SERIE DE TD N°02

Solution de L'exercice 01:

Rappel :

Im. Directe Im. Réciproque

$$f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$$

$$\mathrm{D} \subset \mathrm{E} \qquad x \longrightarrow y = f(x) \qquad \mathrm{R} \subset \mathrm{F}$$

$f(\mathrm{D}) = \{ f(x) / x \in \mathrm{D} \}$ ⋮ $f^{-1}(\mathrm{R}) = \{ x \in \mathrm{E} / f(x) \in \mathrm{R} \}$

$y \in \mathrm{D}, \exists x \in f(\mathrm{D}) / y = f(x)$ ⋮ $x \in f^{-1}(\mathrm{R}) \Leftrightarrow f(x) \in \mathrm{R}$

Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$

$$x \longrightarrow 2x^2 - 1$$

$A = [-1, \ 3]$

1) L'image directe de A par f :

$$f(A) = \{ f(x) / x \in A \}$$
$$= \{ f(x) / x \in [-1, \ 3] \}$$
$$= [-1, \ 17]$$

2) L'image réciproque de A par f :

$$f^{-1}(A) = \{ x \in \mathbb{R} / f(x) \in A \}$$
$$= \{ x \in \mathbb{R} / (2x^2 - 1) \in [-1, \ 3] \}$$
$$= [-\sqrt{2}, \ \sqrt{2}]$$

Solution de L'exercice 02:

Soient $A \subset \mathrm{E}$ et $B, B' \subset \mathrm{F}$

1) Montrons que : $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

Soit $y \in f(A \cap f^{-1}(B)) \Leftrightarrow \exists x \in A \cap f^{-1}(B) / y = f(x)$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in A \wedge x \in f^{-1}(B)) / y = f(x)$$
$$\Leftrightarrow (\exists x \in A \wedge f(x) \in B) / y = f(x)$$
$$\Leftrightarrow (\exists x \in A \wedge y = f(x)) \text{ et } (f(x) \in B \wedge y = f(x))$$
$$\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ et } y \in B$$
$$\Leftrightarrow y \in f(A) \cap B$$

2) Comparaison entre $f^{-1}(B \Delta B')$ et $f^{-1}(B) \Delta f^{-1}(B')$

Soit $x \in f^{-1}(B \Delta B') \Leftrightarrow f(x) \in B \Delta B'$

$$\Leftrightarrow f(x) \in (B \setminus B') \cup (B' \setminus B)$$
$$\Leftrightarrow (f(x) \in B \wedge f(x) \in B') \vee (f(x) \in B' \wedge f(x) \in B)$$
$$\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B) \wedge x \in f^{-1}(B')) \vee (x \in f^{-1}(B') \wedge x \in f^{-1}(B))$$
$$\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B')) \vee (x \in f^{-1}(B') \setminus f^{-1}(B))$$
$$\Leftrightarrow x \in (f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B')) \cup (f^{-1}(B') \setminus f^{-1}(B))$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \Delta f^{-1}(B')$$

D'où $f^{-1}(B \Delta B') = f^{-1}(B) \Delta f^{-1}(B')$

Solution de L'exercice 03:

I. On a $f(x) = -x^3 - 3x + 2$

1) Calcul de :

$f(0) = 2$; $f(1) = -2$; $f(-1) = 6$

2) f est une fonction continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc f est bijective.

3) Comme f est bijective, alors :

$$f^{-1}(-2) = \{1\}$$
$$f^{-1}([\ 2, \ +\infty[) =]-\infty, \ 0]$$

II. on donne la fonction :

$$f :]1, \ +\infty[\longrightarrow]0, \ +\infty[$$
$$x \longrightarrow y = f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Montrons que f est bijective :

f est bijective $\Leftrightarrow$ f est injective $\wedge$ f est surjective

* Injectivité de f :

$\forall x_1, x_2 \in]1, \ +\infty[$;

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{x_2 - 1}$$
$$\Leftrightarrow x_2 - 1 = x_1 - 1$$
$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ; } f \text{ est injective}$$

* Surjectivité de f :

$\forall y \in]0, \ +\infty[, \ \exists x \in]1, \ +\infty[; \ y = f(x)$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow xy - y = 1$$
$$\Rightarrow xy = 1 + y$$
$$\Rightarrow x = \frac{1+y}{y} \in]1, \ +\infty[$$; f est surjective

Conclusion f est bijective.

Solution de L'exercice 04:

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective

* On donne :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}}$$

1) Montrons que g est injective :

g est injective $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow \frac{f_1(x)}{\sqrt{1 + f_1^2(x)}} = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1 + f_2^2(x)}}$$

Rq : $f_1(x)$, $f_1(x)$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{f_1^2(x)}{1+f_1^2(x)}=\dfrac{f_2^2(x)}{1+f_2^2(x)}$

ont le même signe $\Leftrightarrow$ $f_1^2(x)=f_2^2(x)$

$\Rightarrow$ $f_1(x)=f_2(x)$; par injectivité de f

$\Rightarrow$ $x_1=x_2$

Donc g est injective

2) Montrons que g n'est pas surjective :

g est surjective $\Leftrightarrow \forall y\in\mathbb{R},\ \exists x\in\mathbb{R};\ \ y=g(x)$

g est non surjective $\Leftrightarrow \exists y\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R};\ \ y\neq g(x)$

<u>Par raisonnement par l'absurde :</u>

g est surjective $\Leftrightarrow \forall y\in\mathbb{R},\ \exists x\in\mathbb{R};\ \ y=g(x)$

$$y=g(x)\Leftrightarrow y=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\Leftrightarrow\ y^2=\frac{f^2(x)}{1+f^2(x)}$$

$$\Leftrightarrow\ y^2\left(1+f^2(x)\right)=f^2(x)$$

$$\Leftrightarrow\ y^2+y^2f^2(x)=f^2(x)$$

$$\Leftrightarrow\ y^2=f^2(x)\left[1-y^2\right]$$

Pour $y=\pm1$; on trouve contradiction $(1\neq0)$. Alors : g n'est pas surjective.

Solution de L'exercice 05:

1) Détermination des limites :

a) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}\right)=\dfrac{0}{0}$ Forme indéterminée

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x-\left(1+x^2\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}(1-x)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\dfrac{0}{0}$ Forme indéterminée

$$\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-1)}=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x-1}=\frac{2+2}{2-1}=4$$

Par la règle d'Hopital, on a:

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{h'(x)}$$

Pour lever la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$

On trouve aussi :

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{\left(x^2-4\right)'}{\left(x^2-3x+2\right)'}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2x}{2x-3}=\frac{2\times2}{2\times2-3}=\frac{4}{4-3}=4$$

2) Démontrons par la définition de la limite :

$=\lim\limits_{x\to2}(3x+1)=7$

D'une manière générale, on a:

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0;\ \ |x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$

Alors :

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0;\ \ |x-2|<\alpha\Rightarrow|f(x)-7|<\varepsilon$

$|f(x)-7|<\varepsilon\Leftrightarrow|(3x+1)-7|<\varepsilon\Leftrightarrow|3x-6|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow|3(x-2)|<\varepsilon\Leftrightarrow3|x-2|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{3}$

Donc

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0;\ \ |x-2|<\alpha\Rightarrow|f(x)-7|<\varepsilon$

Tel que $\alpha=\dfrac{\varepsilon}{3}$

Solution de L'exercice 06:

1) Par construction $D_f=\mathbb{R}$

- Continuité de f sur $\mathbb{R}$:

f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car elle est composée de deux fonctions continues à gauche et à droite du 0.

Il suffit donc d'étudier la continuité au point $x_0=0$

On constate d'une part que $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}(1-\sin x)=-1=f(0)$

et d'autre part :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2-(1+x)}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{1+2\sqrt{x}+x-(1+x)}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)}\right)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{2\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{2}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\right)=1$$

Alors : $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=f(0)\neq\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$

Donc : f n'est pas continue en 0.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, elle n'est pas dérivable en 0 car elle n'est pas continue en ce même point. De plus :

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+x}} & \forall x\in\mathbb{R}_+^*\\ \cos x & \forall x\in\mathbb{R}_-^*\end{cases}$$

3) $g(x)=0$ admet une racine réelle :

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et satisfait à :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty;\quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

On en déduit qu'il existe deux réels α et β tels que $\alpha < 0 < \beta$ et $g(\alpha) < 0 < g(\beta)$. Par conséquent (théorème des valeurs intermédiaires),

g admet une racine appartenant à l'intervalle $]\alpha,\ \beta[$

Solution de L'exercice 07:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y = x\cdot arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

1) Les fonctions élémentaires $x \longrightarrow arctan(x)$ et $x \longrightarrow arg\,sh(x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$ ($\frac{1}{x}$ n'est pas définie en 0)

2) Prolongement de f par continuité en 0

f est Prolongeable par continuité en 0 $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x) = \lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x) = \ell$$

On sait que :

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} arctan\left(\frac{1}{x}\right) = ?$$

Par changement de variable :

$t = \frac{1}{x}$; alors : $x \xrightarrow{<} 0 \Leftrightarrow t \longrightarrow \mp\infty$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\longrightarrow-\infty} arctan(t) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\longrightarrow+\infty} arctan(t) = +\frac{\pi}{2}$$

De plus :

$$\lim_{x\xrightarrow[>]{<}0} arg\,sh(x) = 0$$

Par Conséquent :

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} \left[x\cdot arctan\left(\frac{1}{x}\right) - arg\,sh(x)\right] = 0\times\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 0 = 0$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} \left[x\cdot arctan\left(\frac{1}{x}\right) - arg\,sh(x)\right] = 0\times\left(+\frac{\pi}{2}\right) - 0 = 0$$

Donc :

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x) = \lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x) = 0$$

On conclut que f est Prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est défini par :

$$g = \begin{cases} x\cdot arctan\left(\frac{1}{x}\right) - arg\,sh(x) & x\in\mathbb{R}^* \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

3) Calcul de $g'(x)$:

$$g'(x) = arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

De plus, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, il reste à étudier sa dérivabilité en 0:

g est dérivable en 0 $\Leftrightarrow \lim_{x\xrightarrow{<}0} g'(x) = \lim_{x\xrightarrow{>}0} g'(x)$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} g'(x) = \lim_{x\xrightarrow{<}0} \left[arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right] = -\frac{\pi}{2} - 1$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} g'(x) = \lim_{x\xrightarrow{>}0} \left[arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right] = \frac{\pi}{2} - 1$$

Alors : $\lim_{x\xrightarrow{<}0} g'(x) \neq \lim_{x\xrightarrow{>}0} g'(x)$

Donc g n'est pas dérivable en 0, elle reste dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Solution de L'exercice 08:

1) $arcsin\,x = arcsin\frac{4}{5} + arcsin\frac{5}{13}$

$$\Rightarrow sin(arcsin\,x) = sin\left(arcsin\frac{4}{5} + arcsin\frac{5}{13}\right)$$

$$\Rightarrow x = sin\left(arcsin\frac{4}{5}\right)\cdot cos\left(arcsin\frac{5}{13}\right) + sin\left(arcsin\frac{5}{13}\right)\cdot cos\left(arcsin\frac{4}{5}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{5}\times\sqrt{1 - sin^2\left(arcsin\frac{5}{13}\right)} + \frac{5}{13}\times\sqrt{1 - sin^2\left(arcsin\frac{4}{5}\right)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{5}\times\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} + \frac{5}{13}\times\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{5}\times\frac{12}{13} + \frac{\cancel{5}}{13}\times\frac{3}{\cancel{5}} = \frac{48}{65} + \frac{3}{13} = \frac{63}{65} \in [-1,\ 1]$$

2) $5\,ch(x) - 4\,sh(x) = 3$

$$\Rightarrow 5\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - 4\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = 3$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}e^x + \frac{5}{2}e^{-x} - 2e^x + 2e^{-x} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^x + \frac{9}{2}e^{-x} = 3 \Rightarrow e^x + 9e^{-x} = 6$$

$$\Rightarrow e^{2x} + 9 = 6e^x \quad\Rightarrow\quad e^{2x} - 6e^x + 9 = 0 \quad \ldots(*)$$

Posons $t = e^x$;

$(*)$ devient : $t^2 - 6t + 9 = 0$

$\Delta' = b'^2 - a\times c = (-3)^2 - 1\times 9 = 9 - 9 = 0$

$t = \frac{-b'}{a} = \frac{-(-3)}{1} = 3$

$t = 3 \Rightarrow x = ln(3)$

3) $argth(x) = argch\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\Rightarrow th(argth(x)) = th\left(argch\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{sh\left(argch\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{ch\left(argch\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{sh\left(argch\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{ch^2\left(argch\left(\frac{1}{x}\right)\right)-1}}{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}}{\frac{1}{x}}=x\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}$$

$$\Rightarrow 1=\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}\Rightarrow\left(\frac{1}{x}\right)^2-1=1$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{x^2}=2\ \Rightarrow\ x^2=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$
