SERIE DE TD N°01

Solution de L'exercice 01:

1) $\ln(e)=1$ et $e\in\mathbb{Q}$: est une assertion **fausse** car e n'est pas un rationnel : $\left[(V\wedge F)\Leftrightarrow V\right]$

2) $\cos(\pi)=1$ ou $\sin(\pi)=0$: est une assertion **vraie** car $\sin(\pi)=0$, malgré $\cos(\pi)=-1$: $\left[(F\vee V)\Leftrightarrow V\right]$

3) $x, y\in\mathbb{R}$, $x<y$ alors $x^2<y^2$: est une assertion **fausse** : $\left[(\mathrm{V}\Rightarrow \mathrm{F})\Leftrightarrow \mathrm{F}\right]$

4) $x, y\in\mathbb{R}$, $x<y<0 \Leftrightarrow \frac{1}{y}<\frac{1}{x}$: est une assertion **fausse** .

A noter que :

$$\left(x<y<0\Leftrightarrow\frac{1}{y}<\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow\left(x<y<0\Rightarrow\frac{1}{y}<\frac{1}{x}\right)\wedge\left(\frac{1}{y}<\frac{1}{x}\Rightarrow x<y<0\right)$$

La 2ème implication $\frac{1}{y}<\frac{1}{x}\Rightarrow x<y<0$ est fausse

5) la négation de $\left(|x|>1 \text{ ou } x\in\left[\frac{1}{2},\quad 3\right]\right)$: est $x\in\left[-1,\quad\frac{1}{2}\right]$: assertion **fausse** car la négation c'est l'assertion suivante : $x\in\left[-1,\quad\frac{1}{2}\right[$

6) la négation de $(x\neq 0 \text{ et } y\neq 0)$est $(x\cdot y=0)$: est une assertion **vraie** car elle s'exprime par$(x=0 \text{ ou } y=0)$

7) $\forall\, x\in\mathbb{R},\ x^2+1>1$: est une assertion **fausse** car $\exists\, 0\in\mathbb{R}$,tel que $0^2+1=1$

8) $\forall\, x,\ y\in\mathbb{R}^+,\ x+y>0$: est une assertion **vraie**

9) $\exists\, x\in\mathbb{R},\ |x|+1>0$: est une assertion **fausse**

Solution de L'exercice 02:

Complétons les propositions :

1) $\forall\, x\in\mathbb{R},\ x^2=4\Rightarrow x=2$

2) $\forall\, z\in\mathbb{C},\ z=\overline{z}\ \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

3) $\forall\, x\in\mathbb{R},\ x=\pi\Rightarrow e^{2ix}=1$

Solution de L'exercice 03:

$\forall\, x\in\mathbb{R},\ \exists\, y\in\mathbb{R},\ x\geq y\quad\ldots(1)$

$\exists\, y\in\mathbb{R},\ \forall\, x\in\mathbb{R},\ x\geq y\quad\ldots(2)$

$(1)\ \forall\, x\in\mathbb{R},\ \exists\, y\in\mathbb{R},\ x\geq y$ est une proposition **vraie** (on peut garantir pour tout réel x l'existence de $y\in\mathbb{R}$ tel que $x\geq y$, on peut prendre $y=x$).

$(2)\ \exists\, y\in\mathbb{R},\ \forall\, x\in\mathbb{R},\ x\geq y$ est une proposition **fausse** (c'est évident car $\mathbb{R}$ n'est pas minoré par un réel y).

Conclusion :

L'ordre des quantificateurs est important

Solution de L'exercice 04:

(Raisonnement direct) :

Prouvons l'implication : $a,\ b\ \in\mathbb{Q}\Rightarrow a+b\ \in\mathbb{Q}$

Posons : $a=\frac{p}{q},\ p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{Z}^*$, de même pour

$$b=\frac{p'}{q'},\ p'\in\mathbb{Z} \text{ et } q'\in\mathbb{Z}^*$$

Alors : $a+b=\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}=\frac{pq'+p'q}{qq'}\in\mathbb{Q}$

On constate que $\begin{cases} pq'+p'q\in\mathbb{Z} \\ qq'\in\mathbb{Z}^* \end{cases}$

Donc : $a+b\ \in\mathbb{Q}$

Solution de L'exercice 05:

(Raisonnement par disjonction des cas) :

Montrons que : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ |x-1|\ \leq\ x^2-x+1$

1er Cas : $x\ \geq\ 1$ alors $|x-1|=x-1$

Calculons $x^2-x+1-|x-1|=x^2-x+1-(x-1)$

$$=x^2-2x+2$$

$$=(x-1)^2+1\ \geq\ 0$$

Ainsi $x^2-x+1-|x-1|\ \geq\ 0$

Donc $x^2-x+1\ \geq\ |x-1|$

2 ème Cas : $x<1$ alors $|x-1|\ =\ -(x-1)$

Nous obtenons $x^2-x+1-|x-1|=x^2-x+1+(x-1)$

$$=x^2$$

$$=x^2\geq\ 0$$

Ainsi $x^2-x+1-|x-1|\ \geq\ 0$

Donc $x^2-x+1\ \geq\ |x-1|$

Finalement, des deux cas:

$\forall\, x\in\mathbb{R},\ |x-1|\ \leq\ x^2-x+1$

Solution de L'exercice 06:

(Raisonnement direct$\cdots\cdots\cdots\rightarrow$

$\leftarrow\cdots\cdots\cdots$Raisonnement par contraposée) :

Démontrons que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, n pair $\Leftrightarrow$ n^2 pair

$$\left(n \text{ pair } \Leftrightarrow n^2 \text{ pair}\right)$$

c.à.d : $\Leftrightarrow$

$$\left(n \text{ pair } \Rightarrow n^2 \text{ pair}\right) \wedge \left(n^2 \text{pair } \Rightarrow n \text{ pair}\right)$$

1) $\Rightarrow$) (Le raisonnement direct)

n pair $\Rightarrow$ $\exists\, k \in \mathbb{N}, n = 2k$

$$\Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2\left(2k^2\right) = 2k'$$

$$\Rightarrow n^2 \text{pair } \left(\text{car } k \in \mathbb{N} \Rightarrow k' \in \mathbb{N}\right)$$

2) $\Leftarrow$) (Le raisonnement par contraposée)

$$\left(p \Rightarrow q\right) \Leftrightarrow \left(\bar{q} \Rightarrow \bar{p}\right)$$

Alors :

$\left(n^2 \text{ pair } \Rightarrow n \text{ pair}\right) \Leftrightarrow \left(n \text{ impair } \Rightarrow n^2 \text{ impair}\right)$

Il suffit de démontrer que : n impair $\Leftrightarrow$ n^2 impair

n impair $\Rightarrow$ $\exists\, k \in \mathbb{N}, n = 2k+1$

$$\Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 2k'' + 1 \text{ , avec } k'' = 2k^2 + 2k$$

$$\Rightarrow n^2 \text{ impair } \left(\text{car } k \in \mathbb{N} \Rightarrow k'' \in \mathbb{N}\right)$$

Finalement, de 1 et 2 : n pair $\Leftrightarrow$ n^2 pair

Solution de L'exercice 07:

Montrons que : $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} \notin \mathbb{Q}$

(Raisonnement par l'absurde) :

On suppose que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} = \dfrac{p}{q}$ avec $p,\ q$ entiers naturels non nuls premiers entre eux.

On obtiendra alors : $q \cdot \ln(2) = p \cdot \ln(3)$

$$\Rightarrow \ln\left(2^q\right) = \ln\left(3^p\right)$$

$$\Rightarrow 2^q = 3^p \text{ (d'où une contradiction)}$$

Car 2^q est un entier pair et 3^p est un entier impair.

Solution de L'exercice 08:

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Etapes du raisonnement par récurrence :

1. Pour $n = 0$; la proposition est vraie car :

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} \Rightarrow 0 = 0$$

2. On suppose que l'égalité est vraie pour le cas n

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. On démontre l'égalité pour le cas $n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)\left[2(n+1)+1\right]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Alors : $\sum\limits_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$$= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + 1\right]$$

$$= (n+1)\left[\frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6}\right]$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Solution de L'exercice 09:

$A = \{x \in N, x > 10\}$; $B = \{x \in N, x \text{ pair}\}$

<u>Ensembles</u> :

$A = \{11, 12, 13, 14, 15, ...\}$

$B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{N}, x \in A \wedge x \in B\}$

$= \{x \in \mathbb{N}, x > 10 \wedge x \text{ pair}\}$

$= \{12, 14, 16, 18, ...\}$

$A \cup B = \{x \in \mathbb{N}, x \in A \vee x \in B\}$

$= \{x \in \mathbb{N}, x > 10 \vee x \text{ pair}\}$

$= \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, ...\}$

$C_{\mathbb{N}}^{A} = \{x \in \mathbb{N} \wedge x \notin A\} = \{x \in \mathbb{N},\ x \leq 10\}$

$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$C_{\mathbb{N}}^{B} = \{x \in \mathbb{N} \wedge x \notin B\} = \{x \in \mathbb{N},\ x \text{ impair}\}$

$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...\}$

$C_{\mathbb{N}}^{A} \cap C_{\mathbb{N}}^{B} = \{x \in \mathbb{N}, x \in C_{\mathbb{N}}^{A} \wedge x \in C_{\mathbb{N}}^{B}\}$

$$=\{x\in\mathbb{N},\ \ x\leq 10 \wedge x \text{ impair}\}$$

$$=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$$

$$C_{\mathbb{N}}^{A}\bigcup C_{\mathbb{N}}^{B}=\{x\in\mathbb{N}, x\in C_{\mathbb{N}}^{A}\vee\ x\in C_{\mathbb{N}}^{B}\}$$

$$=\{x\in\mathbb{N},\ \ x\leq 10 \vee x \text{ impair}\}$$

$$=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,15,\ldots\}$$

$$C_{\mathbb{N}}^{A\cap B}=\{x\in\mathbb{N}\wedge x\notin A\bigcap B\}$$

$$x\notin A\bigcap B\Leftrightarrow \overline{x\in A\bigcap B}\Leftrightarrow \overline{x\in A\wedge x\in B}$$

$$\Leftrightarrow \overline{x\in A}\vee\overline{x\in B}$$

$$\Leftrightarrow x\in C_{\mathbb{N}}^{A}\vee\ x\in C_{\mathbb{N}}^{B}$$

$$\Leftrightarrow x\in C_{\mathbb{N}}^{A}\cup C_{\mathbb{N}}^{B}$$

Alors: $C_{\mathbb{N}}^{A\cap B}=\{x\in\mathbb{N}, x\in C_{\mathbb{N}}^{A}\vee\ x\in C_{\mathbb{N}}^{B}\}$

$$=\{x\in\mathbb{N},\ \ x\leq 10 \vee x \text{ impair}\}$$

$$=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,15,\ldots\}$$

$$C_{\mathbb{N}}^{A\cup B}=\{x\in\mathbb{N}\wedge\ x\notin A\bigcup B\}$$

$$x\notin A\bigcup B\Leftrightarrow \overline{x\in A\bigcup B}\Leftrightarrow \overline{x\in A\vee x\in B}$$

$$\Leftrightarrow \overline{x\in A}\wedge\overline{x\in B}$$

$$\Leftrightarrow x\in C_{\mathbb{N}}^{A}\wedge\ x\in C_{\mathbb{N}}^{B}$$

$$\Leftrightarrow x\in C_{\mathbb{N}}^{A}\bigcap C_{\mathbb{N}}^{B}$$

Alors: $C_{\mathbb{N}}^{A\cup B}=\{x\in\mathbb{N}, x\in C_{\mathbb{N}}^{A}\wedge\ x\in C_{\mathbb{N}}^{B}\}$

$$=\{x\in\mathbb{N},\ \ x\leq 10 \wedge x \text{ impair}\}$$

$$=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$$

Conclusion : Lois de -MORGAN-

$$C_{\mathbb{N}}^{A\cap B}=C_{\mathbb{N}}^{A}\bigcup\ C_{\mathbb{N}}^{B}$$

$$C_{\mathbb{N}}^{A\cup B}=C_{\mathbb{N}}^{A}\bigcap C_{\mathbb{N}}^{B}$$

Solution de L'exercice 10:

1) $A\backslash(B\bigcup C)\overset{?}{=}A\bigcap\complement_{E}^{B\cup C}$

$$A\backslash(B\bigcup C)=A\bigcap\left(\complement_{E}^{B}\bigcap\complement_{E}^{B}\right)$$

$=(A\bigcap A)\bigcap\left(\complement_{E}^{B}\bigcap\complement_{E}^{B}\right)$; $(\bigcap)$ est idempotente

$=\left(A\bigcap\complement_{E}^{B}\right)\bigcap\left(A\bigcap\complement_{E}^{B}\right)$; $(\bigcap)$ est commutative et associative

$$=\left(A\setminus\complement_{E}^{B}\right)\bigcap\left(A\setminus\complement_{E}^{B}\right)$$

2) $A\setminus B\overset{?}{=}(A\bigcup B)\setminus B$

$$A\setminus B=A\bigcap\complement_{E}^{B}$$

$$=\left(A\bigcap\complement_{E}^{B}\right)\bigcup\varnothing$$

$$=\left(A\bigcap\complement_{E}^{B}\right)\bigcup\left(B\bigcap\complement_{E}^{B}\right)$$

$$=(A\bigcup B)\bigcap\complement_{E}^{B}$$

$$=(A\bigcup B)\setminus B$$

3) $\complement_{E}^{A}\ \Delta\ \complement_{E}^{B}\overset{?}{=}A\ \Delta\ B$

$$\complement_{E}^{A}\ \Delta\ \complement_{E}^{B}=\left(\complement_{E}^{A}\setminus\complement_{E}^{B}\right)\bigcup\left(\complement_{E}^{B}\setminus\complement_{E}^{A}\right)$$

$$=\left(\complement_{E}^{A}\bigcap\complement_{E}^{\complement_{E}^{B}}\right)\bigcup\left(\complement_{E}^{B}\bigcap\complement_{E}^{\complement_{E}^{A}}\right)$$

$$=\left(\complement_{E}^{A}\bigcap B\right)\bigcup\left(\complement_{E}^{B}\bigcap A\right)$$

$=\left(\complement_{E}^{B}\bigcap A\right)\bigcup\left(\complement_{E}^{A}\bigcap B\right)$; $(\bigcap)$ et $(\bigcup)$ sont commutatives

$$=\left(A\bigcap\complement_{E}^{B}\right)\bigcup\left(B\bigcap\complement_{E}^{A}\right);$$

$$=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)$$

$$=A\ \Delta\ B$$

Solution de L'exercice 11:

1. $B\subset C\overset{?}{\Rightarrow}(A\bigcap B)\subset(A\bigcap C)$

Hypothèse : $B\subset C$

But : $(A\bigcap B)\subset(A\bigcap C)$

$$\forall x\in(A\bigcap B)\Rightarrow x\in A\wedge x\in B$$

Comme $B\subset C\Rightarrow x\in A\wedge x\in C$

$$\Rightarrow x\in(A\bigcap C)$$

Donc : $B\subset C\Rightarrow(A\bigcap B)\subset(A\bigcap C)$

2. $[(A\subset C)\wedge(B\subset C)]\overset{?}{\Leftrightarrow}(A\bigcup B)\subset C$

$[(A\subset C)\wedge(B\subset C)]\Leftrightarrow(A\bigcup B)\subset C \quad\Leftrightarrow$

$[(A\subset C)\wedge(B\subset C)]\Rightarrow(A\bigcup B)\subset C \quad\wedge$

$(A\bigcup B)\subset C\Rightarrow[(A\subset C)\wedge(B\subset C)]$

a. $[(A\subset C)\wedge(B\subset C)]\overset{?}{\Rightarrow}(A\bigcup B)\subset C$

Hypothèse : $(A\subset C)\wedge(B\subset C)$

But : $(A\bigcup B)\subset C$

$$\forall x\in(A\bigcup B)\Rightarrow x\in A\vee x\in B$$

Comme $(A\subset C)\wedge(B\subset C)\Rightarrow x\in C\vee x\in C$

$$\Rightarrow x\in C$$

Donc : $[(A\subset C)\wedge(B\subset C)]\Rightarrow(A\bigcup B)\subset C$

b. $(A\bigcup B)\subset C\overset{?}{\Rightarrow}[(A\subset C)\wedge(B\subset C)]$

Hypothèse : $(A\bigcup B)\subset C$

But : $(A\subset C)\wedge(B\subset C)$

$$\forall x\in A\Rightarrow x\in(A\bigcup B)\Rightarrow x\in C$$

$$\forall x\in B\Rightarrow x\in(A\bigcup B)\Rightarrow x\in C$$

Donc : $(A\bigcup B)\subset C\Rightarrow[(A\subset C)\wedge(B\subset C)]$

Conclusion :

$$\left[(A\subset C)\wedge(B\subset C)\right]\Leftrightarrow(A\cup B)\subset C$$

Solution de L'exercice 12:

$\forall\ x,\ y\in\mathbb{R}^*;\quad x\Re y\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+\frac{1}{y^2}$

1) $\Re$ est une relation d'équivalence :

a) $\Re$ est réflexive : $\forall\ x\in\mathbb{R}^*;\quad x\Re x$?

$$x\Re x\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}$$
$$\Leftrightarrow 0=0$$

Alors $\Re$ est réflexive.

b) $\Re$ est symétrique : $\forall\ x,\ y\in\mathbb{R}^*;\quad x\Re y\Rightarrow y\Re x$?

$$\begin{aligned}x\Re y&\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+\frac{1}{y^2}\\&\Leftrightarrow y^2+\frac{1}{y^2}=x^2+\frac{1}{x^2}\\&\Rightarrow y\Re x\end{aligned}$$

Alors $\Re$ est symétrique.

c) $\Re$ est transitive : $\forall x,\ y,\ z\in\mathbb{R}^*;\ x\Re y\wedge y\Re z\Rightarrow x\Re z$?

$$\begin{cases}x\Re y\\ \wedge\\ y\Re z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+\frac{1}{y^2}\\ \wedge\\ y^2+\frac{1}{y^2}=z^2+\frac{1}{z^2}\end{cases}\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=z^2+\frac{1}{z^2}\Rightarrow x\Re z$$

Alors $\Re$ est transitive.

Conclusion : $\Re$ est une relation d'équivalence.

2) Classe d'équivalence :

Soit $a\in\mathbb{R}^*$. Cherchons les éléments x de $\mathbb{R}^*$ tels que $x\Re a$.

$\mathring{a}=\left\{x\in\mathbb{R}^*\ /\ x\Re a\right\}$

$$\begin{aligned}x\Re a&\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=a^2+\frac{1}{a^2}\\&\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=0\\&\Leftrightarrow\left(x^2-a^2\right)+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}=0\\&\Leftrightarrow\left(x^2-a^2\right)+\frac{a^2-x^2}{x^2a^2}=0\\&\Leftrightarrow\left(x^2-a^2\right)\left(1-\frac{1}{x^2a^2}\right)=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2-a^2=0\\ 1-\frac{1}{x^2a^2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=a^2\\ x^2a^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm\ a\\ x=\pm1/a\end{cases}$$

Donc $\mathring{a}=\left\{\ a,\ -a,\ 1/a,\ -1/a\right\}$

2) $\mathring{2}=\left\{\ 2,\ -2,\ 1/2,\ -1/2\right\}$

Solution de L'exercice 13:

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit $\Re$ comme suit:

$\forall(x,\ y),(x',\ y')\in\mathbb{R}^2;$

$$(x,\ y)\Re(x',\ y')\Leftrightarrow\left((x<x')\text{ou}(x=x'\text{ et }y\le y')\right)$$

1) Montrons que $\Re$ est une relation d'ordre?

a) $\Re$ est réflexive :

$\forall\ (x,\ y)\in\mathbb{R}^2;\quad(x,\ y)\Re(x,\ y)$?

$$\begin{aligned}(x,\ y)\Re(x,\ y)&\Leftrightarrow\left((x<x)\text{ou}(x=x\text{ et }y\le y)\right)\\&\Leftrightarrow\left(F\ \vee(V\ \wedge\ V)\right)\\&\Leftrightarrow\left(F\ \vee\ V\right)\Leftrightarrow\ Vraie\end{aligned}$$

Alors $\Re$ est réflexive.

b) $\Re$ est antisymétrique :

$\forall(x,\ y),(x',\ y')\in\mathbb{R}^2;$

$(x,\ y)\Re(x',\ y')\wedge(x',\ y')\Re(x,\ y)\Rightarrow(x,\ y)=(x',\ y')$?

On a donc :

$$\begin{cases}(x,\ y)\Re(x',\ y')\Leftrightarrow\left((x<x')\text{ou}(x=x'\text{ et }y\le y')\right)\\ \wedge\\ (x',\ y')\Re(x,\ y)\Leftrightarrow\left((x'<x)\text{ou}(x'=x\text{ et }y'\le y)\right)\end{cases}$$

$\Rightarrow(x=x')$ et $(y=y')$

$\Rightarrow(x,\ y')=(x',\ y')$

Alors $\Re$ est antisymétrique.

c) $\Re$ est transitive :

$\forall(x,\ y),(x',\ y'),(x'',\ y'')\in\mathbb{R}^2;$

$(x,\ y)\Re(x',\ y')\wedge(x',\ y')\Re(x'',\ y'')\Rightarrow(x,\ y)\Re(x'',\ y'')$?

On a donc :

$$\begin{cases}(x,\ y)\Re(x',\ y')\Leftrightarrow\left((x<x')\text{ou}(x=x'\text{ et }y\le y')\right)\\ \wedge\\ (x',\ y')\Re(x'',\ y'')\Leftrightarrow\left((x'<x'')\text{ou}(x'=x''\text{ et }y'\le y'')\right)\end{cases}$$

$\Rightarrow\left((x<x'')\text{ou}(x=x''\text{ et }y\le y'')\right)$

$\Rightarrow(x,\ y)\Re(x'',\ y'')$

Alors $\Re$ est transitive.

Conclusion : $\Re$ est une relation d'ordre.

2) $\Re$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^2$.

Car tous les couples $(x,\ y),(x',\ y')$ de $\mathbb{R}^2$ sont comparables.

L'ordre de $\Re$ est total $\Leftrightarrow\forall(x,\ y),(x',\ y')\in\mathbb{R}^2;$

$$(x,\ y)\Re(x',\ y')\ \text{ou}\ (x',\ y')\Re(x,\ y)$$