SERIE DE TD N°03

Solution de L'exercice 01:

Sur $\mathrm{E}=[0,\ 1]$,

$$\forall\ (x,y)\ \in \mathrm{E}^2;\ \ x*y=(x-1)(1-y)+1$$

1) $(*)$ est interne dans $\mathrm{E} \Leftrightarrow \forall\ x,y\ \in \mathrm{E} \Rightarrow x*y \in \mathrm{E}$

$$x \in \mathrm{E} \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$$
$$y \in \mathrm{E} \Leftrightarrow 0 \le y \le 1$$

Alors :

$$x \in \mathrm{E} \Leftrightarrow -1 \le x-1 \le 0 \quad \ldots(\mathrm{I})$$
$$y \in \mathrm{E} \Leftrightarrow 0 \le 1-y \le 1 \quad \text{car} \quad -1 \le y-1 \le 0$$

On multiplie la double inégalité (I) par $(y-1)$:

$$-1\cdot(1-y) \le (x-1)(1-y) \le 0$$
$$\Leftrightarrow y-1 \le (x-1)(1-y) \le 0$$
$$\Leftrightarrow -1 \le y-1 \le (x-1)(1-y) \le 0$$
$$\Leftrightarrow -1 \le (x-1)(1-y) \le 0$$
$$\Leftrightarrow 0 \le (x-1)(1-y)+1 \le 1$$
$$\Leftrightarrow 0 \le x*y \le 1$$

Par conséquent $x*y \in \mathrm{E}$

Donc $(*)$ est une loi interne dans E

- Commutativité de $(*)$:

$(*)$ est commutative $\Leftrightarrow \forall\ x,y\ \in \mathrm{E},\ x*y=y*x$

Alors :

$$x*y=(x-1)(1-y)+1=(1-y)(x-1)+1$$
$$=(y-1)(1-x)+1=y*x$$

Donc $(*)$ est une loi commutative

- Associativité de $(*)$:

$(*)$ est associative $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in \mathrm{E},\ (x*y)*z=x*(y*z)$

Alors :

$$(x*y)*z=[(x*y)-1](1-z)+1=([(x-1)(1-y)+1]-1)(1-z)+1$$
$$=(x+y-xy-1)(1-z)+1$$
$$=x+y+z-xy-xy-xy+xyz$$

$$x*(y*z)=(x-1)*[1-(y*z)]+1=(x-1)*(1-[(y-1)(1-z)+1])+1$$
$$=(x-1)*(1-[y+z-yz])+1$$
$$=x+y+z-xy-xy-xy+xyz$$

Donc $(*)$ est une loi associative

2) Elément neutre :

e est l'élément neutre pour $(*) \Leftrightarrow$

$$\forall\ x \in \mathrm{E},\ x*e=e*x=x$$

Alors : $x*e=(x-1)(1-e)+1=x+e-xe=x$

$\Rightarrow\ e(1-x)=0 \Rightarrow\ e=0$

Donc $e=0$ est l'élément neutre pour la loi $(*)$ dans E

3) Elément symétrique :

$\forall\ x \in \mathrm{E}$, x' est le symétrique de x pour $(*)$ dans E

$\Leftrightarrow x*x'=x'*x=e$

Alors : $x*x'=(x-1)(1-x')+1=x+x'-xx'=e=0$

$\Rightarrow x+x'-xx'=0$

$\Rightarrow x'(1-x)=-x$

$\Rightarrow x'=\dfrac{-x}{(1-x)} \le 0 \qquad \forall x \in [0,\ \ 1[$

Donc seul 0 est symétrisable dans E pour la loi $(*)$

Solution de L'exercice 02:

$(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3)$ famille libre

$\Leftrightarrow \forall\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R},\ \ \alpha V_1+\beta V_2+\gamma V_3=0 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$

i) Démontrons que $\mathrm{V}_1-\mathrm{V}_2, \mathrm{V}_2-\mathrm{V}_3$ et $\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_3$ sont linéairement indépendants :

$$\forall c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R},\ \ c_1(V_1-V_2)+c_2(V_2-V_3)+c_3(V_1+V_3)=0$$
$$\Rightarrow c_1=c_2=c_3=0\ ?$$

Alors : $c_1(V_1-V_2)+c_2(V_2-V_3)+c_3(V_1+V_3)=0$

$\Rightarrow (c_1+c_3)\cdot V_1+\ (c_2-c_1)\cdot V_2+\ (c_3-c_2)\cdot V_3=0$

Par conséquent :

$$\begin{cases} c_1+c_3=0 \\ c_2-c_1=0 \\ c_3-c_2=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow c_1=c_2=c_3=0$$

Donc $\mathrm{V}_1-\mathrm{V}_2, \mathrm{V}_2-\mathrm{V}_3$ et $\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_3$ sont linéairement indépendants *ii*) Montrons que $a_1(1,\ 1,\ 1)$, $a_2(1,\ 2,\ 3)$ et $a_3(2,\ -1,\ 1)$ engendrent $\mathbb{R}^3$

Alors : il s'agit de montrer que $\forall\ (x,\ y,\ z\ )\in\mathbb{R}^3$

$(x,y,z)=\lambda_1\cdot a_1+\lambda_2\cdot a_2+\lambda_3\cdot a_3$ tels que $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$

$(x,y,z)=\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,2,3)+\lambda_3(2,-1,1)$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+2\cdot\lambda_3=x\\ \lambda_1+2\cdot\lambda_2-2\cdot\lambda_3=y\\ \lambda_1+3\cdot\lambda_2+\lambda_3=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+2\cdot\lambda_3=x\\ \quad-\lambda_2+3\cdot\lambda_3=x-y\ \ldots\times(-2)\\ \quad-2\cdot\lambda_2+\lambda_3=x-z\end{cases}$$

ou $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+2\cdot\lambda_3=x\\ \quad-\lambda_2+3\cdot\lambda_3=x-y\\ \qquad-5\cdot\lambda_3=-x+2\cdot y-z\end{cases}$

on trouve $\lambda_3=\frac{1}{5}(x-2\cdot y+z)$, $\lambda_2=\frac{1}{5}(-2\cdot x-y+3\cdot z)$

$\lambda_1=x+y-z$

Donc (a_1, a_2, a_3) est génaratrice de $\mathbb{R}^3$, en plus elle est libre (nombre de vecteurs = dim($\mathbb{R}^3$)=3)alors c'est une base pour $\mathbb{R}^3$.

- Composantes du vecteur $\mathrm{U}_{(e_1,e_2,e_3)}(1,\ 1,\ 1)$

$$\lambda_1=1+1-1,\qquad \lambda_2=\frac{1}{5}(-2\cdot1-1+3\cdot1)$$

$$\lambda_3=\frac{1}{5}(1-2\cdot1+1)$$

$\mathrm{U}_{(a_1,a_2,a_3)}(1,\ 0,\ 0)$

3) Le vecteur X(1 ,-2 ,m) est une combinaison linéaire des deux vecteurs $b_1(1,\ 1,\ 1)$, $b_2(1,\ 2,\ 3)$ s'il existe des scalaires $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{X}=\alpha\cdot b_1+\beta\cdot b_2$$

On a alors $(1,-2,\ \mathrm{m})=\alpha\cdot(1,\ 1,\ 1)+\beta\cdot(1,\ 2,\ 3)$

$$=(\alpha+\beta,\ \alpha+2\beta,\ \alpha+3\beta)$$

Et on obtient le système suivant :

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha+2\beta=-2\\ \alpha+3\beta=\mathrm{m}\end{cases}\qquad\Rightarrow \mathrm{m}=-5$$

<u>Solution de L'exercice 03</u>:

1) Montrons que $F=\{(x,0,\ z\ )\in\mathbb{R}^3\ /\ x\le0,\ \ z\in\mathbb{R}\}$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

- $0_{\mathbb{R}^3}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in F$

$\forall X\in F,\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}\qquad \lambda\cdot X\in F$?

Soit $X=\begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}\in F$, $\exists\,\lambda=-1\in\mathbb{R}$, tel que

$$\lambda\cdot X=-1\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-6\end{pmatrix}\notin F$$

Alors : F est instable pour la loi externe (.)

D'où F n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

2) Montrons que $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ y=2z\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

- $0_{\mathbb{R}^3}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in G\quad$ car $\quad 0=2\times0$

- $\forall X\ (x,y,z),Y\ (x',y',z')\in G$

$\forall\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}\qquad \alpha\cdot X+\beta\cdot Y\in G$?

$\alpha\cdot X+\beta\cdot Y=\alpha\cdot(x,\ y,\ z)+\beta\cdot(x',\ y',\ z')$

$\quad=(\alpha x+\beta x',\ \alpha y+\beta y',\ \alpha z+\beta z')$

Comme $\alpha y+\beta y'=\alpha(2z)+\beta(2z')$

$\quad=2(\alpha z+\beta z')$, alors $\alpha\cdot X+\beta\cdot Y\in G$

Donc G est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

3) Trouvons une partie génaratrice de G

$\forall X\ (x,y,z)\in G\quad\Rightarrow\quad(y=2z)$

$(x,y,z)=(x,\ 2z,\ z)=x\ (1,\ 0,\ 0)+z\ (0,\ 2,\ 1)$

$$G=\mathrm{vect}\{(1,\ 0,\ 0),(0,\ 2,\ 1)\}$$

$u_1(1,\ 0,\ 0)$, $u_2(0,\ 2,\ 1)$ engendrent G

4) Base de G et précision de sa dimension

$B=\{u_1(1,\ 0,\ 0),\ \ u_2(0,\ 2,\ 1)\}$ est une partie génératrice de G

$B=\{u_1,\ \ u_2\}$ est elle libre ?

$\{u_1,\ u_2\}$ est libre $\Leftrightarrow\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha\cdot u_1+\beta\cdot u_2=0\Rightarrow\alpha=\beta=0$

$\alpha\cdot u_1+\beta\cdot u_2=0\Rightarrow\alpha\cdot(1,0,0)+\beta\cdot(0,2,1)=(0,0,0)$

Par conséquent :

$$\begin{cases}\alpha = 0 \\ 2\beta = 0 \\ \beta = 0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

Alors la famille $B = \{u_1,\ u_2\}$ est libre

Donc $B = \{u_1,\ u_2\}$ est une base de G et dim(G) = 2

5) Dimension de H

Comme H est le supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3 = G \oplus H$ et $G \cap H = \{0\}$;

dim($\mathbb{R}^3$) = dim(G) + dim(H) = 3

Alors : dim(H) = dim($\mathbb{R}^3$) $-$ dim(G)

= 3 $-$ 2 = 1

D'où dim(H) = 1

6) Le vecteur $\mathrm{V}(1,\ 2,\ 1)$ appartient à G

On sait que : $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = 2z\}$

$\mathrm{V}(1,\ 2,\ 1) \in G$ <u>car</u> $2 = 2 \times 1$

<u>Solution de L'exercice 04</u>:

I)

1) Montrons que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = z\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

- $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in F$ car $0 = 0$

- $\forall X\ (x, y, z), Y\ (x', y', z') \in F$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \alpha \cdot X + \beta \cdot Y \in F$?

$$\alpha \cdot X + \beta \cdot Y = \alpha \cdot (x, y, z) + \beta \cdot (x', y', z')$$
$$= (\alpha x + \beta x',\ \alpha y + \beta y',\ \alpha z + \beta z')$$

Comme $\alpha x + \beta x' = \alpha z + \beta z'$, alors :

$$\alpha \cdot X + \beta \cdot Y \in F$$

Donc F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

- Trouvons une base de F :

<u>Partie génaratrice de</u> F :

$\forall X\ (x, y, z) \in F \ \Rightarrow \ (x = z)$

$(x, y, z) = (x, y, x) = x\,(1,\ 0,\ 1) + y\,(0,\ 1,\ 0)$

$$G = \mathrm{vect}\{(1,\ 0,\ 1), (0,\ 1,\ 0)\}$$

$v_1(1,\ 0,\ 0),\ v_2(0,\ 2,\ 1)$ engendrent F

<u>Famille libre de</u> F :

$B = \{v_1,\ v_2\}$ est elle libre ?

$\{v_1,\ v_2\}$ est libre $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

$\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 = 0 \Rightarrow \alpha \cdot (1,\ 0,\ 1) + \beta \cdot (0,\ 1,\ 0) = (0,\ 0,\ 0)$

Par conséquent :

$$\begin{cases}\alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

Alors la famille $B = \{v_1,\ v_2\}$ est libre

Donc $B = \{v_1,\ v_2\}$ est une base de F et dim(F) = 2

2) Montrons que $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y + z = 0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

- $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in G$ car $0 + 2 \times 0 + 0 = 0$

- $\forall X\ (x, y, z), Y\ (x', y', z') \in G$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \alpha \cdot X + \beta \cdot Y \in G$?

$$\alpha \cdot X + \beta \cdot Y = \alpha \cdot (x, y, z) + \beta \cdot (x', y', z')$$
$$= (\alpha x + \beta x',\ \alpha y + \beta y',\ \alpha z + \beta z')$$

Comme $(\alpha x + \beta x') + 2 \cdot (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z') =$

$= (\alpha x + 2 \cdot \alpha y + \alpha z) + (\beta x' + 2 \cdot \beta y' + \beta z')$

$= \alpha\,(x + 2 \cdot y + z) + \beta\,(x' + 2 \cdot y' + z')$

$= \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$, alors $\alpha \cdot X + \beta \cdot Y \in G$

Donc G est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

3) Déterminons $F \cap G$:

$$F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x = z) \wedge (x + 2y + z = 0)\}$$

$$\begin{cases}x = z \\ x + 2y + z = 0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = -y = z$$

Alors : $F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = -y = z\}$

Remarque : $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} \ \Rightarrow \ F + G$ n'est pas une somme directe de $\mathbb{R}^3$.

II)

1) Montrons que $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = z = 0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

- $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in K$ car $0=0=0$

- $\forall X\,(x\,,\,y\,,\,z\,),Y\,(x',\,y',\,z')\in K$

$\forall \alpha,\,\beta \in \mathbb{R}$ $\qquad \alpha \cdot X + \beta \cdot Y \in K$?

$\alpha \cdot X + \beta \cdot Y = \alpha \cdot (x\,,\,y\,,\,z\,) + \beta \cdot (x',\,y',\,z')$

$= (\alpha x + \beta x',\ \alpha y + \beta y',\ \alpha z + \beta z')$

Comme $\alpha x + \beta x' = \alpha z + \beta z' = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$, alors :

$$\alpha \cdot X + \beta \cdot Y \in K$$

Donc K est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

2) Déterminons L :

$L = \mathrm{vect}\{(1,\ 2,\ 1),(0,\ 1,\ 2)\}$;

$L = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / X\,(x\,,y\,,z\,) = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 \ ;\ \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

Alors : $(x\,,y\,,z\,) = \lambda_1 \cdot (1,\ 2,\ 1) + \lambda_2 \cdot (0,\ 1,\ 2)$

$$\begin{cases} x = \lambda_1 \\ y = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ z = \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x \\ \lambda_2 = y - 2x \\ z = \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow z = x + 2(y - 2x)$$

$$\Rightarrow 3x - 2y + z = 0$$

Donc $L = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 3x - 2y + z = 0\}$

- Déterminons $L \cap K$:

$L \cap K = \{(x\,,y\,,z\,)\in\mathbb{R}^3 / (3x - 2y + z = 0) \wedge (x = z = 0)\}$

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ \\ x = z = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad x = y = z = 0$$

Alors : $L \cap K = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Donc : $L \oplus K = \mathbb{R}^3$

- Le vecteur $w\,(1,\ 1,\ \text{-}1)$ appartient à L

On sait que : $L = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 3x - 2y + z = 0\}$

$w\,(1,\ 1,\ \text{-}1) \in L$ <u>car</u> $3\times1 - 2\times1 - 1 = 0$

3) $H = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / X\,(x\,,y\,,z\,) = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3$;
$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}\}$

$v_1(1,\ 2,\ 1)$, $v_2(0,\ 1,\ 2)$ et $v_3(2,\ 5,\ 4)$

On remarque que : $v_3 = 2\cdot v_1 + v_2$

Alors : $X\,(x\,,\,y\,,\,z\,) = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot (2\cdot v_1 + v_2)$

$= (\lambda_1 + 2\lambda_3)\cdot v_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)\cdot v_2$

$= c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2$

Par conséquent : $H = L$

Et comme $L \oplus K = \mathbb{R}^3$

Alors le supplémentaire de H est aussi K

Le supplémentaire n'est pas unique car un sous espace vectoriel admet une infintité de bases.