u'_2 = (1, 1, 0) = e_1 + e_2 \\ u'_3 = (1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

Donc :

$$P_{B_1, B'_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Matrice de Passage de B'_1 à B_1 :

$P_{B'_1, B_1} = ?$

Il suffit d'écrire les vecteurs de la base B_1 en fonction de la base B'_1, alors :

$$\begin{cases} u'_1 = (1, 0, 0) = e_1 \\ u'_2 = (1, 1, 0) = e_1 + e_2 \\ u'_3 = (1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = (1, 0, 0) = u'_1 \\ e_2 = (0, 1, 0) = -u'_1 + u'_2 \\ e_3 = (0, 0, 1) = -u'_2 + u'_3 \end{cases}$$

Donc :

$$P_{B'_1, B_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Remarque</u> : On peut calculer $P_{B'_1, B_1}$ à partir de l'inverse de P_{B_1, B'_1} car : $P_{B'_1, B_1} = \left(P_{B_1, B'_1}\right)^{-1}$

d) Les composantes du vecteur $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans B'_1 :

$X_{(B_1)} = xe_1 + ye_2 + ze_3$

$X_{(B'_1)} = x'u'_1 + y'u'_2 + z'u'_3$

On sait que :

$X_{(B_1)} = P_{B_1, B'_1} \cdot X_{(B'_1)}$ et $X_{(B'_1)} = P_{B'_1, B_1} \cdot X_{(B_1)}$

Ce qui donne alors :

$$X_{(B'_1)} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e) $M(f/\, B'_1, B'_1) = ?$

Changement de base :

$M(f/\, B'_1, B'_1) = P_{B'_1, B_1} \times M(f/\, B_1, B_1) \times P_{B_1, B'_1}$

$M(f/\, B'_1, B'_1) = P^{-1} \times M(f/\, B_1, B_1) \times P$

Alors :

$$M(f/\, B'_1, B'_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$M(f/\, B'_1, B'_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

f) Image du vecteur $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans B'_1 par deux méthodes :

<u>1^ère^ méthode</u> :

$Y_{(B'_1)} = P_{B'_1, B_1} \cdot Y_{(B_1)}$ et $Y_{(B_1)} = M(f/\, B_1, B_1) \cdot X_{(B_1)}$

$$Y_{(B_1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_{(B'_1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>2^ème^ méthode</u> :

$Y_{(B'_1)} = M(f/\, B'_1, B'_1) \cdot X_{(B'_1)}$

Avec $X_{(B'_1)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Y_{(B'_1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_{(B'_1)} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

g) f est elle bijective ?

Les matrices associées à l'application f sont :

$$M(f/\, B_1, B_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(f/\, B'_1, B'_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors : f est bijective <u>***car***</u>

$det(M(f/\, B'_1, B'_1)) = M(f/\, B'_1, B'_1) = -4 \neq 0$.
