Université Ibn Khaldoun - Tiaret

Département des sciences et de technologie — Année universitaire 2014 - 2015

Module de mathématiques — Semester 1

Promotion 1er LMD ST

Série de TD $N^{\underline{o}}$ 01

Exercice 1 :

- Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fousses ?

1. $\cos\frac{\pi}{2}$ est positif et $\mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = \sin x$ ou $\frac{1}{\exp x} = \exp(-x)$.
3. $\sin(-\pi) = \sin\pi \Rightarrow \ln\frac{1}{\pi} > 0$.
4. $\frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{2}^2 \in \mathbb{N}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 > 0$.
6. $\exists x \in \mathbb{N}, \quad x^2 \leq 0$.
7. $\exists x \in \mathbb{N}, \ \exists y \in \mathbb{N}, \quad x \leq -y^2$.

- Trouver les négations de les propositions précédentes.

Exercice 2 :

Comparer les propositions suivantes et dire si elles sont vraies ou fausses

1. $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$, ($m+n$ est un nombre pair).
2. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$, ($m+n$ est un nombre pair).

Exercice 3 :

I) Prouver les assertions suivantes sont vraies pour tous assertions p, q et r

1. $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{p} \vee q)$
2. $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$
3. $[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

II) En déduire la négation de $(p \Longrightarrow q)$.

Exercice 4 : (Raisonnement direct - Raisonnement par contraposition)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\quad n$ pair $\Longleftrightarrow n^2$ pair.

Exercice 5 : (Raisonnement par l'absurde)

Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 6 : (Raisonnement par contre-exemple)

Montrer que l'implication suivante est fausse

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ x < 5 \Longrightarrow x^2 < 25.$$

Exercice 7 : (Raisonnement par disjonction des cas)

Demontrez que, pour tout réel x, si $x^2 - 9 > 0$, alors $x^2 - x - 2 > 0$.

Exercice 8 : (Raisonnement par récurrence)

- Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

• Montrer que, pour tout $n > 1$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}} = 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$
(le nombre 2 apparaissant n fois sous la racine).

Exercice 9 :
Soit A, B deux ensembles tels que : $A = \{x \in \mathbb{N},\ x > 10\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N},\ x \text{ pair}\}$.
• Trouvez l'éléments les ensembles suivants :
A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $C_{\mathbb{N}}A$, $C_{\mathbb{N}}B$, $C_{\mathbb{N}}A \cap C_{\mathbb{N}}B$, $C_{\mathbb{N}}A \cup C_{\mathbb{N}}B$, $C_{\mathbb{N}}(A \cap B)$ et $C_{\mathbb{N}}(A \cup B)$.
• En déduire les ensembles sont égaux.

Exercice 10 :
Soit l'ensemble X tel que : $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. A et B deux parties de X telles que : $A = \{2,3,4,5\}$ et $B = \{1,4,5,7,8\}$.
Montrer que l'ensemble $\{A \cap B,\ A \triangle B,\ C_X(A \cup B)\}$ est une partition de X.

Exercice 11 :
A, B, et C trois ensembles. Montrer que

1. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
2. $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$
3. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

Exercice 12 :
A, B et C trois sous-ensembles de ensemble E. Montrer que

1. $(B \subset C) \Longrightarrow (A \cap B) \subset (A \cap C)$
2. $((A \subset C) \wedge (B \subset C)) \Longleftrightarrow ((A \cup B) \subset C)$

Exercice 13 :
On définit la relation $\mathfrak{R}$ sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \,\mathfrak{R}\, y \Longleftrightarrow x^4 - y^4 = x^2 - y^2.$$

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Trouver la classe d'équivalence d'élément a de $\mathbb{R}$ pour $\mathfrak{R}$.
3. En déduire les classes d'équivalences des éléments : 0, 2, $\frac{1}{2}$.

Exercice 14 :
Soit $\mathfrak{R}$ une relation sur un ensemble E.
Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence si et seulement si : $\mathfrak{R}$ est réflexive et pour tous éléments x, y, z de E, $(x \,\mathfrak{R}\, y \text{ et } y \,\mathfrak{R}\, z) \Longrightarrow z \,\mathfrak{R}\, x$.

Exercice 15 :
Sur $\mathbb{R}^2$, on définit $\mathcal{R}$ une relations par suit :
$(x,y)\ \mathcal{R}\ (x',y') \Longleftrightarrow (x \leq x' \text{ et } y \leq y')$.
- Est-ce que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre ?
- Si votre réponse est "oui", est-ce que ce ordre total ?