Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université IBN-Khaldoun Tiaret

Faculté des Sciences Appliquées

Département des sciences et de technologie

Physique I

(Cours)

Mécanique du point matériel

Polycopié

Présenté par

Dr. Miloud ZERROUKI

Maitre de Conférences

2015-2016

Première année LMD

sciences de la matière - sciences et technologie

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université IBN-Khaldoun Tiaret

Faculté des Sciences Appliquées

Département des sciences et de technologie

Cours de

Physique I

Mécanique du point matériel

Présenté par

Dr. Miloud ZERROUKI

Maitre de Conférences

Année Universitaire : 2015/2016

Table des matières

Chapitre I : rappels mathématiques

I.1 Grandeurs physiques

I.1.1. Définition

Une grandeur est une caractéristique physique, chimique ou biologique qui peut être mesurable ou repérable. Elle peut être de nature scalaire ou vectorielle.

I.1.2. Grandeurs physiques mesurables : une grandeur physique est mesurable s'il est possible de définir l'égalité et l'addition de deux grandeurs de son espèces, et s'il est possible aussi de lui associer une valeur numérique.

Exemple

On mesure les grandeurs :

- **scalaires :**
  longueur l
  masse m
  température T (mesure microscopique à l'échelle Kelvin T)
- **vectorielles :**
  vitesse $\bar{v}$
  accélération γ
  force $\bar{F}$

I.1.3. Grandeurs physiques repérables

Une date d'un instant, un potentiel, une altitude, une température sont des grandeurs physiques d'une nature tout à fait différente des précédentes. On ne peut pas définir la somme de deux dates ou leur multiplication par un scalaire : de telles grandeurs ne sont donc pas mesurables au sens précédent.

Exemple

On repère les grandeurs :

- **scalaires :**
  position d'un point sur un axe (abscisse x)
  date d'un événement (d ou j)
  énergie totale d'un système (E_T)
  température (repérage macroscopique aux échelles empiriques (t°C (Celsius), t°F(Fahrenheit)))
- **vectorielles :**
  position d'un point dans l'espace $\overline{OM}$

I.1.4. Mesure d'une grandeur

Le nombre qui mesure une grandeur (G) est le rapport de cette grandeur à la grandeur de même espèce (G_0) choisie comme unité.

Mesure de $=\frac{G}{G_0}$, la valeur de G est accompagnée de son unité.

Exemple : pour mesurer la longueur de la table, je prends une règle pour unité. Il faut reporter 5 fois la règle pour parcourir toute la table

$$\frac{la\ longueur\ de\ la\ table}{la\ longueur\ de\ la\ règle} = 5$$

Donc, la longueur de la table = 5 longueurs de règle

I.1.5. Nom d'une grandeur

Parmi les grandeurs cités précédemment, certaines d'entre elles peuvent être considérées comme indépendantes et former ainsi un sous-ensemble dit : grandeurs fondamentales. Les autres grandeurs sont nommées : grandeurs dérivées, elles peuvent être obtenues à partir des grandeurs fondamentales.

Le Système International (S.I.) admet sept grandeurs fondamentales :
- la longueur (l)
- la masse (m)
- le temps (t)
- l'intensité du courant électrique (i)
- la température (θ)
- l'intensité lumineuse (j)
- la quantité de matière (n)

Les autres grandeurs sont des grandeurs dérivées comme par exemple :

- le volume : $(\text{longueur})^3$
- la masse volumique : (masse)/$(\text{longueur})^3$
- la fréquence : 1/temps
- la quantité d'électricité : (intensité du courant électric)x(temps)
- le coefficient de dilatation linéaire : 1/(température thermodynamique)
- le volume molaire : $(\text{longueur})^3$/(quantité de matière)
- la luminance : (intensité lunimeuse)/$(\text{longueur})^2$
- etc..

Ils existent deux grandeurs supplémentaires sans dimension :

- l'angle plan
- l'angle solide

Remarque : toute grandeur physique G s'écrit sous la forme suivante :

G = (valeur réelle)x(unité)

I.2. Les unités

Une unité de mesure est un étalon nécessaire pour la mesure d'une grandeur physique.

I.2.1. Systèmes d'unités en physique

Un système d'unités de mesure est défini par un choix conventionnel de grandeurs de base auxquelles sont associées des unités.

Exemple

Système CGS (trois grandeurs et unités)

- grandeurs de base : longueur, masse, temps
- unités : centimètre, gramme, seconde

Système MKSA ou de GIORGI (quatre grandeurs et unités)

- grandeurs de base : longueur, masse, temps, intensité électrique
- unités : mètre, kilogramme, seconde, ampère

Système SI (sept grandeurs et unités)

- grandeurs de base : longueur, masse, temps, intensité électrique, température thermodynamique, quantité de matière, intensité lumineuse
- unités : mètre, kilogramme, seconde, ampère, kelvin, mole, candela

Grandeur physique	*Unité*	*Symbole*
longueur	mètre	*m*
masse	kilogramme	*kg*
temps	seconde	*s*
intensité du courant électrique	ampère	*A*
température	kelvin	*K*
intensité lumineuse	candela	*cd*
quantité de matière	mole	*mol*

Tableau 1 : grandeurs physiques et leurs unités et symboles.

I.2.2. Unités de base du système international

Le système international (S.I.) est constitué par les unités du système MKSA rationalisé (M : Mètre, K : Kilogramme, S : Seconde et A : Ampère) et comporte des définitions supplémentaires de l'unité de température et de l'unité d'intensité lumineuse, et la quantité de matière Dans ce système d'unité, les unités de base ou fondamentales se définissent de la façon suivante :

- *Longueur* : l'unité de base SI de longueur est le mètre (m). Le mètre est la longueur qui égale à 1650 763,73 fois la longueur d'onde, dans le vide de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux $2p_{10}$ et $5d_5$ de l'atome de Krypton 86.

- *Masse* : l'unité de base SI de masse est le Kilogramme (Kg). Le Kilogramme est la masse du prototype en platine, qui a été sanctionné par la conférence générale des Poids et Mesures, tenue à Paris en 1889, et qui est déposé au BIPM (Bureau International des Poids et Mesures : il est hébergé au Pavillon de Breteuil à Sèvres, dans le Parc de Saint-Cloud près de Paris).

-*Temps* : l'unité de base SI de temps est la seconde (s). La seconde est définie comme étant la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux énergétiques de l'atome de césium 133.

- *Intensité du courant électrique* : l'unité de base SI de l'intensité du courant électrique est l'Ampère (A).
L'ampère est défini comme étant l'intensité du courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1mètre l'un de l'autre, dans le vide, produit entre ces conducteurs, par mètre de longueur, une force égale à $2 \cdot 10^{-7}$ Newton.

-*Température thermodynamique* : l'unité de base dans le S.I de la température thermodynamique est le Degré Kelvin (°K).
Le kelvin est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau.

Point Triple
Le point triple est, en thermodynamique, un point du diagramme de phase qui correspond à la coexistence de trois états (liquide, solide et gazeux) d'un corps pur. Il est unique et s'observe seulement à une température et une pression données.

Exemple :
- Le point triple de l'eau est à : T = 273,16 K (soit 0,01 °C) et P = 611 Pa (soit 0,006 atm).
- Le point triple de l'azote est à : T = 63,16 K et P = 12 868 Pa.
- Le point triple du dioxyde de carbone est à : T = 216,55 K et $P = 519.10^3$ Pa (soit 5,12 atm).
- Le point triple du néon est à : T = 24,5561 K et $P = 4{,}34 \cdot 10^{-6}$ Pa.

- *Intensité lumineuse* : l'unité de base dans le S. I. de l'intensité lumineuse est le Candela (Cd).
Le Candela est définie comme étant l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian.

-*La quantité de matière* : l'unité de base dans le S. I de la quantité de matière est le mole.
Le mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de Carbonne 12.

I.2.3. Unités dérivées du Système International
A partir des unités de base définies précédemment, on peut définir facilement des unités qui en découlent :

- *Surface* : mètre carré (m^2).
Aire d'un carré de 1 mètre de côté.

-*Volume* : mètre cube (m^3).
Volume d'un cube de 1mètre de côté.

-*Vitesse* : mètre par seconde (m/s).
La vitesse d'un mobile qui, animé d'un mouvement uniforme, parcourt en 1 seconde, une distance de 1mètre.

-*Accélération* : mètre par seconde, par seconde (m/s^2).

- *Vitesse Angulaire* : radian par seconde (rd/s).

- *Force* : Newton (N)
Force qui communique à un corps, ayant une masse de 1 Kg, une accélération de 1mètre par seconde.

- *Moment* : Mètre. Newton (m.N)
Moment par rapport à un axe, d'une force de 1 Newton dont le support est distant de 1 mètre de l'axe et y est orthogonal.

- *Energie, Travail, Quantité de Chaleur* : Joule (J)
Travail produit par une force de 1 Newton dont le point d'application se déplace de 1 mètre dans la direction de la force.

- *Puissance* : Watt (W)
Puissance de 1 Joule par seconde (Travail/ Temps).

- *Contrainte, Pression* : Pascal (Pa)
Pression uniforme qui, agissant sur une surface plane de 1 mètre carré, exerce perpendiculairement à cette surface, une force totale de 1 Newton.

I.2.4. Les unités supplémentaires
En plus des sept unités fondamentales, le SI admet deux unités supplémentaires.

- *Angle plan* : radian (rd ou rad).
Angle plan, ayant son sommet au centre d'un cercle, interceptant, sur la circonférence de ce cercle, un arc d'une longueur égale à celle du rayon.

- *Angle solide* : stéradian (sr).
Angle solide, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpant sur la surface de cette sphère, une aire égale à celle d'un carré ayant pour côté le rayon de la sphère.

I.2.5. Les unités accessoires
Ils existent quelques unités qui ne font pas parti du système international mais qui sont largement utilisé, car mieux adaptés aux dimensions des phénomènes étudiés ou imposées par l'usage, nous citons quelques-unes :

La longueur	- l'année-lumière : 1 année de lumière = 3, 46x10^{15} m - angström : 1Å=10^{-10}m
Temps	- la minute : 1mn=60s - l'heure: 1h=3600s - le jour: 1j=24h=86400s
La masse	- la tonne : 1T=1000Kg
La pression	-le torr : 1Torr= 133,322 368 4 Pa

Dans le tableau ci-dessous, nous présentons les unités usuelles dans un ordre alphabétiques

Grandeur et notation	*Unités*	*Symbole*
Accélération (a)	mètre par seconde carré	$m \cdot s^{-2}$
Activité radioactive (A)	Becquerel	Bq
Angle (α)	Radian	Rad
Capacité électrique (C)	Farad	F
Charge électrique (q)	Coulomb	C
Chaleur latente (L)	Joule par kilogramme	$J \cdot kg^{-1}$
Capacité calorifique massique (c)	Joule par kilogramme et par degré	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
Chaleur (Q)	Joule	J
Champ électrique (E)	Volt par mètre	$V \cdot m^{-1}$
Champ magnétique (B)	Tesla	T
Conductance (G)	Siemens	S
Concentration molaire ([ ])	mole par mètre cube	$mol \cdot m^{-3}$
Concentration massique		
dose radioactive	gray	gy
Equivalent dose radioactive	Sievert	Sv

Tableau 2 : les unités usuelles.

I.2.6. Les multiples et les sous-multiples des unités

Pour simplifier la manipulation des mesures qui ont des rapports élevés d'unité, on fait précéder l'unité par des préfixes, on obtient ainsi des multiples ou sous-multiples. Dans le tableau ci-dessous nous résumons les multiples et les sous-multiples des unités.

Multiple ou sous-multiple	Facteur par lequel l'unité est multipliée	Préfixe	Symbole
Multiple	10^{18}	Exa	E
Multiple	10^{15}	Péta	P
Multiple	10^{12}	Téra	T
Multiple	10^{9}	Giga	G
Multiple	10^{6}	Méga	M
Multiple	10^{3}	Kilo	K
multiple	10^{2}	Hecto	H
sous-multiple	10^{1}	déca	Da
sous-multiple	10^{-1}	déci	D
sous-multiple	10^{-2}	centi	C
sous-multiple	10^{-3}	milli	M
sous-multiple	10^{-6}	micro	µ
sous-multiple	10^{-9}	nano	N
sous-multiple	10^{-12}	pico	P
sous-multiple	10^{-15}	femto	F
sous-multiple	10^{-18}	atto	A
sous-multiple	10^{-21}	zepto	Z
sous-multiple	10^{-24}	yocto	Y

Tableau 3 : Les multiples et les sous-multiples des unités.

Remarque : pour former le symbole d'un multiple (ou sous-multiple) d'une unité de mesure, on accole le symbole de ce même multiple (en préfixe) à celui de l'unité.
Exemple
1Gm= 1 gigamètre = 10^{9}m = 1 milliard de mètres
1µg= 1 microgramme = 10^{-6}g = 1 millionième de gramme

I.3. Dimension et Equation aux dimensions

I.3.1. Dimension

Chaque grandeur physique est caractérisée par sa dimension qui est une propriété associée à une unité. La dimension de la grandeur G est notée **[G]**. Elle nous renseigne sur la nature

physique de la grandeur. Par exemple, si G a la dimension d'une masse, on dit qu'elle est homogène à une masse. La relation [G] = M correspond à **l'équation aux dimensions** de la grandeur G.
Voici les symboles des sept grandeurs fondamentales du système international (SI) :

- la longueur → L
- la masse → M
- le temps → T
- l'intensité du courant électrique → I
- la température → θ
- l'intensité lumineuse → J
- la quantité de matière → N

Donc, si G a la dimension d'une :	masse, on note	[G]=M
	longueur, on note	[G]=L
	temps, on note	[G]=T
	intensité du courant électrique, on note	[G]=I
	température, on note	[G]= θ
	intensité lumineuse, on note	[G]= J
	quantité de matière, on note	[G]= N

Toutes les autres grandeurs sont liées à ces grandeurs fondamentales. Par exemple, le volume d'un cube V étant le produit de trois longueurs, sa dimension est $[V] = L^3$.

I.3.2. Equation aux dimensions

Toute équation aux dimensions doit être homogène en dimension, c'est-à-dire que ses deux membres aient la même dimension. Ainsi l'équation A = B + C.D n'a de sens que si les dimensions de A et de (B + C.D) sont identiques. Pour obtenir la dimension du second membre on doit appliquer les règles suivantes :

− la dimension du produit C.D est le produit des dimensions de chacune des grandeurs C et D : [C.D] = [C][D].

− la dimension de la somme B + C.D est la somme des dimensions de chacun des deux termes B et C.D : [B + C.D] = [B] + [C.D].

Remarque:
− Toute équation aux dimensions d'une grandeur G peut se mettre sous la forme :
$[G] = L^a M^b T^c I^d \ \theta^e J^f N^g$

- Lorsque la dimension d'une grandeur G est égale à 1 ([G]=1), on dit que la grandeur G est sans dimension.

- Pour les fonctions sin(f), cos(f), tan(f), log(f) et e^f, l'argument f est sans dimension (adimensionné).

- Les fonctions sin(f), cos(f), tan(f), ln(f), log(f) et e^f sont sans dimensions, ainsi [sin(x)]= [cos(x)]= [tan(x)]= [e^x]= [ln(x)]= [log(x)]=1, aussi, une constante est sans dimension.

Exemples

Une vitesse V est le quotient d'une longueur L par un temps T: $[V]=LT^{-1}$
- une accélération : $[\gamma]=LT^{-2}$
- une force : $F = M.\gamma \rightarrow [F]= MLT^{-2}$
- un travail : $W = F.L \rightarrow [W]= ML^2T^{-2}$
- une puissance : $P=\frac{W}{T} \rightarrow [P]= ML^2T^{-2}$
- une quantité de chaleur : $Q = ML^2T^{\ 3}$ (comme un travail)
- une pression, une contrainte : $p = \frac{F}{S} \rightarrow [p] = ML^{-1}\ T^{-2}$
- un moment d'inertie : $[M]=ML^2$

I.3.3. Utilités de l'analyse dimensionnelle

Les équations aux dimensions permettent :

- **de vérifier l'homogénéité des formules :**

Exemple **:** vérifier l'homogénéité de l'expression de l'énergie cinétique $E=\frac{1}{2}mv^2$

$\frac{1}{2}mv^2$est homogène à une énergie (c'est-à-dire un travail), l'équation aux dimensions d'un travail est $[W] = ML^2T^{\ 2}$ (voir plus haut)

D'après l'expression de l'énergie cinétique, $[E]=[m].[v]^2$, or la dimension d'une vitesse $[v]=LT^{-1}$

donc, $[v]^2=L^2T^{-2}$
Enfin, $[E]=ML^2T^{-2}$, donc l'équation est bien homogène

- **de déterminer la dimension et l'unité d'une grandeur dérivée en fonction des dimensions et unités des grandeurs fondamentales.**

Exemple**:** vitesse d'arrivée au sol d'un objet lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h.
La vitesse d'arrivée au sol d'un objet lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h est donnée par la relation, $v = \sqrt{2g\ }$
Nous déterminons à l'aide l'analyse dimensionnelle la dimension et l'unité de la vitesse :

$v = \sqrt{2g\ } =(2g\ )^{\frac{1}{2}}$
$[v]=[2]^{1/2}.[g]^{1/2}[h]^{1/2}$

Une constante est sans dimension, donc $[2]^{1/2}=1$
On a déjà donné : $[g]=LT^{-2}$
$[h]=L$

Alors, $[v]=LT^{-1}$, son unité sera m/s

- **de prévoir une expression traduisant une loi physique :**

Exemple : trouver l'expression de la période d'un pendule simple.

Nous essayons d'établir la relation qui décrit la variation de la période en fonction d'un certain nombre de paramètres. Il est facile de penser que la période P va dépendre de la masse du corps m, de la longueur du fil l ainsi que de l'accélération de la pesanteur g (voir la figure ci-dessous).

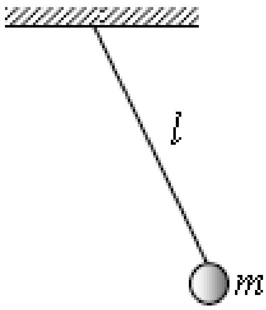


Figure 1 : Pendule simple.

On peut écrire :

$P=k\, m^{a} l^{\,b} g^{\,c}$

Où k est une constante sans dimension et a, b et c sont des exposants à déterminer.

En utilisant l'analyse dimensionnelle

$[P]=[m]^{a}.[l]^{b}.[g]^{c}$

On sait que

$[P]=T$

$[m^{a}]=M^{a}$

$[l^{b}]=L^{b}$

$[g^{c}]=L^{c}\, T^{-2c}$

L'équation aux dimensions devient alors :

$T=M^{a}l^{b+c}T^{-2c}$

En respectant le critère d'homogénéité, il en résulte les relations suivantes

a=0

b+c=0, donc b=-c

-2c=1, donc c=-1/2

D'où, b=1/2

La relation de *P* devient alors :

$P = k\, l^{1/2} g^{-1/2}$ d'où $P = k\sqrt{\frac{l}{g}}$

Cette analyse montre que la période du pendule ne dépend pas de la masse *m*.

I.4. Les incertitudes et le calcul d'erreurs

I.4.1. Incertitudes

Lorsqu'on mesure une grandeur quelconque G, on ne peut jamais obtenir une valeur exacte, mais une valeur plus ou moins approximative. On appelle erreur la différence entre la valeur mesurée et la valeur exacte. Mais comme on ignore la valeur exacte, on ne peut pas connaitre l'erreur commise. Le résultat est donc toujours incertain. On parle des incertitudes de mesure.

Exemple : $G = G_{ex} \pm \quad G$

On distingue plusieurs types d'erreurs :

- Les erreurs systématiques : restent sensiblement les mêmes lorsqu'on opère dans des conditions identiques.
- Les erreurs accidentelles ou fortuites : toujours présentes, sont dues souvent à des causes difficiles à connaître : vibrations, variations de température passagères, mauvais contacts dont la résistance électrique est une fonction du courant et du temps. Cependant, les erreurs à caractère aléatoire ne peuvent être combattues que par une répétition des mesures avec calculs de moyennes justifiés par des considérations statistiques.
- Les erreurs personnelles : sont imputables à toutes les imperfections, tant physiques qu'intellectuelles de l'opérateur. Par exemple les erreurs de lecture sur le cadran d'un appareil indicateur.

En plus de l'erreur de lecture, il existe une erreur dans la valeur donnée par l'appareil de mesure, cette erreur est donnée par la relation :

$$\mathrm{X_m} = \frac{\mathrm{C\ \ X_m}}{100} \qquad (\%)$$

Où C est la classe de l'appareil qui se trouve sur chaque appareil, Xm est le calibre utilisé dans la mesure et ΔXm est la plus grande erreur absolue commise.

I.4.2. Calcul d'erreur

Soit à mesurer une grandeur G. Si l'on recommence plusieurs fois la mesure, on obtient des nombres légèrement différents. Si X est la valeur exacte (vraie) de G et Xex le résultat de la mesure (expérimentale), la différence $\delta G = X - X_{ex}$ est appelée erreur absolue de la mesure. L'erreur absolue n'étant pas connue, on doit se contenter d'en rechercher une limite supérieur ΔG, appelée incertitude absolue, telle que $|\delta G| = \Delta G$.

Le rapport $\frac{\Delta G}{G}$ est appelé incertitude relative.

I.4.3. Théorème des erreurs

Soit une grandeur G, que l'on souhaite mesurer indirectement (c'est-à-dire pour obtenir sa valeur on doit mesurer d'autres grandeurs reliées par une loi physique). Exemple : surface

d'un rectangle G=Ll, on mesure la longueur L et la largeur l du rectangle et on en déduit la valeur de G.
Supposons que G est liée aux grandeurs x, y, z par une relation :
G = f(x,y,z)
Les grandeurs x, y, z sont supposées indépendantes. On écrit la différentielle totale de cette fonction

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

où, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ $sont$ les dérivées partielles de f par rapport aux variables x, y, z

$\frac{\partial f}{\partial x}$ représente la dérivée de f par rapport à x quand y et z sont supposés constants.

Le principe du calcul d'erreurs est basé sur le faite d'assimiler les erreurs absolues Δx, Δy, Δz (erreurs absolues sur les variables x, y, ou z) aux valeurs absolues des différentielles dx, dy, dz ;

$\Delta x = |dx|$
$\Delta y = |dy|$
$\Delta z = |dz|$

Puisque le sens des erreurs n'est pas connu, il est nécessaire de prendre les différentielles et les dérivées partielles en valeur absolue. La relation fondamentale de l'erreur est donnée par :

$$\Delta f=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z$$

***Exemple* :**

Cas d'une somme ou d'une différence

Soit f = x + y-z

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=1\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\quad 1$$

$$\Delta f=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z \Rightarrow \Delta f=\Delta x+\Delta y+\Delta z$$

Cas d'un produit, d'un rapport ou d'une puissance

$$G=k\,\frac{x^a y^b}{z^c}$$

Où x, y et z sont des grandeurs que l'on mesure et k, a, b et c sont des constantes.

Dans ce cas l'incertitude relative sur le résultat s'obtient selon la démarche suivante :
Nous appliquons la fonction logarithme aux deux membres de la relation

$$logf = \log\left(k\frac{x^a y^b}{z^c}\right) = logk + alogx + blogy \quad clogz$$

La différentielle de l'expression donne :

$$\frac{df}{f} = a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y}dy \quad c\frac{dz}{z}$$

Appliquons la valeur absolue

$$\frac{\Delta f}{f} = a\frac{\Delta x}{x} + b\frac{\Delta y}{y}dy \quad c\frac{\Delta z}{z}$$

I.5. Analyse vectorielle

Pour être caractérisée, une grandeur physique peut être exprimée par une valeur et une unité convenable. Une telle grandeur est appelée : ***grandeur scalaire***, comme : temps, masse, température, pression…etc.
D'autres grandeurs exigent pour leur caractérisation à la fois un point d'application, une direction, un module et un sens. De telles grandeur sont appelées : ***grandeur vectorielles***, comme : vitesse, force, champs électrique…etc.

Les quantités vectorielles sont donc représentées par des ***vecteurs***. Un vecteur est un segment de droit orienté (accompagné d'une flèche pour définir son sens).

I.5.1. Notion de vecteur

Pour définir un vecteur, nous avons besoin de :

- Une origine (pont d'application), dans le schéma, c'est le point A
- Une direction, c'est la droite (Δ) portant le vecteur
- Un sens, de A vers B, représentée par une flèche
- Un module (appelé aussi : norme ou intensité), c'est la distance entre les deux point A et B. Il représente la quantité vectorielle

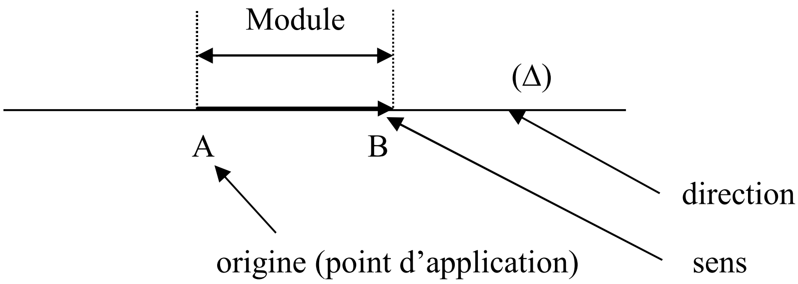


Figure 2 : Représentation d'un vecteur.

Remarque :

- On peut désigner un vecteur par une seule lettre, par exemple $\overline{AB} = \bar{V}$
- Le module d'un vecteur $\overline{AB}$ est noté $|\overline{AB}|, ou||\overline{AB}||$ ou AB

Propriétés

− Un ***vecteur libre*** est un vecteur qui est défini par sa direction, son sens et sa longueur sans fixer son point d'application (son origine).

Exemple: Les vecteurs v, e, f sont des représentants du vecteur libre $\bar{H}$.

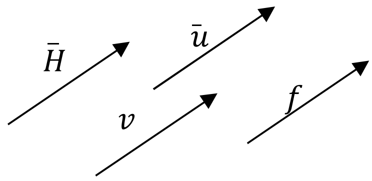


Figure 3 : Vecteurs représentants d'un vecteur libre.

- Un ***vecteur glissant*** est un vecteur qui a un module fixe, un sen fixe et que l'on impose sa droite support (Δ) sans fixer son point d'application.

Exemple : Les vecteurs $\overline{v_1}, \overline{v_2}$ et $\overline{v_3}$ sont des représentants du vecteur glissant $\bar{V}$.

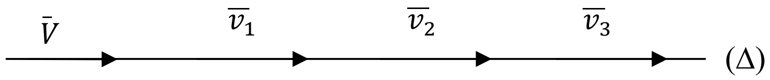


Figure 4 : Vecteurs représentants d'un vecteur glissant.

- deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même module.

Exemple : Les vecteurs $\overline{v_1}$ et $\overline{v_2}$ sont deux vecteurs égaux.

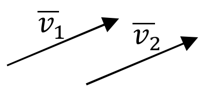


Figure 5 : Deux vecteurs égaux.

- **deux vecteurs sont opposés** s'ils ont même direction, même module mais des sens opposés; et ils sont "**directement opposés**" s'ils ont même support (Δ).

Exemple : Les vecteurs $\overline{\ }_1$ et $\overline{\ }_2$ sont deux vecteurs opposés.

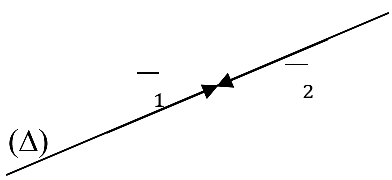


Figure 6 : Deux vecteurs directement opposés.

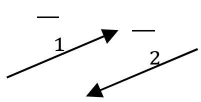


Figure 7 : Deux vecteurs opposés.

- Un vecteur dont le module est égale à 1 (unité) est appelé vecteur unitaire.
Exemple : le vecteur $\bar{u}$ est un vecteur unitaire ($\|\bar{u}\| = 1$)

Figure 8 : Vecteur unitaire.

I.5.2. Opérations sur **les vecteurs**

I.5.2.1. Addition vectorielle

Soit deux vecteurs libres $\overline{u_1}$ et $\overline{u_2}$, la somme des deux vecteurs $\overline{u_1}$ et $\overline{u_2}$ est un vecteur $\overline{w}$, appelé somme ou résultante défini par : $\overline{w} = \overline{u_1} + \overline{u_2}$ et qu'on peut obtenir par :

- ***La méthode du triangle*** : on construit les deux vecteurs de manière à placer l'un après l'autre (l'extrémité du premier coïncide avec l'origine du deuxième) puis on raccorde l'origine du premier avec l'extrémité du deuxième comme suit :

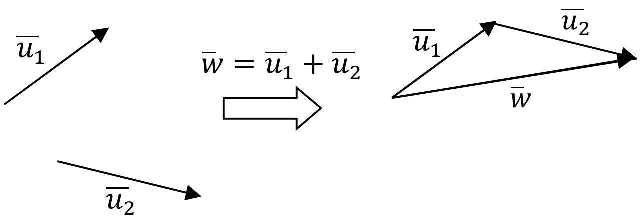


Figure 9 : Addition de deux vecteurs.

Lorsqu'on a plus que deux vecteurs : on doit les placer de manière successive l'un après l'autre comme suit :

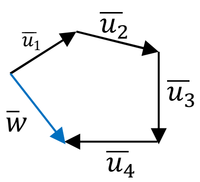


Figure 10 : Addition de plusieurs vecteurs.

- ***La méthode du parallélogramme*** : on construit les deux vecteurs de manière à ramener leurs origines en un seul point, ensuite on construit sur ces deux vecteurs un parallélogramme. Le vecteur somme est la diagonale du parallélogramme partant de l'origine commune des deux vecteurs :

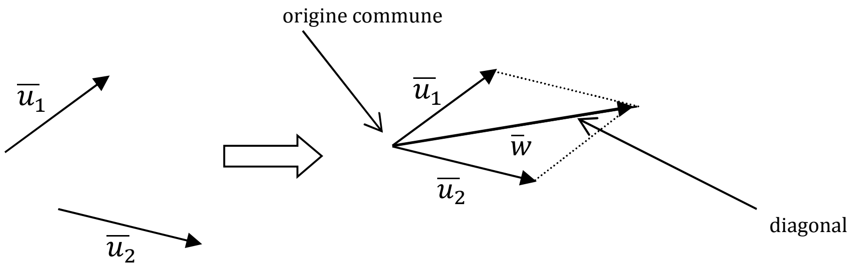


Figure 11 : Addition de deux vecteurs selon la méthode du parallélogramme.

Propriétés

Soient $\bar{u}, v\ et\ \bar{w}$ trois vecteurs quelconques, a et b sont deux constantes.

$\bar{u} + v = v + \bar{u}$	Loi de commutativité
$\bar{u} + (v + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$	Loi d'associativité

a.$\bar{u}$ est un vecteur qui a :

- même direction que $\bar{u}$
- même sens que $\bar{u}$ si a est positif, et sens opposé à $\bar{u}$ si a est négatif
- son module est égal à a $\|\bar{u}\|$

a.$(\bar{u} + v) = a.\bar{u} + a.v$	Loi de distributivité par rapport à la somme des vecteurs
(a+b). $\bar{u} = a.\bar{u} + b.\bar{u}$	Loi de distributivité par rapport à la somme des scalaires
$\bar{u}+\bar{0} = \bar{0}+\bar{u}=\bar{u}$	$\bar{0}$ *est le vecteur nul*
$\bar{u} + (\ \ \bar{u}) = \bar{0}$	$\bar{u}$ est le vecteur opposé à $\bar{u}$
$\bar{u}\ \ \ v = \bar{u} + (\ \ \ v)$	La soustraction vectorielle revient à une addition vectorielle tout en remplaçant v par son opposé. Pour sa définition géométrique, voir plus haut (addition vectorielle)

$\frac{\bar{u}}{u}$ est un vecteur unitaire définissant le sens de $\bar{u}$ (on rappelle que u est le module de $\bar{u}$)

I.5.3. Repère de l'espace

Un repère de l'espace est un repère tridimensionnel constitué d'un quadruplet (O,$\imath,\jmath$,$\bar{k}$), avec :
O : est l'origine du repère.
($\imath,\jmath$,$\bar{k}$) : un triplet de vecteurs non colinéaires, orientés positivement suivant les axes (Ox), (Oy) et (Oz) respectivement. Ils forment la base du repère (O,$\imath,\jmath$,$\bar{k}$).

- Si les vecteurs (($\imath,\jmath$, $\bar{k}$) sont deux à deux perpendiculaires, on parle alors d'un repère orthogonal, et si en plus $\|\imath\|=\|\jmath\|=\|\bar{k}\|=1$ on parle d'un repère orthonormé, appelé aussi un repère cartésien.

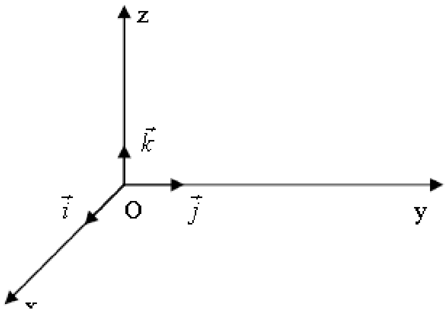


Figure 12 : Système d'axes orthogonaux avec vecteurs unitaires.

I.5.4. Composantes d'un vecteur

Soit $(O,\overline{\imath},\overline{\jmath},\overline{k})$ un repère orthogonal direct de l'espace. Soit M un point dans l'espace. La position du point M est caractérisée par le vecteur $\overline{OM}$. Soient Mx, My et M_z les projections de M sur les axes Ox, Oy et Oz, respectivement. Remarquons que, par construction :

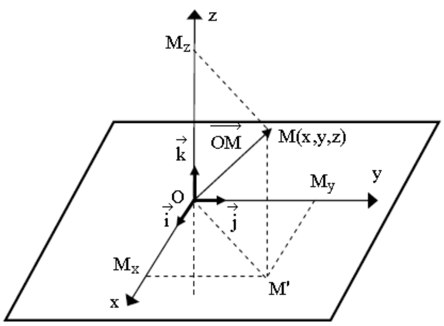


Figure 13 : Composantes d'un vecteur.

Le vecteur $\overline{OM} = \overline{OM`}+\overline{M`M}$, or $\overline{OM`}=\overline{OM_x} + \overline{OM_y}$ et $\overline{M`M}=\overline{OM_z}$

Ainsi, $\overline{OM}= \overline{OM_x} + \overline{OM_y} + \overline{OM_z}$

On note $\overline{OM_x}$=x.$\overline{\imath}$

$\overline{OM_y}$=y.$\overline{\jmath}$

$\overline{OM_z}$=z.$\overline{k}$

Il revient, $\overline{OM}$= x.$\overline{\imath}$+ y.$\overline{\jmath}$+ z.$\overline{k}$

Le triplet (x,y,z) est appelé les composantes du vecteur $\overline{OM}$ ou les coordonnées cartésiennes du point M, avec :

x : abscisse du point M

y : ordonnée du point M

z : côte du point M

On représente alors le vecteur $\overline{OM}(x,y,z)$ ou couramment $\overline{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Le module du vecteur $\overline{OM}$ est $||\overline{OM}||=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Cette fois-ci, nous considérons, non pas un point de l'espace mais un vecteur quelconque v de l'espace muni d'un repère cartésien.

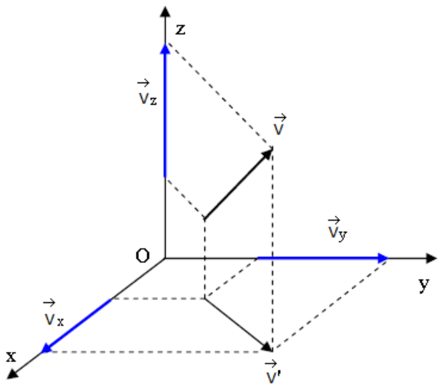


Figure 14 : Représentation d'un vecteur ne partant pas de l'origine du repère orthogonal.

Ramenons le vecteur v et ses projections à l'origine O comme suit :

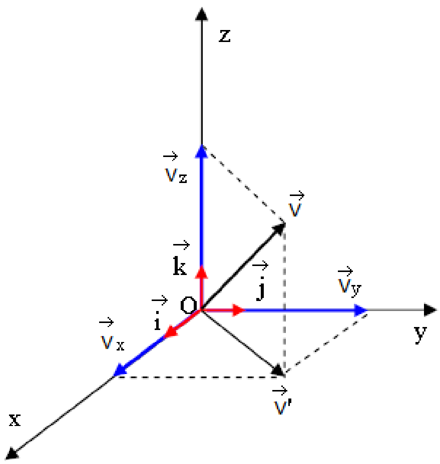


Figure 15 : composantes d'un vecteur.

$v = \overline{v}` + \overline{v_z}$ , or $\overline{v}` = \overline{v_x} + \overline{v_y}$ donc $v = \overline{v_x} + \overline{v_y} + \overline{v_z}$

Sachant que :

$\overline{v_x} = v_x . \imath$
$\overline{v_y} = v_y . \jmath$
$\overline{v_z} = v_z . \bar{k}$
Ainsi, $v = v_x . \imath + + v_y . \jmath + v_z . \bar{k}$
v_x, v_y et v_z sont les composantes du vecteur v, elles représentent les projections algébriques sur les axe (Ox), (Oy) et (Oz) respectivement.
On note :

$v(v_x,v_y,v_z)$ ou $v\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

Le module du vecteur v est $\|v\|=\sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}$

Propriétés

Soient deux points $M(M_x,M_y,M_z)$, $N(N_x,N_y,N_z)$ quelconques et deux vecteurs quelconques $\bar{u}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$, $v\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ dans l'espace muni d'un repère cartésien (O, $\imath, \jmath, \bar{k}$)

- Le vecteur $\overline{MN}$ a pour composantes :$\overline{MN}\begin{pmatrix} N_x & M_x \\ N_y & M_y \\ N_z & M_z \end{pmatrix}$
- Le milieu I de MN a pour coordonnées : I($\frac{N_x+M_x}{2}, \frac{N_y+M_y}{2}, \frac{N_z+M_z}{2}$)
- L'addition des deux vecteurs $\bar{u}$ et v qu'on note $\bar{u} + v = c$ a pour composante $c\begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix}$
- La soustraction des deux vecteurs $\bar{u}$ v=c a pour composante $c\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{pmatrix}$
- Soit α un scalaire, α.$\bar{u}$ aura pour composante $\begin{pmatrix} \alpha u_x \\ \alpha u_y \\ \alpha u_z \end{pmatrix}$

I.5.5. Produit scalaire

I.5.5.1. Définition

Le produit scalaire entre deux vecteurs $\bar{u}$ *et* v est défini comme suit :

$\bar{u} \,.\, v = ||\bar{u}|| \,.\, ||\, v||cos\alpha$

Avec, α est l'angle que forme les deux vecteurs

Il se lit $\bar{u}$ scalaire v et le résultat est un scalaire

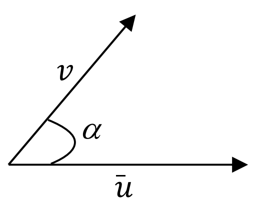


Figure 16 : Deux vecteurs non colinéaires.

I.5.5.2. Interprétation géométrique

Utilisons l'expression du produit scalaire

$\bar{u} \,.\, v = ||\bar{u}|| \,.\, ||\, v||cos\alpha$

Connaissant la définition du cosinus ($\frac{adjacent}{hypoth\acute{e}nus}$)

Alors, $|| v||cos\alpha$ représente la projection perpendiculaire du vecteur v sur le vecteur $\bar{u}$

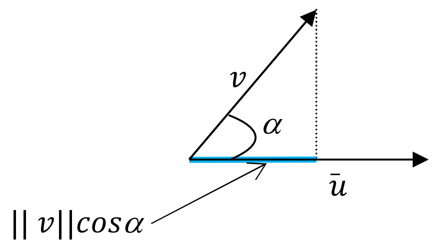


Figure 17 : Projection perpendiculaire d'un vecteur sur un autre.

On peut donc énoncer le produit scalaire comme suit :
$\bar{u}$ scalaire v est égale au produit du module de $\bar{u}$ par la projection perpendiculaire de v sur $\bar{u}$

I.5.5.3. Expression analytique

Soient deux vecteurs $\bar{u}$ et v de l'espace cartésien, muni d'un repère orthogonal direct $(O, \imath, \jmath, \bar{k})$.
Soient, u_x, u_y, u_z les composantes du vecteur $\bar{u}$ dans ce repère, et v_x, v_y, v_z les composantes du vecteur v, rappelons l'expression d'un vecteur en utilisant ses composantes

$\bar{u} = u_x.\imath + u_y.\jmath + u_z.\bar{k}$ et $v = v_x.\imath + v_y.\jmath + v_z.\bar{k}$

Donc, $\bar{u}.v = \left(u_x.\imath + u_y.\jmath + u_z.\bar{k}\right).(v_x.\imath + v_y.\jmath + v_z.\bar{k})$

Sachant que $\imath.\jmath = \begin{cases} 1, & si\ i = j \\ 0, & si\ i \neq j \end{cases}$
Il en résulte :

$$\bar{u}.v = u_x.v_x + u_y.v_y + u_z.v_z$$

On peut en déduire l'expression du cosinus

$$cos\alpha = \frac{\bar{u}.\bar{v}}{||\bar{u}||\,.\,||\bar{v}||} = \frac{u_x.v_x + u_y.v_y + u_z.v_z}{\sqrt{{u_x}^2 + {u_y}^2 + {u_z}^2}\,.\,\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}}$$

Propriétés

Soient $\bar{u}$, v, $\bar{w}$ trois vecteurs de l'espace cartésien muni d'un repère orthogonal direct $(O, \imath, \jmath, \bar{k})$, le produit scalaire satisfait les propriétés suivantes :

$\bar{u}.v = v.\bar{u}$ Loi de commutativité
$\bar{u}.(v + \bar{w}) = (\bar{u}.\bar{v} + \bar{u}.\bar{w})$ Loi d'associativité
Si $\bar{u}.v = 0$, soit l'un des deux vecteur (ou les deux) est nul, soit $\bar{u}$ est perpendiculaire à v ($\bar{u}$ et v sont orthogonaux)

$\bar{u}.\bar{u}$=$||\bar{u}||^2$ =u^2

I.5.6. Le produit vectoriel

Le produit vectoriel deux vecteurs $\bar{u}$ et v est un vecteur $\bar{w}$ défini comme suit :

$\bar{u} \wedge v = \bar{w}$,

- Son module : $||\bar{w}||$=$||\bar{u}||.||v||\sin\alpha$, Avec, α est l'angle que forme les deux vecteurs $\bar{u}$ et v
- Sa direction est perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs $\bar{u}$ et v ($\bar{w} \perp \bar{u}$ et $\bar{w} \perp v$)
- Son sens est soumis à la règle du tire-bouchon (le tire-bouchon tournant de $\bar{u}$ vers v avance vers $\bar{w}$)

On peut définir le sens du vecteur $\bar{w}$ par un vecteur unitaire $\bar{k}$. On écrit alors $\bar{w} = w\bar{k}$

Le sens du vecteur $\bar{w}$ (ou du vecteur $\bar{k}$) peut être défini par la règle du trièdre direct. Les trois vecteurs $\bar{u}$, v, $\bar{w}$ forment un trièdre. Si un observateur allongé sur le premier vecteur $\bar{u}$, regardant le second vecteur v le troisième vecteur $\bar{w}$ est à sa gauche, dans le cas inverse on dit que le trièdre est indirect.

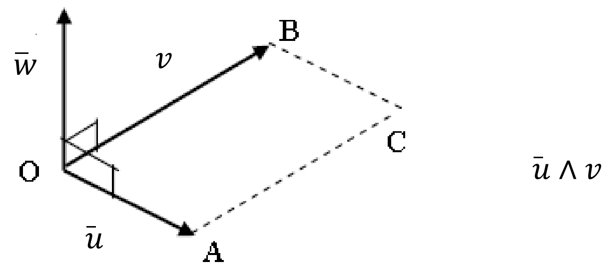


Figure 18 : Produit vectoriel selon un trièdre direct.

Dans le cas de $\bar{u} \wedge v$, le tire-bouchon tourne de A vers B, il avance donc vers le haut suivant $\bar{w}$.

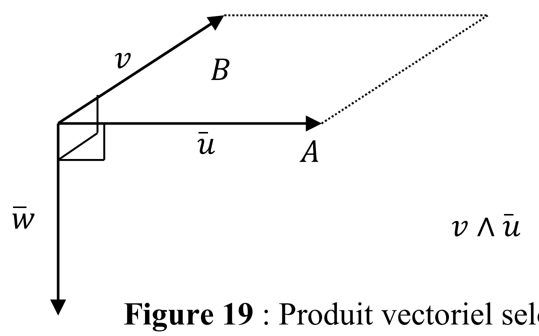


Figure 19 : Produit vectoriel selon un trièdre indirect.

Dans le cas de $v \wedge \bar{u}$, le tire-bouchon tourne de B vers A, il avance dons vers le bas suivant $\bar{w}$

I.5.6.1. Propriétés

$\bar{u} \wedge v$ = -$\bar{u} \wedge v$ le produit vectoriel n'est pas commutatif

$\bar{u} \wedge (v \wedge \bar{w}) \neq (\bar{u} \wedge v) \wedge \bar{w}$ le produit vectoriel n'est pas associatif

$\bar{u} \wedge (v + \bar{w}) = (\bar{u} \wedge v) + (\bar{u} \wedge \bar{w})$ le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition

$(\alpha.\bar{u}) \wedge (\beta.v) = \alpha\beta.(\bar{u} \wedge v)$ loi de la linéarité

Si $\bar{u} \wedge v = \bar{0}$ soit l'un des deux vecteurs est un vecteur nul, soit les deux vecteurs sont parallèles

Les vecteurs unitaires de la base cartésienne satisfont les relations suivantes :

$\imath \wedge \imath = \jmath \wedge \jmath = \bar{k} \wedge \bar{k} = \bar{0}$

$\imath \wedge \jmath = \bar{k}, \quad \jmath \wedge \bar{k} = \imath, \quad \bar{k} \wedge \imath = \jmath$. Pour retrouver ces formules, on peut utiliser la "Règle des trois doigts" de la main droite.

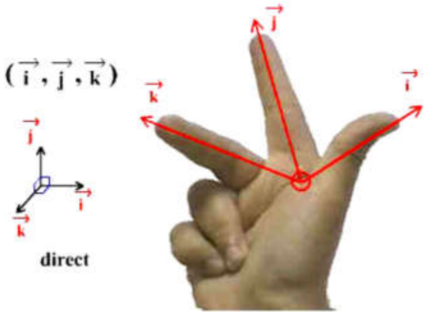


Figure 20 : Règles des trois doigts" de la main droite.

On associe les vecteurs de base $(\imath, \jmath, \bar{k})$ aux axes d'un trièdre rectangle formé par les trois doigts de la main droite comme montré plus haut sur la figure. Pour former un **trièdre direct**, on oriente le vecteur

- $\imath$ dans la direction du pouce
- $\jmath$ dans la direction de l'index
- $\bar{k}$ dans la direction du majeur

Remarques

- $\|\bar{u} \wedge v\|$ est l'aire d'un parallélogramme de côtés u et v.

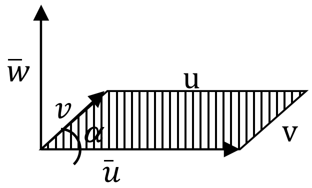


Figure 21 : Module du produit vectoriel.

$w = u.v.sin\alpha$, $\bar{w}$ est appelé vecteur surface orienté perpendiculairement à la surface définie par $\bar{u}$ et v

I.5.6.2. Expression analytique

Considérons deux vecteurs $\bar{u}$ et v définis dans un repère orthogonal direct de base cartésienne (O, $\imath, \jmath, \bar{k}$) par leurs composantes (u_x,u_y,u_z) et (v_x,v_y,v_z) respectivement, leur produit vectoriel est définie par la relation:

$$\bar{u} \wedge v = \begin{bmatrix} \imath & \jmath & \bar{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = (u_y.v_z \quad u_z.v_y)\imath + (u_z.v_x \quad u_x.v_z)\jmath + (u_x.v_y \quad u_y.v_x)\bar{k}$$

I.5.7. Double produit vectoriel

On appelle double produit vectoriel entre trois vecteurs $\bar{\mathrm{U}}$, $\bar{\mathrm{V}}$, $\bar{\mathrm{W}}$ le vecteur $\bar{\mathrm{D}}$ ou $\overline{\mathrm{D}'}$, où le vecteur $\bar{\mathrm{D}}$ ou $\bar{\grave{\mathrm{D}}}$ est défini par :

$$\bar{\mathrm{D}} = \bar{\mathrm{U}} \wedge (\bar{\mathrm{V}} \wedge \bar{\mathrm{W}}) = (\bar{\mathrm{U}}.\bar{\mathrm{W}})\bar{\mathrm{V}} \quad (\bar{\mathrm{U}}.\bar{\mathrm{V}})\bar{\mathrm{W}}$$

$$\overline{\mathrm{D}'} = (\bar{\mathrm{U}} \wedge \bar{\mathrm{V}}) \wedge \bar{\mathrm{W}} = (\bar{\mathrm{U}}.\bar{\mathrm{W}})\bar{\mathrm{V}} \quad (\bar{\mathrm{V}}.\bar{\mathrm{W}})\bar{\mathrm{U}}$$

Dans le cas de la base orthonormée directe :

$$(\imath \wedge \jmath) \wedge \bar{k} = (\bar{k} \wedge \imath) \wedge \jmath = (\jmath \wedge \bar{k}) \wedge \imath = \bar{0}$$

I.5.8. Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs $\bar{u}$, v et $\bar{w}$ est noté : [$\bar{u}$,v,$\bar{w}$] tel que :

[$\bar{u}$,v,$\bar{w}$]= $\bar{u}.(v \wedge \bar{w})$. C'est un scalaire qui représente le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs $\bar{u}$, v et $\bar{w}$ de cotés u, v et w

I.5.8.1. Expression analytique

Considérons trois vecteurs $\bar{u}$, v et $\bar{w}$ définis dans un repère orthogonal direct de base cartésienne (O, $\imath$, $\jmath$, $\bar{k}$) par leurs composantes (u_x,u_y,u_z), (v_x,v_y,v_z) et (w_x,w_y,w_z) respectivement, leur produit mixte est définie par la relation:

$$\bar{u}.(v \wedge \bar{w}) = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_x \end{bmatrix} = (u_y.v_z \quad u_z.v_y)u_x + (u_z.v_x \quad u_x.v_z)u_y + (u_x.v_y \quad u_y.v_x)u_z$$

I.5.8.2. Propriétés

En utilisant l'expression analytique, on peut vérifier facilement que le produit mixte satisfait les propriétés suivantes :

- En permutant l'ordre de deux vecteurs, le produit mixte change de signe :

$$[\bar{u},v,\bar{w}]=-[v,\bar{u},\bar{w}]=[v,\bar{w},\bar{u}]$$

- En faisant une permutation circulaire, le produit mixte reste inchangé

I.5.9. Dérivés de vecteurs

Soit le vecteur $\bar{u}$, défini dans un repère orthogonal direct de base $(\imath, \jmath, \bar{k})$ fixe, par ses composantes dépendantes d'une variable t (le temps par exemple) :

Pour simplifier l'écriture, on va considérer les composantes de $\bar{u}(t)$:

$$\bar{u}(t)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

On dit que le vecteur $\bar{u}$ est une fonction vectorielle,

$$\frac{d\bar{u}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\imath + \frac{dy(t)}{dt}\jmath + \frac{dz(t)}{dt}\bar{k}$$

I.5.9.1. Propriétés

Soit deux fonctions vectorielles $\bar{u}(t)$ et $v(t)$

$$\frac{d(\bar{u}(t)+\bar{v}(t))}{dt} = \frac{d\bar{u}(t)}{dt} + \frac{d\bar{v}(t)}{dt}$$

$$\frac{d(\bar{u}(t).\bar{v}(t))}{dt} = \frac{d\bar{u}(t)}{dt}.\,v(t) + \bar{u}(t).\,\frac{d\bar{v}(t)}{dt}$$

$$\frac{d(\bar{u}(t)\wedge\bar{v}(t))}{dt} = \frac{d\bar{u}(t)}{dt} \wedge v(t) + \bar{u}(t) \wedge \frac{d\bar{u}(t)}{dt}$$

Soit f(t) une fonction scalaire, alors $\frac{d(f(t)\bar{u}(t))}{dt} = \frac{df(t)}{dt}\bar{u}(t) + f(t)\,\frac{d\bar{u}(t)}{dt}$

I.5.10. Intégrales de vecteurs

Soit un vecteur $\bar{u}(t)$ défini dans un repère fixe. Ce vecteur est une fonction de t (donc une fonction vectorielle), ses composantes sont :

$$\bar{u}(t)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

On définit une intégrale de $\bar{u}(t)$ par :

$$\int \bar{u}(t)\,dt = \imath \int x(t)\,dt + \jmath \int y(t)\,dt + \bar{k} \int z(t)\,dt =$$

Donc l'intégrale d'un vecteur $\bar{u}(t)$ est un vecteur dont les composantes sont les intégrales des composantes du vecteur $\bar{u}(t)$

Chapitre II : Cinématique

II.1. Introduction

La cinématique fait partie de la mécanique qui est elle-même une branche de la physique. C'est l'étude du mouvement d'un corps sans se soucier de ce qui l'a causé (la force). C'est-à-dire la modification apparente de sa position avec le temps. L'étude du mouvement d'un corps passe par la détermination de sa position au cours du temps, de sa vitesse et accélération, tout en sachant que ce mouvement n'a qu'un sens relatif : par rapport à un repère spatial et une origine temporelle. Par exemple, un objet qui tombe dans un bus en mouvement semble avoir une trajectoire linéaire, vertical par rapport à un passager assis dans le bus, cette trajectoire aura une forme parabolique par rapport à un passage assis à l'arrêt de bus !

II.2. Point matériel

Un objet en mouvement peut être considéré comme un point matériel lorsque ses dimensions sont négligeables devant les distances étudiées. Dans ce cas, l'objet est assimilé à un point M et sa masse m est concentrée dans son centre de gravité. Par conséquent tout effet de rotation du corps autour de luis même ou son extension spatial sera négligé.

Exemple : une bille en chute libre est considérée comme un point matériel, non pas parce qu'elle est petite mais parce que ses dimension sont négligeables devant la distance parcourue.

La terre peut être considérée comme un point matériel par rapport au système solaire !

II.3. Référentiel

Le mouvement ou le repos n'ont qu'un sens relatif, autrement dit, on ne peut pas dire qu'un point matériel est en mouvement sans préciser par rapport à quoi ? Par exemple : considérons un train au départ de la gare et qui démarre avec une vitesse faible. Un passager A coure à proximité du train et à la même vitesse pour faire des adieux à un passage B dans le train. Le passager B voit le passager A immobile (au repos). Un troisième passager C attend au quai, vas voir les deux passages A et B en mouvement ! Alors quelle observation est correcte : repos ou mouvement ? Pour répondre à la question il faut préciser un système de référence, ou un référentiel par rapport à quoi on va étudier le mouvement.

Donc on peut définir un référentiel comme étant un objet auquel est associé un observateur fixe muni d'un repère temporel, et le mouvement sera donc étudié par rapport à ce référentiel.

Un référentiel est un repère d'espace (qu'on a défini au chapitre précédent) associé à un repère de temps (origine de temps).

Ce mouvement peut être

- Une translation
- Une rotation
- Une vibration
- Combinaison de ces mouvements

II.3.1. Repère de l’espace

Pour déterminer la position d’un point matériel au cours du temps, nous avons besoin d’un repère. Ce dernier a été décrit au chapitre précédent, nous nous contentons de rappeler l’essentiel. Nous considérons un repère composé d’un système de trois axes orientés (munis de vecteurs unitaires) afin de déterminer l’échelle, d’une origine à laquelle est solidaire un observateur et une origine de temps. Souvent, nous utilisons un repère cartésien orthonormé direct, muni d’une base $(O, \imath, \jmath, \bar{k})$ plus une origine de temps, le référentiel sera noté :

$$\mathcal{R}\,(O, \imath, \jmath, \bar{k})$$

Remarque **:** le temps n’est pas représenté dans la notation du référentiel car il n’est pas propre à un référentiel donné. Ici, nous considérons que le temps a un sens absolu, il est le même dans tout référentiel (c’est un principe dans la mécanique classique).

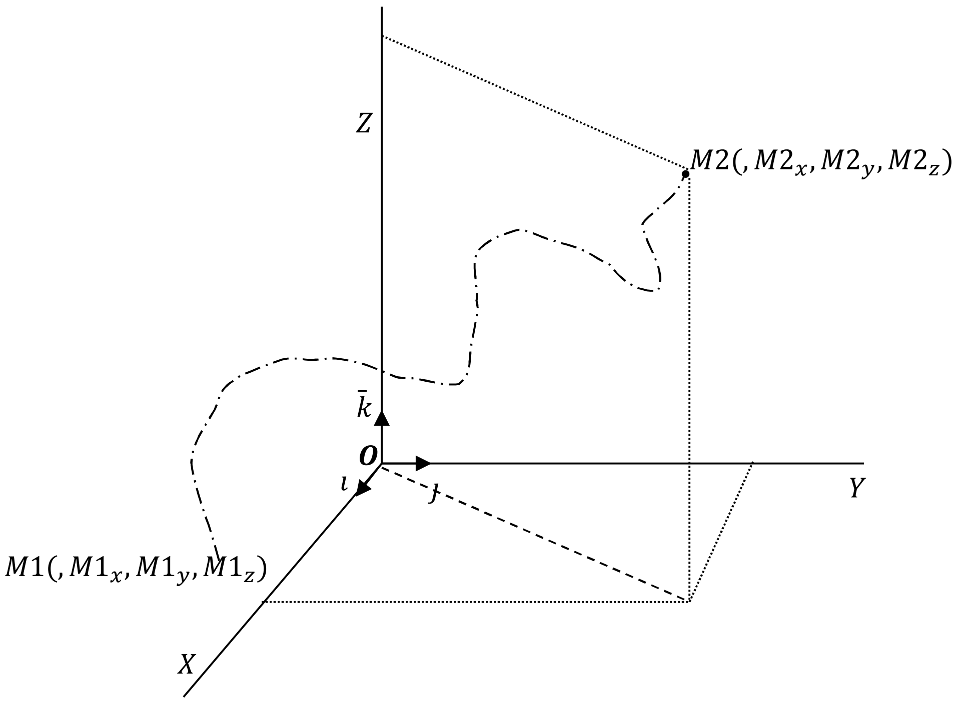


Figure 22 : déplacement du point M dans le référentiel

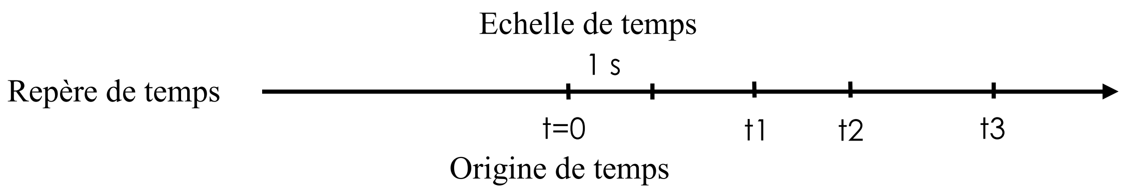


Figure 23 : Repère de temps.

II.4. Trajectoire

Dans un référentiel donné, si nous relions l'ensemble des points par lesquels un mobil est passé successivement dans le temps, nous obtiendrons une forme géométrique appelée la **trajectoire.** Nous citons quelques trajectoires communes : trajectoires rectiligne, trajectoire circulaire, trajectoire curviligne…etc.

II.5. Diagramme des espaces

La variation de la position d'un mobile en fonction du temps, dans un référentiel donné est appelé **équation horaire.** La courbe représentante de l'équation horaire est appelée digramme des espaces. Elle n'a pas forcément la même allure que la trajectoire.

Exemple : on considère une masse ponctuelle attachée à l'extrémité d'un ressort fixé par un support. Si on écarte verticalement cette masse par rapport à sa position d'équilibre puis on la relâche, comme schématisé ci-dessous :

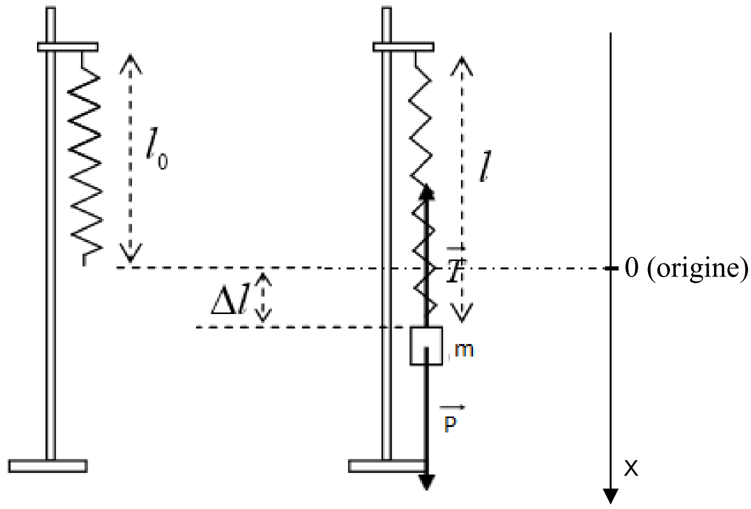


Figure 24 : Mouvement d'une masse attachée à un ressort.

La masse m va décrire une trajectoire rectiligne (une droite). Son équation horaire est : x=acos(wt), sa courbe représentative est sinusoïdale. Donc la trajectoire et le diagramme des espaces ne sont pas les mêmes.

II.6. Système de coordonnées

Lors du mouvement d'un mobil, nous avons besoin de déterminer à tout un instant, la position de ce point par rapport à un repère. Cette position est définie par un système de coordonnées. Un système de coordonnées cartésiennes est l'un des repères qu'on utilise souvent pour l'étude du mouvement d'un point. Mais, selon le mouvement étudié, il est parfois plus judicieux d'utiliser d'autres systèmes de coordonnées, donc d'autres repères, nous citons quelques-uns : système de coordonnées cylindriques, système de coordonnées polaires, système de coordonnées sphériques, système de coordonnées cartésiennes.

II.6.1. Repère cartésien

Un repère cartésien est formé par un système de trois axes (x'Ox), (y'Oy) et (z'Oz) perpendiculaires deux à deux. Ces trois axes sont munis de vecteurs unitaires $(\imath, \jmath, \bar{k})$ respectivement. On parle alors d'un repère orthonormé direct de base cartésienne (O, $\imath, \jmath, \bar{k}$), avec O comme origine et :

x'Ox est l'axe des abscisses. L'abscisse d'un point est noté x, un scalaire qui peut prendre une valeur réelle de -∞ à +∞

y'Oy est l'axe des ordonnées. L'ordonnée d'un point est noté y, un scalaire qui peut prendre une valeur réelle de -∞ à +∞

z'Oz est l'axe des côtés. La côte d'un point est noté z, un scalaire qui peut prendre une valeur réelle de -∞ à +∞

Le vecteur position d'un point M dans ce repère sera :

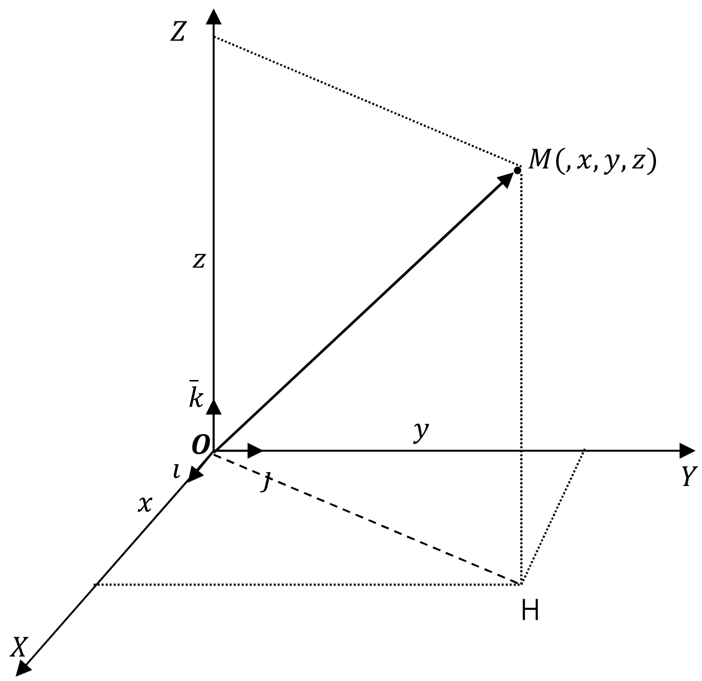


Figure 25 : Coordonnées d'un point M dans un repère cartésien.

$\overline{OM}$=$\overline{OH}$+$\overline{HM}$

Avec, $\overline{OH}$=$x.\imath + y.\jmath$

$\overline{HM}$=$z.\bar{k}$

D'où, $\overline{OM}$=$x.\imath + y.\jmath + z.\bar{k}$

Son module $\|\overline{OM}\|$=$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

II.6.2. Repère cylindrique

Si la trajectoire d'un mobile M prend une forme cylindrique, il sera plus judicieux de choisir un repère cylindrique pour l'étude de ce mouvement.

Considérons un mobil M dans un repère cartésien de base $(i, j, \bar{k})$. La base cylindrique $(\bar{u}_\rho, \bar{u}_\theta, \bar{k})$ s'obtient par rotation de la base $(i, j, \bar{k})$ d'un angle θ autour de l'axe oz.

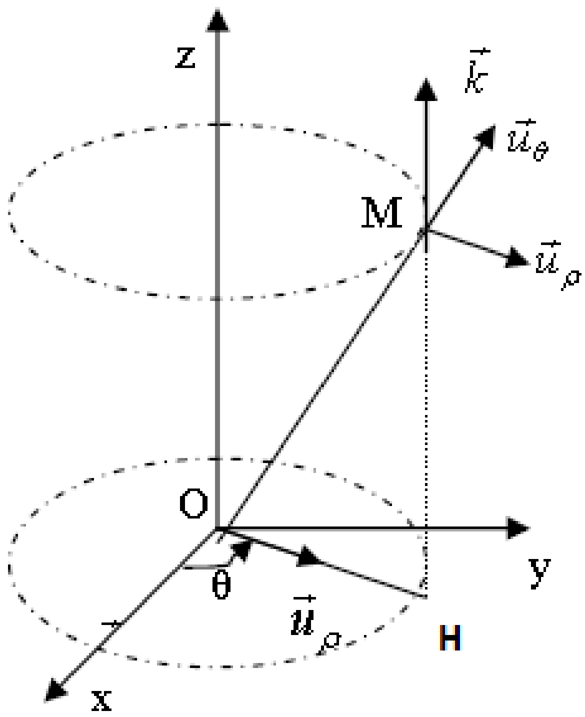


Figure 26 : Coordonnées d'un point M dans un repère cylindrique.

Le système de coordonnées cylindriques est défini donc par :

- ρ : le rayon polaire, il représente le module du vecteur $\overline{OH}$, H étant la projection du point M sur le plan (Oxy). $\rho=||\overline{OH}||=\sqrt{x^2+y^2}$
- θ : l'angle polaire, c'est l'angle entre l'axe (Ox) et le vecteur $\overline{OH}$
  $\theta=\text{Arctan}(\frac{y}{x})$
- z = z

On retrouve les coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées cylindriques suivant les relations :

$x=\rho\cos\theta$
$y=\rho\sin\theta$
$z=z$

II.6.2.1. Différentielle du vecteur position dans le système de coordonnées cylindriques

Considérons un point mobil dans un repère orthonormé direct de base cartésienne (O, $\imath, \jmath, \bar{k}$)

Rappelons que : $d\overline{OM} = dx.\imath + dy.\jmath + dz.\bar{k}$

Sachant que

$x=\rho\cos\theta \rightarrow dx = -\rho.\sin\theta.d\theta + \cos\theta.d.\rho$

$y= \rho\sin\theta \rightarrow dy = \rho.\cos\theta.d\theta + \sin\theta.d\rho$

$z=z \rightarrow dz=dz$

donc, $d\overline{OM} = (\ \rho.\sin\theta.d\theta\ +\ \cos\theta.d\rho\ )\imath + (\rho.\cos\theta.d\theta + \sin\theta.d\rho)\jmath + dz.\bar{k}$

$$\underbrace{(\cos\theta.\imath + \sin\theta.\jmath)}_{\bar{u}_\rho} d\rho + \rho \underbrace{(\ .\sin\theta.\imath + \cos\theta.\jmath\ )}_{\bar{u}_\theta} d\theta + \underbrace{\bar{k}}_{\bar{u}_z}.\,dz$$

Donc, $d\overline{OM} = \bar{u}_\rho\, d\rho + \rho\, \bar{u}_\theta\, d\theta + \bar{u}_z\, dz$

Avec,

$\bar{u}_\rho = \cos\theta.\imath + \sin\theta.\jmath$

$\bar{u}_\theta = -\sin\theta.\imath + \cos\theta.\jmath$

$\bar{u}_z = \bar{k}$

D'où, le vecteur position $\overline{OM} = x.\imath + y.\jmath + z.\bar{k} = \rho\cos\theta\, \imath + \rho\sin\theta\, \jmath + z.\bar{k}$

$= \rho(\cos\theta\, \imath + \sin\theta\, \jmath\,) + z.\bar{k}$

$= \rho.\bar{u}_\rho + z.\bar{k}$

$\|\overline{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

Remarque **:**

$\bar{u}_\rho = \cos\theta\, \imath + \sin\theta\, \jmath$

$\frac{d\bar{u}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta\, \imath + \cos\theta\, \jmath$,

Connaissant les relations trigonométriques suivantes : $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) =\quad \sin\theta$ et $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$

$\frac{d\bar{u}_\rho}{d\theta} = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})\, \imath + \sin(\theta + \frac{\pi}{2})\, \jmath$: c'est un vecteur obtenu par la rotation de $\bar{u}_\rho$ d'un angle de $\frac{\pi}{2}$

D'où, on peut écrire : $\frac{d\bar{u}_\rho}{d\theta} = \bar{u}_\theta$

On peut vérifier facilement que : $\frac{d\bar{u}_\theta}{d\theta} = -\bar{u}_\rho$

II.6.3. Système de coordonnées polaires

Si le mobile effectue une rotation dans un plan (O,x,y) alors le system de coordonnées cylindriques se réduit à un système de coordonnées polaires, où z n'intervient pas.

Le système de coordonnées polaires est défini par (ρ,θ), où ρ et θ se définissent de la même manière comme en coordonnées cylindriques.

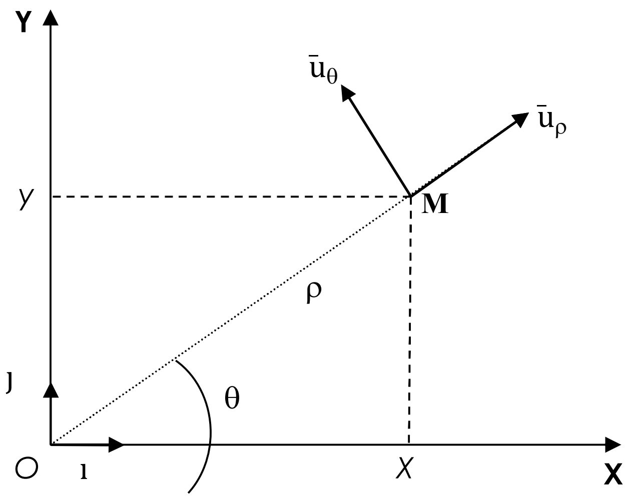


Figure 27 : Coordonnées d'un point M dans un repère polaire.

$\overline{OM}$=ρcosθ ı +ρsinθ ȷ = ρ $\bar{u}_\rho$
Où, $\bar{u}_\rho$= =cosθ ı +sinθ ȷ et, $\bar{u}_\theta$ = -sinθ ı +cosθ ȷ
ρ=$\sqrt{x^2+y^2}$ et θ=Arctan($\frac{y}{x}$)
On retrouve facilement les coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées polaires :
x=ρcosθ
y=ρsinθ

II.6.4. Système de coordonnées sphériques

Considérons un point mobil dans un repère orthonormé direct de base cartésienne (O, ı, ȷ, $\bar{k}$) et que ce point se déplace suivant une symétrie sphérique. Le repère le mieux adapté est un repère de coordonnées sphériques défini par les coordonnées suivantes (r,θ,φ) avec :

r = $\|\overline{OM}\|$: la coordonnée radiale, elle correspond à la distance de l'origine O du repère au point M

r = $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

θ : la coordonnée angulaire ; c'est l'angle que fait OM avec l'axe Oz, appelé colatitude ou zénith. Il est compris entre 0 et π.

θ = Arccos ($\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$)

φ : la coordonnée angulaire. Cette angle, compris entre 0 et 2π, appelé la longitude ou l'azimut est l'angle formé par l'axe (Ox) et l'axe (OH), où H est la projection du point M sur la plan (xOy).

θ = Arctan ($\frac{y}{x}$)

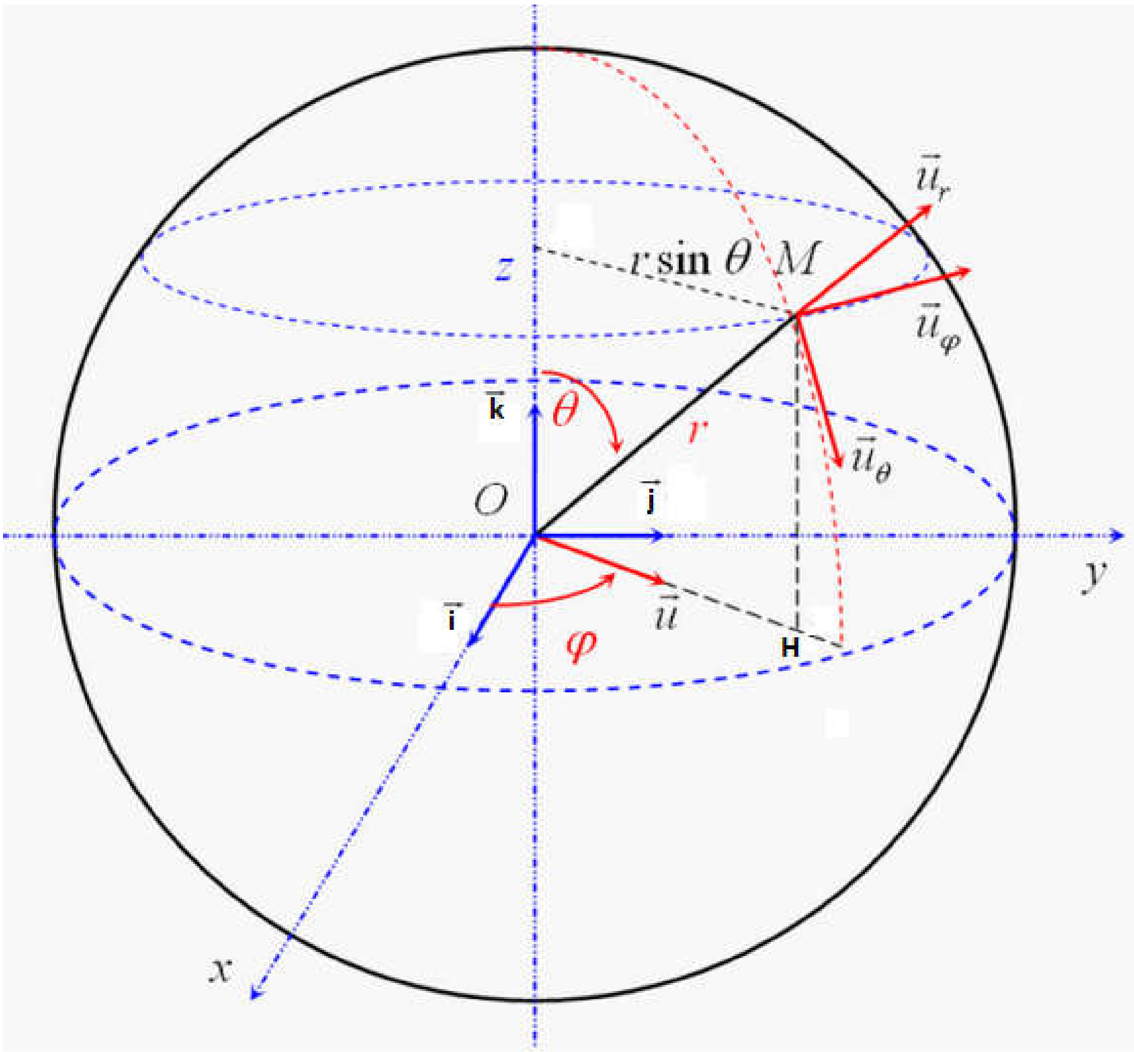


Figure 28 : Coordonnées d'un point M dans un repère sphérique.

On peut retrouver facilement les coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées sphériques :

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

II.6.4.1. La base de coordonnées sphériques

La base de coordonnées sphériques est composée d'un système de trois vecteurs unitaires $(\bar{u}_r, \bar{u}_\theta, \bar{u}_\varphi)$ se définissant comme suit :

$\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{r}$: le vecteur unitaire radial dont la droite support est (OM), et le sens est de O vers M.

$\bar{\mathbf{u}}_\theta$: Lorsque le point M se déplace sans faire varier l'angle φ, donc seul l'angle θ varie, alors le point M va décrire un demi-cercle, appelé (méridien) de rayon r. Le vecteur unitaire $\bar{u}_\theta$ est tangentiel à ce demi-cercle au méridien.

$\bar{\mathbf{u}}_\varphi$: Lorsque, lors du déplacement du point M, l'angle θ est constant, alors ce point va décrire un cercle de rayon rsinθ. Le vecteur unitaire $\bar{u}_\varphi$ sera la tangente à ce cercle (suivant un parallèle) orienté comme φ.

II.6.4.2. Expressions de $\bar{\mathbf{u}}_r$ $\bar{\mathbf{u}}_\theta$ et $\bar{\mathbf{u}}_\varphi$ dans la base cartésienne

Rappelons que : $\overline{OM} = x.\imath + y.\jmath + z.\bar{k}$ = r . $\bar{\mathbf{u}}_r$

Or, x = rsinθcosφ

y = rsinθsinφ

z = rcosθ

On déduit : $\bar{\mathbf{u}}_r$ = sinθcos$\varphi\,\imath$+ sinθsin$\varphi\,\jmath$ + cos$\theta\,\bar{k}$

Pour $\bar{u}_\theta$ et $\bar{u}_\varphi$ nous utilisons la différentielle $d\overline{OM} = dx.\imath + dy.\jmath + dz.\bar{k}$

Or, dx= sinθcosφ dr + rcosθcosφ dθ - rsinθsinφ dφ

dy= sinθsinφ dr+ rcosθsinφ dθ+ rsinθcosφ dφ

dz= cosθ dr - rsinθ dθ

Nous obtenons : $d\overline{OM} = dr.\bar{\mathbf{u}}_r + rd\theta.\bar{\mathbf{u}}_\theta + rsin\theta d\varphi.\bar{\mathbf{u}}_\varphi$

Avec : $\bar{\mathbf{u}}_\theta$ = cosθcos$\varphi.\imath$ + cosθsin$\varphi.\jmath$ $\quad sin\theta.\bar{k}$

$\bar{\mathbf{u}}_\varphi$ = $\quad$ sin$\varphi.\imath$ + cos$\varphi.\jmath$

Remarque

- La base ($\bar{u}_r$, $\bar{u}_\theta$, $\bar{u}_\varphi$) est une base orthonormé direct
- $\bar{\mathbf{u}}_\varphi = \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_r}{\partial\varphi}$
- $\bar{\mathbf{u}}_\theta = \frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_r}{\partial\theta}$

II.6.5. Abscisse curviligne et base de Frenet

Considérons un point mobil effectuant un mouvement curviligne dans le plan. Lorsque la trajectoire de M est connue, on peut le repérer sur la trajectoire orientée par une abscisse curviligne S comme dans la figure ci-dessous :

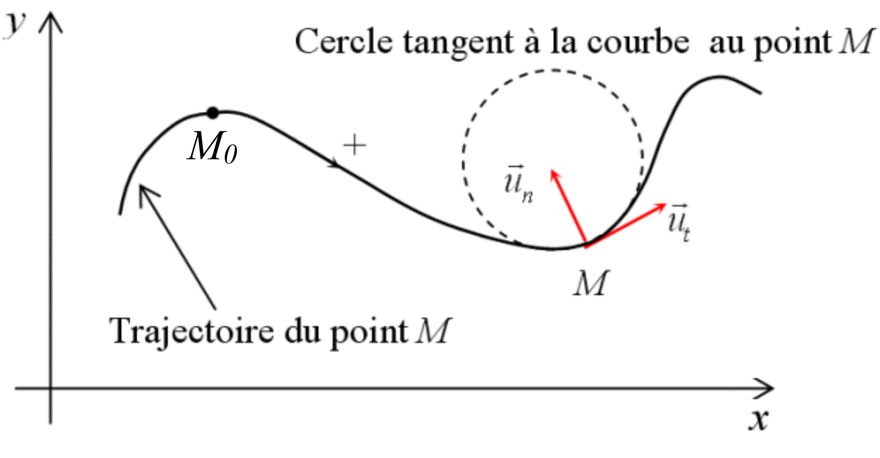


Figure 29 : Abscisse curviligne et base de Frenet.

Pour mesurer l'abscisse curviligne S(t) à tout instant, nous avons besoin d'un point origine (M_0) ; c'est la position de M l'instant t=0 et d'un sens.

S(t)=$\widehat{M_0M}$; c'est la longueur de l'arc (M_0M) : une valeur algébrique.

La base de Frenet est définie par les deux vecteurs :
$\bar{u}_T$: Vecteur unitaire tangent à la courbe en M et orienté dans le sens du mouvement
$\bar{u}_N$: Vecteur perpendiculaire à $\bar{u}_t$ orienté vers la concavité de la trajectoire. Il est orienté vers le centre d'un cercle (cercle osculateur) de rayon ρ et qui tangente la courbe en M.

Pour compléter un trièdre, on choisit un troisième vecteur $\bar{u}_B$ tel que :
$\bar{u}_B = \bar{u}_T \wedge \bar{u}_N$

La base de Frenet sera donc défini par le trièdre direct ($\bar{u}_N$, $\bar{u}_T$, $\bar{u}_B$)

Considérons deux positions successives M et M' très proches l'une de l'autre correspondant aux instants t et t' respectivement.
MM' = ds
t' = t + dt ; (dt est un laps de temps infiniment petit)
Donc, $\overline{MM'} = ds.\,\bar{u}_T$
D'où $\bar{u}_T = \frac{\overline{MM'}}{ds}$
Comme les points M et M' sont très proches, on note $\overline{MM'} = \overline{dr}$
$\bar{u}_T = \frac{\overline{dr'}}{ds}$
Comme pour la base polaire, on a $\bar{u}_N = \frac{d\bar{u}_T}{d\theta}$
Or, ds = ρ.dθ → $\bar{u}_N = \rho\,\frac{d\bar{u}_T}{ds}$

II.7. Description du mouvement d'un point matériel

II.7.1. Vecteur position

Soit un mobil dans un référentiel donné (O, ı, ȷ, $\bar{k}$,). La position de ce point à l'instant t est définie par le vecteur position r (t) reliant l'origine au point M.

r(t) =$\overline{OM}$ (t)

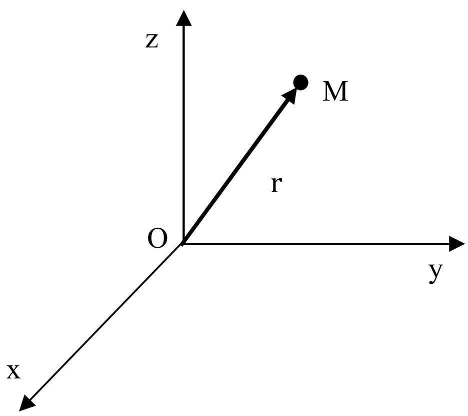


Figure 30 : vecteur position dans un repère.

Le déplacement de ce point au cours du temps sera défini par un vecteur déplacement : $\overline{\Delta}r(t) = r(t_f) \quad r(t_i)$, où $r(t_f)$ est le vecteur position à l'instant t_f, et $r(t_i)$ est le vecteur position à l'instant t_i.

II.7.1.1. Vecteur position avec les coordonnées cartésiennes

Dans un repère orthonormé directe (O, ı, ȷ, $\bar{k}$,). Les composantes du vecteur position d'un point mobil M sont :

$r(t) = \overline{OM}(t) = x(t).\imath + y(t).\jmath + z(t).\bar{k}$

Son module $\|\overline{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

x, y et z sont les composantes du vecteur $\overline{OM}$, ou encore les coordonnées du point M.

II.7.1.2. Vecteur position avec les coordonnées cylindriques

Considérons un repère à base cylindrique orthonormée directe ($\bar{u}_\rho$, $\bar{u}_\theta$, $\bar{k}$), cette base est mobile. Les coordonnées d'un point M sont (ρ,θ,z)

Le vecteur position est : $\overline{OM}$ (t)= $\rho(t).\bar{u}_\rho + z(t).\bar{k}$

$$\|\overline{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Si z ne varie pas en fonction du temps, alors le repère précédent se réduit à un repère bidimensionnel de base ($\bar{u}_\rho$, $\bar{u}_\theta$), cette base est mobile. Les coordonnées du point M sont (ρ,θ)

Le vecteur position est : $\overline{OM}$ (t)= $\rho(t).\bar{u}_\rho$

$$\|\overline{OM}\| = \rho(t)$$

II.7.1.4. Vecteur position avec les coordonnées sphériques

Soit un repère à base sphérique orthonormée directe ($\bar{u}_r$, $\bar{u}_\theta$, $\bar{u}_\varphi$), cette base est mobile. Les coordonnées du point M sont (r,θ,φ).

Le vecteur position est : $\overline{OM}$ (t)= $r(t).\bar{u}_r$

$$\|\overline{OM}\| = r(t)$$

Remarque : les composantes du vecteur position sont (ρ,0,0), or les coordonnées du point M sont (ρ,θ,φ)

II.7.2. Vitesse

Pour faciliter la compréhension de la notion de la vitesse, nous considérons le cas le plus simple : mouvement rectiligne où la trajectoire est une droite et le repère est réduit à une dimension : une origine et un axe (Ox)

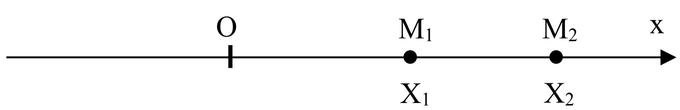


Figure 31 : Repérage d'un point sur un axe.

M_1 et M_2 sont deux positions d'un mobile sur l'axe (Ox) aux instants t_1 et t_2.

Le rapport de la distance parcourue ($d = x_2 - x_1$) sur la durée ($\Delta t = t_2 - t_1$) mise pour la parcourir est appelée ***vitesse moyenne*** :

$V_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

Et l'expression vectorielle sera : $\bar{V}_m = \frac{\overline{OM}_2 - \overline{OM}_1}{t_2 - t_1}$

Rappelons que $\overline{OM}_2 \quad \overline{OM}_1$ est le vecteur déplacement Δr

$\bar{V}_m = \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}$, avec $\Delta t = t_2 - t_1$

Lorsque l'écart entre les deux instant t_2 et t_1 infiniment petit, on écrit :

$\partial t = t_2 - t_1$ et la vitesse moyenne devient une ***vitesse instantanée.***

$$\bar{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t) \quad r(t + \Delta t)}{\Delta t}$$

La vitesse instantanée correspond alors à la dérivée par rapport au temps du vecteur position.

$$\bar{V}(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

Remarques

- Le vecteur vitesse est la tangente à la trajectoire au point M.
- Son sens est celui du déplacement. Autrement dit, si $x_2 > x_1$ alors $v > 0$

  si $x_2 < x_1$ alors $v < 0$

- Son unité $m.s^{-1}$

Le vecteur vitesse peut avoir différentes expressions selon le système de coordonnées choisi.

II.7.2.1. Vecteur vitesse avec les coordonnées cartésiennes

Considérons un repère orthonormé directe de base ($O, \imath, \jmath, \bar{k}$),

Le vecteur position $\overline{OM}(t) = \bar{r}\ (t) = x(t).\imath + y(t).\jmath + z(t).\bar{k}$

Où, x(t), y(t) et z(t) sont les composantes du vecteur position $\overline{OM}$, ou encore : les coordonnées du points M. Ces composantes dépendent du temps.

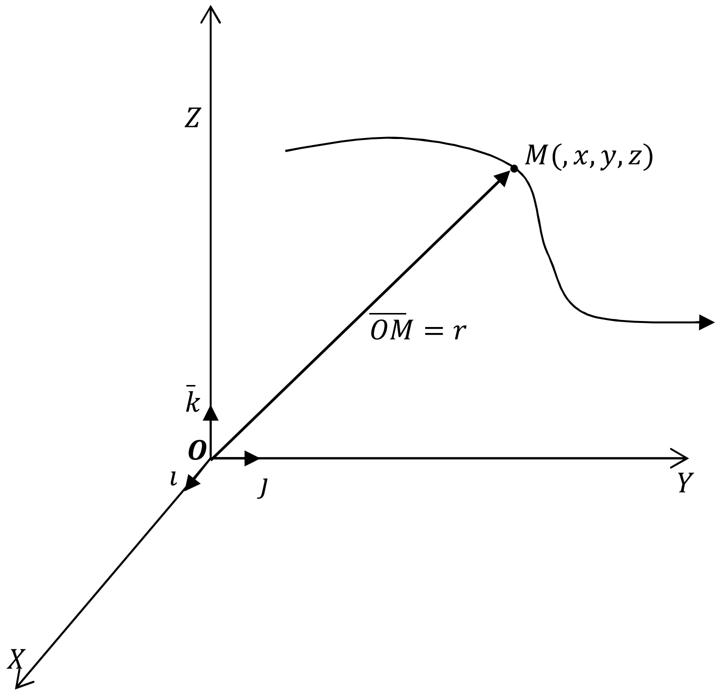


Figure 32 : Mouvement d'un point dans un repère.

v(t) = $\frac{d\overline{OM}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\ x(t).\imath + y(t).\bar{\jmath} + z(t).\bar{k}\ )$

Sachant que $\imath$, $\jmath$, et $\bar{k}$ sont constants, ne dépendent pas du temps, alors :

$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}\imath + \frac{dy(t)}{dt}\jmath + \frac{dz(t)}{dt}\bar{k}$

Pour simplifier l'expression, souvent on note :

v(t) = $x\imath + y\jmath + z\bar{k}$

Avec, $x = \frac{dx}{dt}$, $y = \frac{dy}{dt}$, $z = \frac{dy}{dt}$

Donc, les composantes du vecteur vitesse : v(t) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

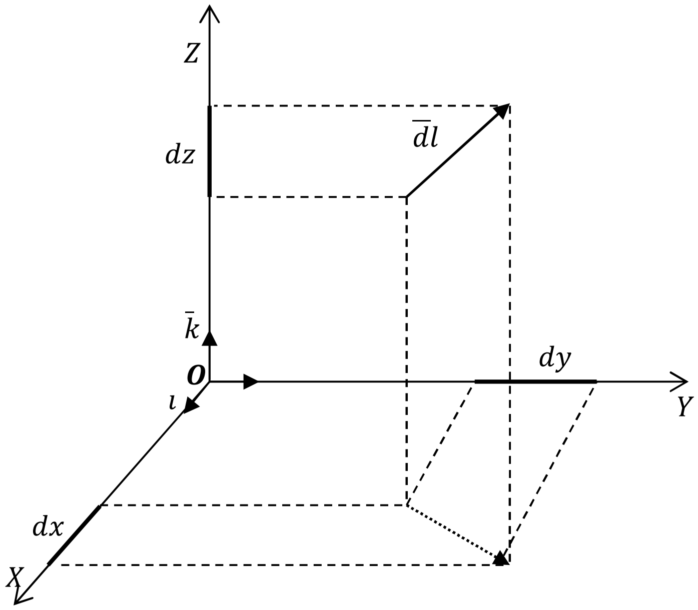
Son module : $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

De l'expression de la vitesse instantanée, on peut déduire le déplacement élémentaire dr qu'on note souvent dl :

dl=v(t).dt = $dx.\imath + dy.\jmath + dz.\bar{k}$

dx, dy et dz sont les déplacements élémentaires suivantes les axes (Ox), (Oy) et (Oz) respectivement.

Figure 33 : déplacement élémentaire dans un repère.



II.7.2.2. Vitesse avec les coordonnées cylindriques

Considérons un repère de coordonnées cylindriques (ρ,θ,z) muni d'une base mobile orthonormé direct ($\bar{u}_\rho$, $\bar{u}_\theta$, $\bar{k}$).

Rappelons que les vecteurs unitaires $\bar{u}_\rho$, $\bar{u}_\theta$ tournent au cous du temps mais leurs modules sont constants. Le vecteur unitaire $\bar{k}$ ne varie pas au cours du temps, ni de sens ni de module.

Rappelons l'expression du vecteur position en coordonnées cylindriques :

$\overline{OM}= \rho.\bar{u}_\rho + z.\bar{k}$

$v(t) = \frac{d\overline{OM}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho.\bar{u}_\rho + z.\bar{k}\right) = \frac{d\rho}{dt}\bar{u}_\rho + \rho.\frac{d\bar{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\bar{k} + z.\frac{d\bar{k}}{dt}$

$\frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{0}$, car le vecteur unitaire $\bar{k}$ ne change pas au cours du temps

$\frac{dz}{dt} = z$ et $\frac{d\rho}{dt} = \rho$

Déterminons $\frac{d\bar{u}_\rho}{dt}$:

Rappelons que $\bar{u}_\rho$ est une fonction de θ ($\bar{u}_\rho$= cosθ.$\bar{\imath}$ + sinθ.$\jmath$) qui elle-même fonction du temps au cours du mouvement. Donc, $\bar{u}_\rho$ est une fonction composée. La dérivation d'une fonction composée permet d'écrire :

$\frac{d\bar{u}_\rho}{dt} = \frac{d\bar{u}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \theta\,\frac{d\bar{u}_\rho}{d\theta}$

θ est appelée vitesse angulaire, notée souvent ω

Nous avons déjà montré que $\frac{d\bar{u}_\rho}{d\theta} = \bar{u}_\theta$ (***la dérivée d'un vecteur unitaire* $\bar{u}$ *(qui ne dépend que de l'angle θ) par rapport à l'angle polaire θ est un vecteur unitaire qui lui est directement perpendiculaire (rotation de π/2 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre : sens positif***)

$\frac{d\bar{u}_\rho}{dt} = \theta\,\bar{u}_\theta$

Il en résulte : $v(t) = \rho\,\bar{u}_\rho + \rho\,\theta\,\bar{u}_\theta + z\,\bar{k}$

Les composantes du vecteur vitesse : $v(t)\begin{pmatrix}\rho\\ \rho\theta\\ z\end{pmatrix}$

Son module est : $||v|| = \sqrt{\rho^{\,2} + (\rho\,\theta)^2 + z^2}$

De l'expression de la vitesse instantanée, on peut déduire le déplacement élémentaire dr qu'on note souvent dl :

dl=v(t).dt = ($\frac{d\rho}{dt}\bar{u}_\rho$ + ρ.$\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta$ + $\frac{dz}{dt}\bar{k}$).dt

dl = $d\rho.\bar{u}_\rho$ + ρ. $d\theta.\bar{u}_\theta$ + dz. $\bar{k}$

Avec, $d\rho$, ρ.$d\theta$ et dz sont les déplacements élémentaires suivant les directions de $\bar{u}_\rho$ (déplacement radial), $\bar{u}_\theta$ (déplacement orthoradial) et $\bar{k}$ (déplacement suivant l'axe Oz) respectivement.

II.7.2.3. Vitesse avec les coordonnées polaires

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse, il suffit d'enlever la composante suivant l'axe (Oz) au système de coordonnées cylindriques :

$v(\mathrm{t}) = \frac{d\overline{OM}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho.\bar{u}_\rho\right) = \frac{d\rho}{dt}\bar{u}_\rho + \rho.\frac{d\bar{u}_\rho}{dt}$

$v(\mathrm{t}) = \rho\,\bar{u}_\rho + \rho\,\theta\,\bar{u}_\theta$

Les composantes du vecteur vitesse : $v(\mathrm{t})\begin{pmatrix}\rho\\ \rho\theta\end{pmatrix}$

Son module est : $||v|| = \sqrt{\rho^{\,2} + (\rho\,\theta)^2}$

Le vecteur déplacement élémentaire est :

dl=v(t).dt = ($\frac{d\rho}{dt}\bar{u}_\rho$ + ρ.$\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta$).dt

dl = $d\rho.\bar{u}_\rho$ + ρ. $d\theta.\bar{u}_\theta$

$d\rho$: déplacement radial

ρ. $d\theta$: replacement orthoradial

II.7.2.4. Vitesse avec les coordonnées sphériques

Considérons un repère de coordonnées sphériques (r,θ,φ) muni d'une base mobile orthonormé direct ($\bar{u}_r$, $\bar{u}_\theta$, $\bar{u}_\varphi$).

Rappelons que les vecteurs unitaires $\bar{u}_r$, $\bar{u}_\theta$ et $\bar{u}_\varphi$ tournent au cours du temps mais leurs modules sont constants.

Rappelons l'expression du vecteur déplacement en coordonnées sphériques :

$d\overline{OM} = dr.\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + rd\theta.\bar{\mathbf{u}}_\theta + rsin\theta d\varphi.\bar{\mathbf{u}}_\varphi$

La vitesse instantanée sera :

$v(\mathrm{t}) = \frac{d\overline{OM}(t)}{dt} = \frac{dr}{dt}.\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + r\frac{d\theta}{dt}.\bar{\mathbf{u}}_\theta + rsin\theta\frac{d\varphi}{dt}.\bar{\mathbf{u}}_\varphi$

$\frac{dr}{dt} = r$, $\frac{d\theta}{dt} = \theta$, $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi$

Nous obtenons :

$v(\mathrm{t}) = \frac{d\overline{OM}(t)}{dt} = r.\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + r\theta.\bar{\mathbf{u}}_\theta + rsin\theta\,\varphi.\bar{\mathbf{u}}_\varphi$

Les composantes du vecteur vitesse : $v(\mathrm{t})\begin{pmatrix}r\\ r\theta\\ rsin\theta\,\varphi\end{pmatrix}$

Son module est : $\|v\| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\,\dot{\theta})^2 + (rsin\theta\dot{\varphi})^2}$

Le vecteur déplacement élémentaire est :
$d\overline{OM} = dl = dr.\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} + rd\theta.\bar{\mathbf{u}}_{\theta} + rsin\theta d\varphi.\bar{\mathbf{u}}_{\varphi}$
dr : déplacement élémentaire radial suivant $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$
$rd\theta$: déplacement élémentaire suivant le méridien
$rsin\theta d\varphi$: déplacement élémentaire suivant $\bar{\mathbf{u}}_{\varphi}$ (le parallèle)

II.7.2.5. Vitesse dans la base de Frenet

Rappelons l'expression du déplacement élémentaire dans la base de Frenet :
$d\overline{OM} = \overline{MM'} = ds.\,\bar{u}_T$
Donc, la vitesse instantanée sera :
$v(t) = \frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt}.\,\bar{u}_T = \dot{s}.\,\bar{u}_T = v.\,\bar{u}_T$
Où, v est la valeur algébrique de la vitesse.

II.7.3. Accélération

Si le vecteur vitesse exprime la variation du vecteur position par rapport au temps, le vecteur accélération exprime la variation du vecteur vitesse par rapport au temps. Cette variation peut concerner la direction de la vitesse, son module ou les. Son unité, dans le système international est m.s^{-2}.

L'accélération moyenne d'un mobile entre deux instants t_1 et t_2 est donnée par :

$\gamma_m = \frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t}$
Avec $\Delta t = t_2 - t_1$
Lorsque l'écart entre les deux instant t_2 et t_1 infiniment petit, on écrit :
$\partial t = t_2 - t_1$ et l'accélération moyenne devient une ***accélération instantanée***

$$\gamma(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{V}(t) \quad \bar{V}(t + \Delta t)}{\Delta t}$$

L'accélération instantanée correspond alors à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse.

$$\gamma(t) = \frac{d\bar{V}(t)}{dt}$$

Remarques

- L'accélération est la dérivée premier du vecteur vitesse.
- L'accélération est la dérivée seconde du vecteur position, en effet :

  $\gamma(t) = \frac{d\bar{V}(t)}{dt}$, or $\bar{V}(t) = \frac{d\overline{OM}(t)}{dt}$, donc $\gamma(t) = \frac{d^2\overline{OM}(t)}{dt^2}$

- $\gamma(t)$ à la même direction et le même sens que $d\bar{V}$
- Le vecteur accélération est dans le sens du déplacement si le mobile accélère, et dans le sens inverse si le mobile ralentit.
- Le vecteur accélération est dirigé vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire

II.7.3.1. Accélération avec les coordonnées cartésiennes

Considérons un repère orthonormé directe de base (O, $\imath, \jmath, \bar{k}$),

Rappelons l'expression de la vitesse instantanée avec les coordonnées cartésiennes :

v(t) = $x.\imath + y.\jmath + z.\bar{k}$ Avec, $x = \frac{dx}{dt}$, $y = \frac{dy}{dt}$, $z = \frac{dy}{dt}$

$\gamma(t) = \frac{d\bar{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\ x.\imath + y.\jmath + z.\bar{k}) = \frac{dx}{dt}.\imath + \frac{dy}{dt}.\jmath + \frac{dz}{dt}.\bar{k}) = x.\imath + y.\jmath + z.\bar{k}$

Ses composantes sont : $\gamma\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Son module : $\|\gamma\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

II.7.3.2. Accélération avec les coordonnées cylindriques

Rappelons l'expression de la vitesse instantanée avec les coordonnées cylindriques :

v(t) = $\rho\, \bar{u}_\rho + \rho\ \theta\ \bar{u}_\theta + z\, \bar{k}$

L'accélération est : $\gamma(t) = \frac{d\bar{V}(t)}{dt} = \gamma(t) = \frac{d}{dt}(\rho\, \bar{u}_\rho + \rho\ \theta\ \bar{u}_\theta + z\, \bar{k})$

Rappelons que les vecteurs unitaires $\bar{u}_\rho$ et $\bar{u}_\theta$ tournent au cours du temps (base mobile), par contre le vecteur unitaire $\bar{k}$ est constant.

$\gamma(t) = \rho.\bar{u}_\rho + \rho\,.\frac{d\bar{u}_\rho}{dt} + \rho.\ \theta.\ \bar{u}_\theta + \rho.\ \theta.\ \bar{u}_\theta + \rho.\ \theta.\ \frac{d\bar{u}_\theta}{dt} + z.\ \bar{k}$

Rappelons que : $\frac{d\bar{u}_\rho}{dt} = \theta.\ \bar{u}_\theta$

$\frac{d\bar{u}_\theta}{dt} = -\theta.\ \bar{u}_\rho$

Donc, $\gamma(t) = \rho.\bar{u}_\rho + \rho\ .\theta.\ \bar{u}_\theta + \rho.\ \theta.\ \bar{u}_\theta + \rho.\theta.\ \bar{u}_\theta\ -\ \rho.\ \theta.\ \theta.\bar{u}_\rho + z.\ \bar{k}$

$= (\rho \quad \rho.\ \theta^2)\ \bar{u}_\rho + (2\rho.\ \theta + \rho.\ \theta)\ \bar{u}_\theta\ + z.\ \bar{k}$

Ses composantes : $(\rho \quad \rho.\ \theta^2,\ 2\rho.\ \theta + \rho.\ \theta,\ z)$

Son module : $\|\gamma\| = \sqrt{(\rho \quad \rho.\theta^2)^2 + (2\rho.\theta\ +\ \rho.\theta)^2 + z^2}$

II.7.3.3. Accélération avec les coordonnées polaires

Pour obtenir l'expression du vecteur accélération, il suffit d'enlever la composante suivant l'axe (Oz) au système de coordonnées cylindriques :

$\gamma(t) = (\rho \quad \rho.\ \theta^2)\ \bar{u}_\rho + (2\rho.\ \theta + \rho.\ \theta)\ \bar{u}_\theta$

Ses composantes : $(\rho \quad \rho.\ \theta^2,\ 2\rho.\ \theta + \rho.\ \theta)$

Son module : $\|\gamma\| = \sqrt{(\rho \quad \rho.\theta^2)^2 + (2\rho.\theta +\ \rho.\theta)^2}$

II.7.3.4. Accélération avec les coordonnées sphériques

Considérant un repère de coordonnées sphériques (r,θ,φ) muni d'une base mobile orthonormé direct ($\bar{u}_r$, $\bar{u}_\theta$, $\bar{u}_\varphi$).

Rappelons que les vecteurs unitaires $\bar{u}_r$, $\bar{u}_\theta$ et $\bar{u}_\varphi$ tournent au cous du temps mais leurs modules sont constants.

Rappelons l'expression du vecteur vitesse en coordonnées sphériques :

v(t) = $r.\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{r}\ + r.\theta.\bar{\mathbf{u}}_\theta\ + r.sin\theta.\ \varphi\ .\bar{\mathbf{u}}_\varphi$

$\gamma(t) = \frac{d\bar{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(r.\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{r}\ + r.\theta.\bar{\mathbf{u}}_\theta\ + r.sin\theta.\ \varphi\ .\bar{\mathbf{u}}_\varphi\ )$

$\gamma(t) = r\frac{d\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{r}}{dt} + r.\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + r.\theta.\bar{\mathbf{u}}_\theta + r.\theta.\bar{\mathbf{u}}_\theta + r.\theta.\frac{d\bar{\mathbf{u}}_\theta}{dt} + r.sin\theta.\varphi.\bar{\mathbf{u}}_\varphi +$
$r.\varphi.sin\theta.\bar{\mathbf{u}}_\varphi + r.\theta.cos\theta.\varphi.\bar{\mathbf{u}}_\varphi + r.\varphi.sin\theta.\frac{d\bar{\mathbf{u}}_\varphi}{dt}$

On se servant des expressions de $\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{r}$ **,** $\bar{\mathbf{u}}_\theta$ et $\bar{\mathbf{u}}_\varphi$ en fonction de leurs coordonnées cartésiennes et de la dérivée d'une fonction composée, on peut vérifier facilement que :

$\frac{d\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{r}}{dt} = \theta.\bar{\mathbf{u}}_\theta + \varphi.\sin\theta.\bar{\mathbf{u}}_\varphi$

$\frac{d\bar{\mathbf{u}}_\theta}{dt} = \theta.\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + \varphi.\cos\theta.\bar{\mathbf{u}}_\varphi$

$\frac{d\bar{\mathbf{u}}_\varphi}{dt} = \varphi.(\cos\theta.\bar{\mathbf{u}}_\theta + .\sin\theta.\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{r})$

Donc,

$\gamma(t) = (r - r.\theta^2 - r.\varphi^2.sin\theta^2).\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + (2r.\theta + r.\theta - r.\varphi^2 sin\theta...\cos\theta).\bar{\mathbf{u}}_\theta + (2r.\varphi.\sin\theta +$
$2r.\theta.\varphi.\cos + r.\varphi.sin\theta).\bar{\mathbf{u}}_\varphi$

II.7.7.5. Accélération dans la base de Frenet

Rappelons l'expression de la vitesse dans la base de Frenet :

$v(t) = s.\bar{u}_T = v.\bar{u}_T$

L'accélération sera :

$\gamma(t) = \frac{d\bar{V}(t)}{dt} = s.\bar{u}_T + s.\frac{d\bar{u}_T}{dt}$

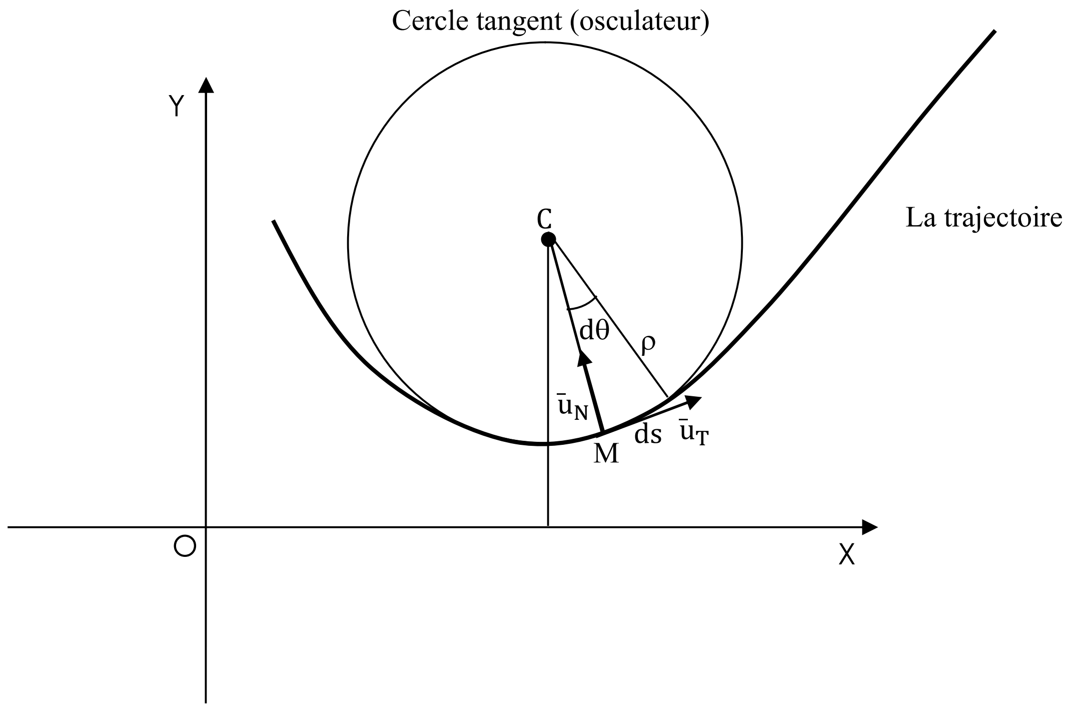


Figure 34 : déplacement d'un point en fonction de l'abscisse curviligne et base de Frenet.

$\frac{d\bar{u}_T}{dt} = \frac{d\bar{u}_T}{ds}\frac{ds}{dt}$

Or, ds = ρ.dθ où ρ est le rayon de courbure

Donc, $\frac{d\bar{u}_T}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{d\bar{u}_T}{d\theta}\,s = \frac{s}{\rho}\,\frac{d\bar{u}_T}{d\theta}$

Rappelons la règle de la dérivation d'un vecteur unitaire tournant d'un angle θ par rapport à cet angle :

$\frac{d\bar{u}_T}{d\theta} = \bar{u}_N$

Il en résulte:

$\frac{d\bar{u}_T}{dt} = \rho.\,s\,\bar{u}_N$

$\gamma(t) = s.\bar{u}_T + \frac{s^2}{\rho}.\bar{u}_N$ avec $s = v$ et $s = \frac{dv}{dt}$

$\gamma(t) = \frac{dv}{dt}\,\bar{u}_T + \frac{v^2}{\rho}.\bar{u}_N$

Donc, les composantes de l'accélération sont : $\gamma_T = \frac{dv}{dt}$ et $\gamma_N = \frac{v^2}{\rho}$

Remarque

- γ_T est appelée la composante tangentielle de l'accélération. Elle indique si la valeur de la vitesse change.
- γ_N est appelée la composante normale de l'accélération. Toujours positive, elle indique si la direction de la vitesse change.

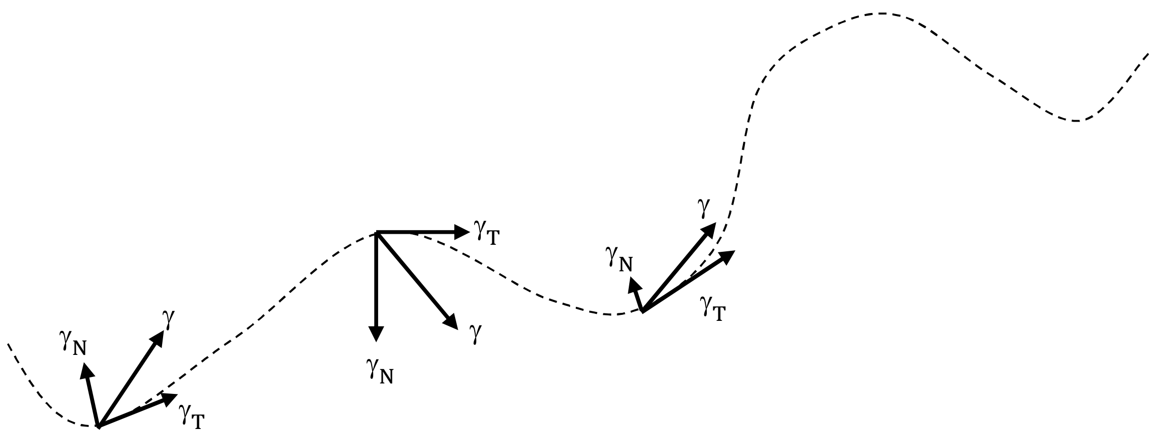


Figure 35 : composantes de l'accélération dans la base de Frenet.

- Le rayon de courbure ρ peut être déterminé comme suit :

$\gamma(t) = \frac{dv}{dt}\,\bar{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\,\bar{u}_N = \gamma_T + \gamma_N$

$\gamma^2 = {\gamma_T}^2 + {\gamma_N}^2 \Rightarrow \gamma_N = \sqrt{\gamma^2 \quad {\gamma_T}^2}$

Or, $\gamma_N = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{\gamma_N} = \frac{v^2}{\sqrt{\gamma^2 - {\gamma_T}^2}}$

- Le centre de courbure (centre du cercle osculateur) : la droite support du vecteur unitaire $\bar{u}_N$ passe par le centre (C), donc $\overline{MC} = \rho . \bar{u}_N$

II.8. Etudes de quelques mouvements particuliers

II.8.1. Mouvement rectiligne

On parle de mouvement rectiligne lorsque le mobile se déplace suivant une droite. L'étude du mouvement se réduit à une dimension, on choisit un repère composé d'un axe (Ox). Le point M est repéré par son abscisse x. L'origine est souvent choisi pour être confondue avec l'abscisse x_0 correspondant à la position du point M à l'instant t_0, et le sens est défini par un vecteur unitaire $\bar{u}_x$

II.8.1.1. Mouvement rectiligne uniforme

On parle de mouvement rectiligne uniforme lorsque la vitesse est constante au cours du temps

$v(t) = v_0$

$\gamma = \frac{dv}{dt} = 0$

$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \rightarrow dx = v_0 dt \rightarrow x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 dt = x_0 + v_0 \, (t \quad t_0)$

Si on choisit, à $t_0 = 0$ $x_0 = 0$

$x = v_0 \, t$

$v(t) = v_0$

$\gamma(t) = 0$

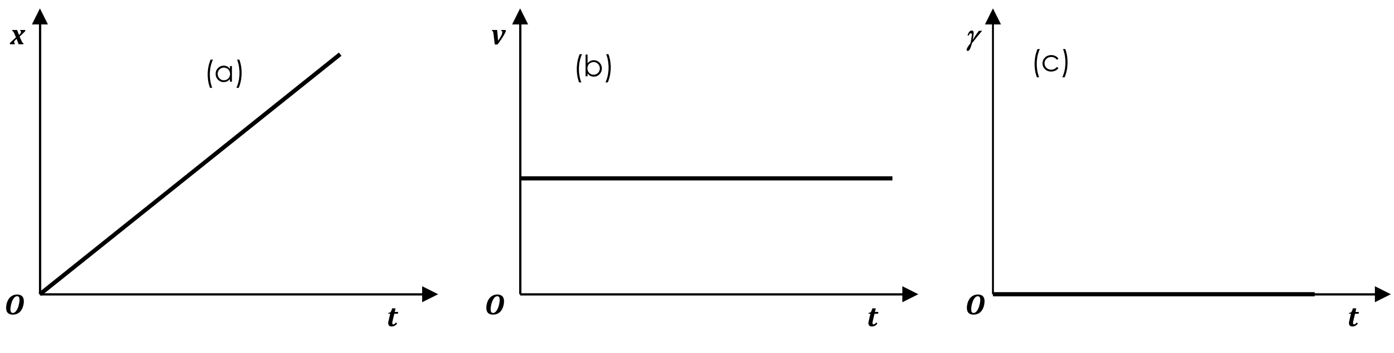


Figure 36 : Variation de, (a) la position, (b) la vitesse et (c) l'accélération en fonction du temps.

II.8.1.2. Mouvement rectiligne uniformément varié

On dit qu'un mouvement rectiligne est uniformément varié lorsque son accélération est constante au cours du temps

$\gamma(t) = \gamma_0$ est une constante

$\gamma = \frac{dv}{dt} = \gamma_0$

$dv = \gamma_0 dt \rightarrow \; v = v_0 + \int_0^t \gamma_0 dt = v_0 + \gamma_0 t$

$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = vdt \rightarrow x = x_0 + \int_0^t vdt = x_0 + \int_0^t (v_0 + \gamma_0 t)dt = x_0 + \; v_0 t + \frac{1}{2}\gamma_0 t^2$

Si on choisit, à t = 0   x(0) = 0, et que $v_0 = 0$ alors on obtient:

$x = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2$

$v(t) = \gamma_0 t$

$\gamma(t) = \gamma_0$

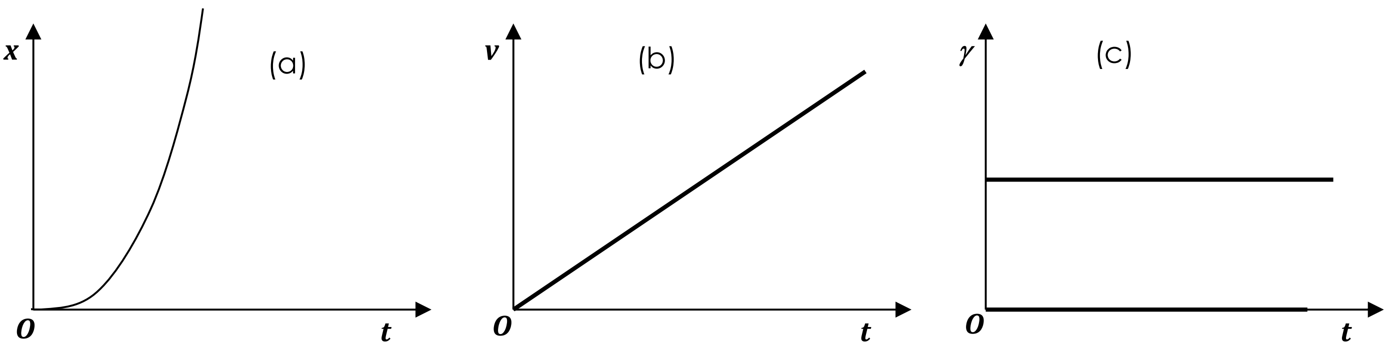


Figure 37 : Variation de, (a) la position, (b) la vitesse et (c) l'accélération en fonction du temps.

Remarque

- Si l'accélération et la vitesse ont même signe, le mouvement est accéléré
- S'ils sont de signes opposés, le mouvement est décéléré
- Reprenons les expressions de x(t) et v(t), nous pouvons obtenir une relation de x en fonction de v :

$v(t) = v_0 + \gamma_0 t \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{\gamma_0}$

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 \Rightarrow x \quad x_0 = v_0 \frac{v - v_0}{\gamma_0} + \frac{1}{2}\gamma_0 (\frac{v - v_0}{\gamma_0})^2$

$2\gamma_0 (x \quad x_0) = (v \quad v_0)(v + v_0) = v^2 \quad {v_0}^2$

Donc, on a $v^2 \quad {v_0}^2 = 2\gamma_0 (x \quad x_0)$

II.8.2. Mouvement circulaire

On parle d'un mouvement circulaire si la trajectoire du point est un cercle caractérisé par son centre et son rayon R. Il est plus judicieux de choisir un repère dont l'origine est le centre du cercle et que l'axe (Oz) passe par ce centre perpendiculairement au plan du cercle.

Le système de coordonnées polaires est bien adapté pour ce type de mouvement. Les coordonnées du point M sont : ρ = R et θ = θ(t). C'est l'expression θ(t) qui va définir le type de mouvement circulaire.

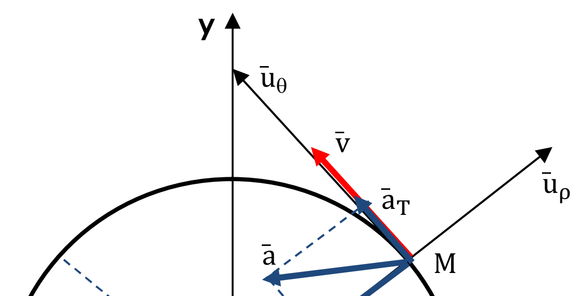


Figure 38 : Mouvement circulaire en coordonnées polaires.

Si θ est constante, on parle de mouvement circulaire uniforme

$\theta = \frac{d\theta}{dt} = \ w$ est la vitesse angulaire

$d\theta$= wdt ➔ $\theta(t) = \theta_0 + wt$

Avec, θ_0 est l'angle initiale ; c'est l'angle à t = 0

Lorsque le vecteur position tourne de 2π (un tour) ceci correspond à une période (t=T)

$\theta(0) = \theta_0$

$\theta(T) = \theta_0 + wT$

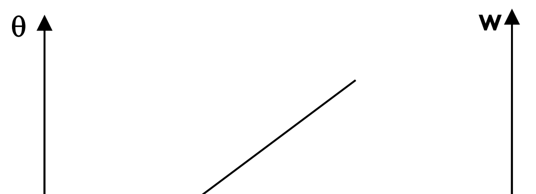
$\theta(T)$ - $\theta(0)$ = $\theta_0 + wT$ - θ_0= 2π ➔ wT = 2π ➔ $T = \frac{2\pi}{w}$

La fréquence : f = $\frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi}$ (en Hertz)

Et le vecteur vitesse : $v = \frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{d(R\bar{u}_\rho)}{dt} = R\,\frac{d\bar{u}_\rho}{dt} = R\theta\;\bar{u}_\theta = Rw\;\bar{u}_\theta$, donc la vitesse linaire est $v = \ Rw$

Vecteur accélération : $a = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(Rw\;\bar{u}_\theta)}{dt} = Rw\,\frac{d\;\bar{u}_\theta}{dt} = \quad Rw^2\bar{u}_\rho$

L'accélération a une seule composante dirigée vers le centre.



Propriété :

$\frac{d\bar{u}_\rho}{dt} = w\,\bar{u}_\theta$

Rappelons que $\bar{u}_\theta = \bar{k} \wedge \bar{u}_\rho$

sachant que $\bar{w}$ est le vecteur vitesse angulaire, dirigé suivant $\bar{k}$, donc $\bar{w}$ = w. $\bar{k}$

$\frac{d\bar{u}_\rho}{dt} = w.\bar{k} \wedge \bar{u}_\rho = \bar{w} \wedge \bar{u}_\rho$

Et si nous multiplions les deux membres de l'équation par R, nous obtiendrons :

$\frac{d\overline{OM}}{dt} = \bar{w} \wedge \overline{OM}$

$v = \bar{w} \wedge \overline{OM}$

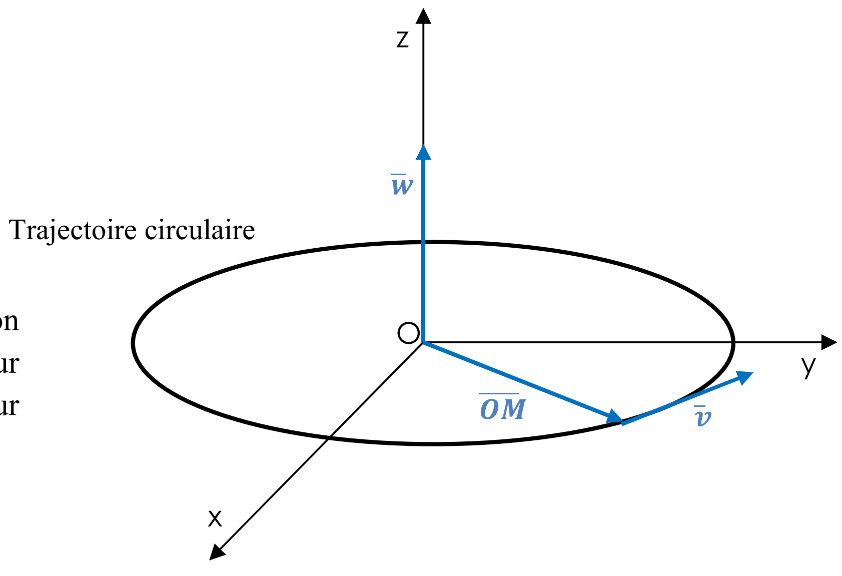


Figure 40 : Représentation du vecteur position, vecteur vitesse linéaire et vecteur vitesse angulaire.

II.8.2.1. Mouvement circulaire uniformément varié

Lorsque w est constante on parle de mouvement circulaire uniformément varié.

$w = \frac{dw}{dt}$ ➔ $dw = w.dt$

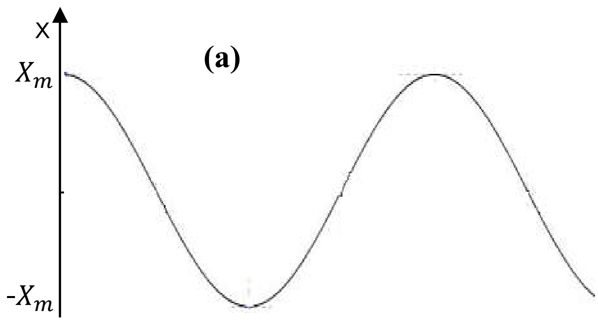
$w = w_0 + \int_0^t w.dt = w_0 + wt$

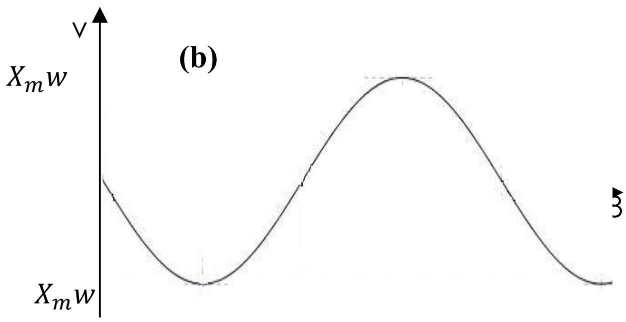
Si on choisit : à t=0 $w(0) = 0 = w_0$
$w = wt$
$w = \frac{d\theta}{dt}$ ➔ $d\theta = wdt$ ➔ $\theta = \theta_0 + \int_0^t w.dt = \theta_0 + w_0 t + \frac{1}{2}wt^2$
θ_0 et w_0 sont déterminés par les conditions initiales.

La vitesse linaire : $v = R.w(t)$
Pour simplifier l'écriture, on va écrire w au lieu de $w(t)$.
Le vecteur vitesse : $v = Rw\,\bar{u}_\theta$
L'accélération: $a = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(Rw\bar{u}_\theta)}{dt} = Rw\,\bar{u}_\theta + Rw\frac{d\bar{u}_\theta}{dt} = Rw\,\bar{u}_\theta \quad Rww\bar{u}_\rho$
Rappelons que $\frac{d\bar{u}_\theta}{dt} = \quad w\bar{u}_\rho$
Donc, $a = Rw\,\bar{u}_\theta \quad Rw^2\bar{u}_\rho$
$a = \quad Rw^2\bar{u}_\rho + Rw\,\bar{u}_\theta$
Dans la base de Frenet :
Pour retrouver la base de Frenet, il suffit de remplacer -$\bar{u}_\rho$ par $\bar{u}_N$ et $\bar{u}_\theta$ par $\bar{u}_T$
On trouve:
$v = v.\,\bar{u}_T = Rw\,\bar{u}_T$
$a = Rw^2\bar{u}_N + Rw\,\bar{u}_T = a_N + a_T$
$a_T = Rw\,\bar{u}_T = R\frac{dw}{dt}\,\bar{u}_T = \frac{d(Rw)}{dt}\,\bar{u}_T = \frac{dv}{dt}\,\bar{u}_T$
$a_N = Rw^2\bar{u}_N$
La composante normale de l'accélération est dirigée vers le centre. C'est cette composante qu'est responsable de la variation de la direction du vecteur vitesse (c'est elle qui fait tourner).

II.8.3. Mouvement sinusoïdal
Exemples : une masse attaché à un ressort, pendule simple
L'équation horaire, à une dimension est donnée par :
$X(t) = X_m \cos(wt + \varphi)$,
Avec, X_m : amplitude, w : pulsation, φ : phase à l'instant t = 0
La fonction cosinus est périodique, sa période est 2π, donc
$X(t) = X(t + T)$ ➔ $X_m \cos(wt + \varphi) = X_m \cos(w(t+T) + \varphi)$
$wT = 2\pi$ ➔ $T = \frac{2\pi}{w}$
Sa fréquence $f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi}$
Sa vitesse : $v = \frac{dx}{dt} = \quad X_m w sin(wt + \varphi)$
Son accélération : $a = \frac{dv}{dt} = \quad X_m w^2 cos(wt + \varphi)$

Ci-dessous les diagrammes représentant l'équation horaire, la vitesse et l'accélération





(c)

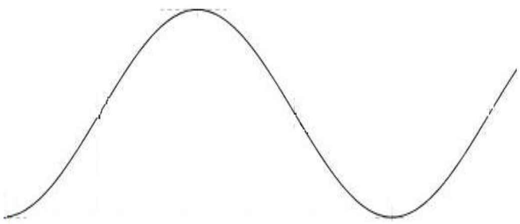


Figure 41 : (a) L’équation horaire, (b) la vitesse et (c) l’accélération d’un mouvement sinusoïdal.

II.9. Mouvement relative

Rappelons que tout mouvement est relatif au référentiel utilisé. Dans cette partie, nous considérons deux référentiels, l’un est fixe (ℜ) et l’autre est mobile (ℜ’). Un point mobile est en mouvement par rapport aux deux référentiels. Il sera repéré par ses coordonnés (x, y, z) dans le référentiel absolu (ℜ) muni d’une base fixe $(O, \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k})$ et par (x’, y’, z’) dans le référentiel relatif (ℜ’) muni d’une base $(O', \bar{\imath}', \bar{\jmath}', \bar{k}')$, les paramètres cinématiques du point M ne seront donc pas les mêmes dans les deux référentiels.

On note :

ℜ(O,x,y,z) : repère absolu, supposé fixe. Les paramètres du point M sont r (t), v (t) et γ

ℜ’(O’,x’,y’,z’) : repère relatif, en mouvement par rapport à ℜ. Les paramètres du point M sont $\bar{r}'$ (t), $\bar{v}'$ (t) et γ’

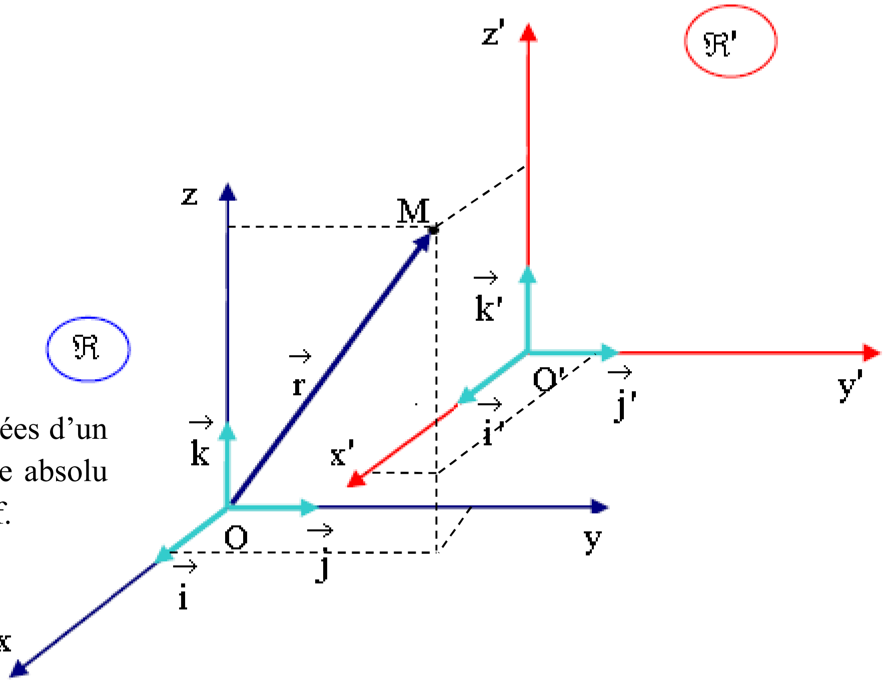


Figure 42 : Coordonnées d’un point M dans le repère absolu et dans le repère relatif.

Dans le référentiel ... par

conséquent, leurs dé... s :

Vecteur position : $r(t)_{/\Re} =: \overline{OM}(t)_{/\Re} = x(t).\imath + y(t).\jmath + z(t).\bar{k}$

Vecteur vitesse absolue : $v(t)_{/\Re} = \frac{d\overline{OM}(t)}{dt}_{/\Re} = x(t).\imath + y(t).\jmath + z(t).\bar{k}$

Vecteur accélération absolue : $\gamma(t)_{/\Re} =: \frac{d\bar{v}(t)}{dt}_{/\Re} = x(t).\imath + y(t).\jmath + z(t).\bar{k}$

Dans le référentiel relatif $\Re$'(O',x',y',z'). Le mouvement de M est caractérisé par les grandeurs :

Vecteur position : $\bar{r}'(t)_{/\Re'} =: \overline{O'M}(t)_{/\Re'} = x'(t).\bar{\imath}' + y'(t).\bar{\jmath}' + z'(t).\bar{k}'$

Vecteur vitesse relative : $\bar{v}'(t)_{/\Re'} = \frac{d\overline{O'M}(t)}{dt}_{/\Re'} = x'(t).\bar{\imath}' + y'(t).\bar{\jmath}' + z'(t).\bar{k}'$

Vecteur accélération relative : $\bar{\gamma}'(t)_{/\Re'} =: \frac{d\bar{v}'(t)}{dt}_{/\Re'} = x'(t).\bar{\imath}' + y'(t).\bar{\jmath}' + z'(t).\bar{k}'$

II.9.1. Composition des vitesses

En utilisant la relation de Chasles :

$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$

Où, $\overline{OO'} = x_O(t)\imath + y_O(t)\jmath + z_O(t)\bar{k}$: est le vecteur position du point O' (l'origine du référentiel $\Re'$) dans le référentiel $\Re$.

$$v(t)_{/\Re} = \frac{d\overline{OM}(t)}{dt}_{/\Re} = \frac{d\overline{OO'}(t)}{dt}_{/\Re} + \frac{d\overline{O'M}(t)}{dt}_{/\Re}$$

$$= \frac{d\overline{OO'}(t)}{dt}_{/\Re} + \frac{d(x'(t).\bar{\imath}'+y'(t).\bar{\jmath}'+z'(t).\bar{k}')}{dt}_{/\Re} = \frac{d\overline{OO'}(t)}{dt}_{/\Re} + x'(t).\bar{\imath}' + y'(t).\bar{\jmath}' +$$

$$z'(t).\bar{k}' + x'\frac{d\bar{\imath}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\bar{\jmath}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\bar{k}'}{dt}_{/\Re}$$

$$v(t)_{/\Re} = \frac{d\overline{OO'}(t)}{dt}_{/\Re} + x'\frac{d\bar{\imath}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\bar{\jmath}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\bar{k}'}{dt}_{/\Re} + x'(t).\bar{\imath}' + y'(t).\bar{\jmath}' + z'(t).\bar{k}'$$

$x'(t).\bar{\imath}' + y'(t).\bar{\jmath}' + z'(t).\bar{k}'$ est la ***vitesse relative***, notée v_r

$\frac{d\overline{OO'}(t)}{dt}_{/\Re} + x'\frac{d\bar{\imath}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\bar{\jmath}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\bar{k}'}{dt}_{/\Re}$ est appelée ***vitesse d'entrainement***, notée v_e, elle représente la vitesse du repère $\Re'$ par rapport au repère $\Re$. Autrement dit, il s'agit de la vitesse absolue d'un point P, fixe dans le référentiel $\Re'$, coïncidant avec la position de M au temps t considéré.

L'expression de v_e comprend deux termes:

$\frac{d\overline{OO'}(t)}{dt}_{/\Re}$: Représente la vitesse de translation de l'origine O' par rapport au référentiel $\Re$.

$x'\frac{d\bar{\imath}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\bar{\jmath}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\bar{k}'}{dt}_{/\Re}$: représente la rotation du référentiel $\Re'$.

$v(t)_{/\Re} = \frac{d\overline{OM}(t)}{dt}_{/\Re}$ est la vitesse absolue, notée v_a .

La loi de composition des vitesses s'écrit alors :

$v_a = v_e + v_r$

II.9.2. Composition des accélérations

Reprenons l'expression de la vitesse:

$$v(t)_{/\Re} = \frac{d\overline{OO'}(t)}{dt}_{/\Re} + x'\frac{d\bar{\imath}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\bar{\jmath}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\bar{k}'}{dt}_{/\Re} + x'(t).\bar{\imath}' + y'(t).\bar{\jmath}' + z'(t).\bar{k}'$$

$\gamma(t)_{/\Re} = \frac{d\bar{v}(t)}{dt}_{/\Re} = \frac{d^2\overline{OO\prime}(t)}{dt^2}_{/\Re} + x'\frac{d^2\bar{\imath}'}{dt}_{/\Re} + x'\frac{d\bar{\imath}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d^2\bar{\jmath}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\bar{\jmath}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d^2\bar{k}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\bar{k}'}{dt}_{/\Re} + x'(t).\bar{\imath}' + x'\frac{d\bar{\imath}'}{dt}_{/\Re} + y'(t).\bar{\jmath}' + y'\frac{d\bar{\jmath}'}{dt}_{/\Re} + z'(t).\bar{k}' + z'\frac{d\bar{k}'}{dt}_{/\Re}$

$= \frac{d^2\overline{OO\prime}(t)}{dt^2}_{/\Re} + x'\frac{d^2\bar{\imath}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d^2\bar{\jmath}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d^2\bar{k}'}{dt}_{/\Re} + 2\left(x'\frac{d\bar{\imath}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\bar{\jmath}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\bar{k}'}{dt}_{/\Re}\right) + \left(x'(t).\bar{\imath}' + y'(t).\bar{\jmath}' + z'(t).\bar{k}'\right)$

Le terme : $\frac{d^2\overline{OO\prime}(t)}{dt^2}_{/\Re} + x'\frac{d^2\bar{\imath}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d^2\bar{\jmath}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d^2\bar{k}'}{dt}_{/\Re}$ représente ***l'accélération d'entrainement*** $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{e}}$; c'est l'accélération d'un point P, fixe au référentiel$\Re'$et qui coincide avec le point M.
Le terme $2\left(x'\frac{d\bar{\imath}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\bar{\jmath}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\bar{k}'}{dt}_{/\Re}\right)$ est appelée ***l'accélération complémentaire ou de Coriolis*** $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{c}}$.
Le terme $\left(x'(t).\bar{\imath}' + y'(t).\bar{\jmath}' + z'(t).\bar{k}'\right)$ est l'***accélération relative*** $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{r}}$.
La loi de composition des accélérations s'écrit alors :

$\bar{\gamma}_a = \bar{\gamma}_e + \bar{\gamma}_c + \bar{\gamma}_r$

II.9.3. Quelques cas particuliers des mouvements du repère relatif par rapport au repère absolu

II.9.3.1. Translation rectiligne
Le repère $\Re'$ effectue un déplacement suivant une droite mais ne tourne pas. Pour simplifier, nous choisissons un mouvement suivant l'axe (Ox).
La loi de composition des vitesses s'écrit:
$v_a = v_e + v_r$
Avec, v_e; c'est la vitesse rectiligne de l'origine O'
$v_e = v(O')_{/\Re} = v(O')_{/\Re}\imath = v(O')_{/\Re}\bar{\imath}'$
La loi de composition des accélérations s'écrit:
$\bar{\gamma}_a = \bar{\gamma}_e + \bar{\gamma}_c + \bar{\gamma}_r$,
Comme les vecteurs unitaires ne tournent pas, alors leurs dérivées première et secondes par rapport au temps sont nulles, d'où $\bar{\gamma}_c = \bar{0}$ et $\bar{\gamma}_e$ se réduit à $\frac{d^2\overline{OO\prime}(t)}{dt^2}_{/\Re}$

Donc, $\bar{\gamma}_a = \frac{d^2\overline{OO\prime}(t)}{dt^2}_{/\Re} + \bar{\gamma}_r$
Si la vitesse du repère $\Re'$ est ***rectiligne et uniforme***, alors v_e est constante.
$v_e = v(O')_{/\Re} = v(O')_{/\Re}\imath$
$v_e = \frac{d(\overline{OO'})}{dt}_{/\Re}$ ➔ $\overline{OO'} = v(O')_{/\Re}t.\imath + C$, où C est le vecteur position du point O' à l'instant t=0
$\bar{\gamma}_a = \bar{\gamma}_r \quad (\bar{\gamma}_e = \bar{0}, \bar{\gamma}_c = \bar{0})$

II.9.3.1.1. Translation circulaire uniforme

L'origine O' du repère $\Re'$ décrit un cercle dans le référentiel $\Re$. La vitesse angulaire du repère $\Re'$ est constante (w). Pour simplifier le problème, nous choisissons une rotation autour de la l'axe (Oz) et que les origines O et O' sont confondues.

La loi de composition des vitesses s'écrit :

$v_a = v_e + v_r$

où $v_e = \frac{d\overline{OO'}(t)}{dt}_{/\Re} + x'\frac{d\bar{i}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\bar{j}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\bar{k}'}{dt}_{/\Re}$

Les deux points O et O' sont confondus, alors $\overline{OO'} = \bar{0}$, sa derivé est nulle

Rappelons que $\frac{d\bar{i}'}{dt} = \bar{w} \wedge \bar{i}'$, $\frac{d\bar{j}'}{dt} = \bar{w} \wedge \bar{j}'$, $\frac{d\bar{k}'}{dt} = \bar{w} \wedge \bar{k}'$

Donc, $x'\frac{d\bar{i}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\bar{j}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\bar{k}'}{dt}_{/\Re} = \bar{w} \wedge \overline{O'M}$

$v_a = \bar{w} \wedge \overline{O'M} + v_r$

La loi de compositions des accélérations s'écrit:

$\bar{\gamma}_a = \bar{\gamma}_e + \bar{\gamma}_c + \bar{\gamma}_r$

Avec, $\bar{\gamma}_e =: \frac{d^2\overline{OO'}(t)}{dt^2}_{/\Re} + x'\frac{d^2\bar{i}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d^2\bar{j}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d^2\bar{k}'}{dt}_{/\Re} = \bar{w} \wedge (\bar{w} \wedge \overline{O'M})$

$\bar{\gamma}_c = 2\left(x'\frac{d\bar{i}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\bar{j}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\bar{k}'}{dt}_{/\Re}\right) = 2\bar{w} \wedge v_r$

Donc, $\bar{\gamma}_a = \bar{w} \wedge (\bar{w} \wedge \overline{O'M}) + 2\bar{w} \wedge v_r + \bar{\gamma}_r$

Chapitre III : Dynamique du point matériel

Nous avons étudié dans le chapitre précédent le mouvement sans se soucier de ce qui l'a causé. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la cause qui a produit le mouvement, souvent c'est la force (poids, frottement, tension d'un fil ou d'un ressort, force électriques…etc) et d'établir une relation entre la cause et le mouvement. Pour cela, nous aborderons les lois fondamentales de la dynamique ou les trois lois de Newton, en référence au savant physicien Isaac Newton, fondateur de la mécanique classique.

III.1. Notions fondamentales

***Masse inertielle* (on inerte)** : La masse est une grandeur physique scalaire positive. Elle est directement liée à la quantité de matière que contient un corps. Elle traduit la capacité d'un corps à s'opposer à toute modification de sa vitesse, donc elle mesure son inertie. Elle intervient directement dans le principe fondamental de la dynamique. L'unité de mesure de la masse est le kilogramme dans le SI.

Force

La force est une grandeur vectorielle (elle a les caractéristiques d'un vecteur) qui traduit les interactions entre les objets. C'est une cause pouvant produire ou de modifier le mouvement d'un corps, ou de causer sa déformation. Son unité de mesure est le Newton, noté N. On peut la mesurer directement à l'aide d'un dynamomètre ; un appareil de mesure dont le principe est basé sur l'allongement d'un ressort parfaitement élastique. On peut distinguer :

Forces de contact : elle traduit les interactions entre les objets en contact physique, telles que les forces de frottement, tension d'un fil...etc. Leurs caractérisations dépendent des propriétés de l'objet sur lequel y sont exercées (masse, charge, moment dipolaire …etc.) ainsi que la nature de l'environnement dans lequel elles sont placées.

Force à distance : elle traduit les interactions entre les objets sans être en contact (sans se toucher), ceci s'explique par la présence d'un champ vectoriel produit par l'un et qui agit sur l'autre (champ électrique, champ magnétique, champ de pesanteur…etc.)

Quantité de mouvement : les lois de la mécanique font intervenir une grandeur appelée quantité de mouvement ; c'est le produit de la masse d'un point matériel par sa vitesse. C'est une grandeur vectorielle, son unité est Kgm/s.

$\bar{P}(M) = m\bar{v}(M)$

Point matériel isolé mécaniquement : on parle d'un point matériel isolé mécaniquement lorsqu'il n'est soumis à aucune force de l'extérieur : un point matériel de masse m se trouvant seul dans l'espace ! Difficile à réaliser ! Donc, on admet plutôt un point matériel pseudo-isolé où les forces qui lui sont appliquées se compensent.

III.2. Référentiels

Référentiel de Copernic (Rc)

C'est un référentiel qui a pour origine le centre du système solaire et ses axes sont donnés par les directions de trois étoiles très éloignées (supposées fixes par rapport au soleil). On utilise ce référentiel pour l'étude du système solaire.

Référentiel héliocentrique ou de Kepler:
C'est un référentiel qui a pour origine le centre du soleil et dont les axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

Référentiel géocentrique (RG):
C'est un référentiel qui a pour origine le centre de la terre et ses axes sont donnés par les directions de trois étoiles très éloignées tout comme le référentiel de Copernic. On l'utilise pour l'étude des mouvements des satellites naturels (la lune) ou artificiel.

Référentiel terrestre (RT):
C'est un référentiel lié à la terre et qui a pour origine un point de la planète et ses axes ont des directions fixes par rapport à elle. On l'utilise pour l'étude des mouvements des objets sur terre.

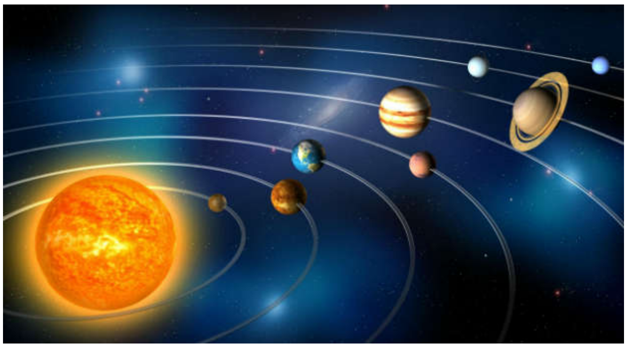


Figure 43 : Référentiel Copernic et référentiel géocentrique.

III.3. Les lois de Newton
La mécanique classique fondée par Isaac Newton est basée sur ces trois lois publiées en 1687.

III.3.1. Première loi de Newton : principe d'inertie
Dans un référentiel ***Galiléen***, tout corps isolé qui n'est soumis à aucune force reste au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

III.3.2. Référentiel galiléen
A partir du principe d'inertie, on peut déduire la définition d'un référentiel galiléen : tout référentiel dans lequel le principe d'inertie est appliqué. Il s'appelle aussi référentiel d'inertie.
Nous avons les propriétés suivantes :

- Tout référentiel muni d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est un référentiel Galiléen.
- Les référentiels, de Copernic, héliocentrique sont considérés comme des référentiels galiléens.
- La terre tourne autour du soleil suivant une trajectoire elliptique, sa période de révolution est, à peu près de 365 jours. Son mouvement n'est donc pas rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic. Mais, pour des études de durées très inférieures à la période de révolution (365 jours), son mouvement peut être

considéré comme un mouvement rectiligne uniforme, et par conséquent le référentiel géocentrique peut être considéré comme référentiel galiléen.

- La terre tourne autour d'elle, sa période de rotation est de 24 heures. Son mouvement n'est donc pas rectiligne uniforme par rapport au référentiel géocentrique. Le référentiel terrestre ne peut être considéré comme référentiel galiléen que dans le cas d'études de courte durée (très inférieure à la période de rotation de la terre qu'est de 24h).

III.3.3. Deuxième loi de Newton : Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Dans un référentiel Galiléen la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur un point matériel est égale au produit du vecteur accélération et de la masse du point matériel.

$$\sum f_{ext} = m\gamma$$

Cette loi traduit la relation causale qui unit la cinématique du point matériel aux causes du mouvement. Cela signifie que la force est la cause du changement de la vitesse donc du mouvement du point matériel. En effet, si la force n'est pas nulle alors la vitesse n'est pas constante et vice versa.
Si la force est nulle alors l'accélération est nulle. La force est nulle : signifie un corps isolé (ou pseudo-isolé), accélération nulle : signifie que la vitesse est constante (mouvement rectiligne uniforme). Donc, on retrouve bien la première loi de Newton (principe d'inertie).

Remarques

- Considérons $\bar{F}$ la résultante des forces appliquées sur le point matériel M, on écrit :

$F = m\gamma$, avec $\gamma\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donc, les coordonnées de F sont : $F\begin{pmatrix} mx \\ my \\ mz \end{pmatrix}$

- Le PFD peut s'écrire :

  $\sum f_{ext} = \frac{d\bar{P}}{dt}$, où $\bar{P}$ est la quantité de mouvement ($\bar{P} = mv$) et $\sum f_{ext} = F$

  Donc, $F = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = v\frac{dm}{dt} + m\frac{d\bar{v}}{dt}$

  Si la masse est constante, alors $F = m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\gamma$

III.3.4. Troisième loi de Newton (Principe de l'action et de la réaction)

Si un corps (1) exerce une force $\bar{F}_{1\to2}$ sur un autre corps (2), ce dernier exerce à son tour une force $\bar{F}_{2\to1}$ de même intensité mais de sens opposée : $\bar{F}_{1\to2} = \quad \bar{F}_{2\to1}$

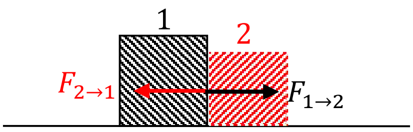


Figure 44 : Action et réaction.

Remarque **:** ce principe est universel, il s'applique aussi bien pour les forces de contact que pour les forces à distance, à l'échelle des particules comme à l'échelle de l'univers.

III.4. Les forces

Nous avons évoqué au début de ce chapitre les deux type de force, classées selon leur mode de transmission, à savoir les forces à distance et les forces de contact, nous citons ici quelques exemples :

III.4.1. Forces à distance

III.4.1.1. Forces d'interaction gravitationnelle (loi de la gravitation universelle)

La loi de la gravitation universelle a été découverte par Newton et a permis d'expliquer une grande variété de phénomènes allant du mouvement des planètes à la chute des corps en passant par les hautes et les basses marées.

Cette loi prévoit une attraction entre deux corps de masses m_1 et m_2 et qui est proportionnelle au produit de leurs masses et à l'inverse du carré de la distance entre les centres de gravité de ces masses.

Considérons deux points matériels de masse m_1 et m_2, et r la distance qui les sépare. Ces deux points matériels exercent mutuellement l'un sur l'autre une force attractive dont les caractéristiques sont :

- ***la direction***, celle de la droite reliant les deux points matériels.
- ***le sens,*** il s'agit d'une attraction mutuelle, on est en présence de deux forces de sens opposés.
- ***l'intensité,*** donnée par la relation : $\|F_{1\to 2}\| = \|F_{2\to 1}\| = G\,\frac{m_1.m_2}{r^2}$
  Où G est la constante de gravitation universelle et qui vaut :6,67x$10^{-11}m^3Kg^{-1}s^{-2}$.

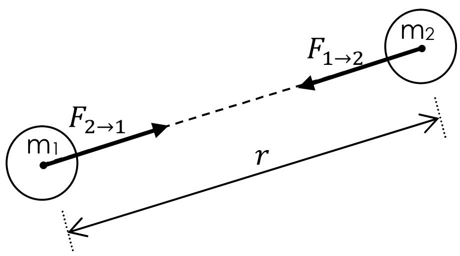


Figure 45 : Forces d'interaction gravitationnelle exercées entre deux corps.

Exemple **:** considérons une masse quelconque m et M la masse de la terre et déterminons la force qui s'exerce par le centre de la terre sur m :

$F = G\,\frac{m.M}{r^2}$ où r est la distance entre le centre de gravité de m et le centre de la terre

D'après la troisième loi de Newton, la masse m exerce la même force sur la terre, avec un sens opposé : $F' = F = G\,\frac{m.M}{r^2}$, $\overline{F}' = \quad F$

Choisissons un vecteur unitaire $\bar{u}$ partant de m vers le centre de la terre.

$F = \quad G\,\frac{m.M}{r^2}\,\bar{u}$

Posons : $G(r) = G\,\frac{M}{r^2}\,\bar{u}$: champ de pesanteur de la terre crée en un point de l'espace se situant à une distance r du centre de la terre, il a la dimension d'une accélération.

Donc, $F = \quad G(r).m$

Si on est proche de la surface de la terre alors r est à peu près le rayon de la terre ($R_T = 6370.10^3$m, $M_T = 5{,}98.10^{24}$ Kg)

$\bar{G}$ (r) = $g = \quad G\frac{M_T}{{R_T}^2}\bar{u}, g \approx 9{,}81\ m/s^2$

Cette force s'appelle le poids $\bar{P}$ et s'écrit :

$\|\bar{P}\| = \|F\| = m.g$

III.4.1.2. Force d'interaction électromagnétique

Les particules chargés créent autour d'elles, partout dans l'espace un champ électrique. Si une charge électrique se trouve en présence d'un champ électrique, ceci va lui faire subir une force $\bar{F} = q.\bar{E}$

Dans un référentiel donnée, si une charge (q) en mouvement, munie d'une vitesse ($\bar{v}$) se trouvant en présence d'un champ électrique ($\bar{E}$) et un champ magnétique ($\bar{B}$), ceci va lui faire subir une force, appelée force de Lorentz :

$$\bar{F} = q.\left(\bar{E} + \bar{v} \wedge \bar{B}\right)$$

III.4.1.3. Force d'interaction coulombienne

Par analogie à l'interaction gravitationnelle où on fait intervenir la masse, l'interaction coulombienne fait intervenir la charge.

Considérons deux charges q_1 et q_2 et r la distance qui les sépare. Ces deux charges exercent mutuellement l'une sur l'autre une force attractive ou répulsive selon le signe de leurs charges, dont les caractéristiques sont :

- ***la direction***, celle de la droite reliant les deux charges
- ***le sens,*** il s'agit d'une attraction mutuelle si elles ont des charges de signes opposées, et répulsive si les charges sont de même signe
- ***l'intensité,*** donnée par la relation : $\|F_{1\to 2}\| = \|F_{2\to 1}\| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1.q_2}{r^2}$
  Où ε_0 la permittivité diélectrique du vide et qui vaut :8,85x10^{-12} F/m

Choisissons un vecteur unitaire $\bar{u}_1$ partant de q_1 vers q_2 et que les deux charges sont de même signe (force répulsive).

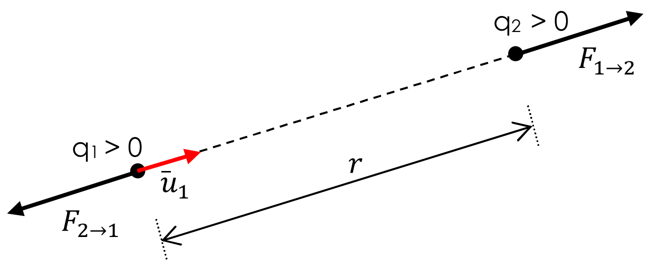


Figure 46 : Forces d'interaction coulombienne exercées entre deux charges.

$F_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1.q_2}{r^2}\bar{u}_1$

Posons : $\bar{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\bar{u}_1$: champ électrique crée par la charge q_1 en tout point l'espace se situant à une distance r de q_1.

Donc, $F_{1\to 2} = q_2.\bar{E}(r)$

III.4.2. Forces de contact

Considérons deux corps en contact, un solide avec un solide ou un solide avec un fluide.

III.4.2.1. Tension d'un fil

Considérons un fil inextensible, son extrémité est attachée à un support fixe. Un opérateur tire sur l'autre extrémité du fil, ce dernier se tend. L'opérateur applique donc une force F_1sur le fil et il va ressentir une force F_2 qui lui est appliquée par le fil. Cette force s'appelle la tension du fil. Elle a la même direction que F_1, même intensité, et sens opposé ; on écrit :

$$F_1 = \quad F_2$$

Exemple 1

Considérons une masse m attachée à une extrémité d'un fil inextensible, l'autre extrémité est fixée à un support comme indiqué sur la figure 47:

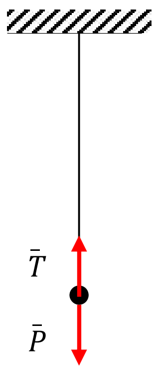


Figure 47 : Tension d'un fil.

Ici, la force de l'opérateur F_1 est remplacée par le poids de la masse $\bar{P}$

On écrit donc, $\bar{P} = \quad \bar{T}$ ou encore mg = T

Exemple 2

Considérons une masse m attachée à une extrémité d'un ressort de constante de raideur k, l'autre extrémité est fixée à un support comme indiqué sur la figure 48:

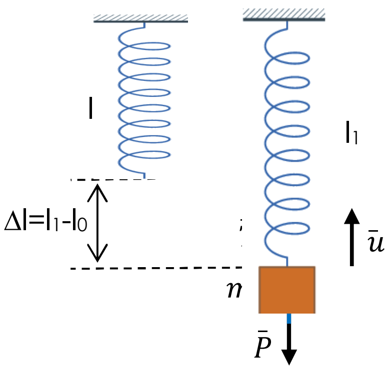


Figure 48 : Ressort à vide, puis avec une masse attachée à son extrémité.

La force de rappel du ressort T est proportionnelle à l'allongement Δl et s'écrit :
$\bar{T} = k(l_1 \quad l_0)\,\bar{u}$
Avec, l_0 la longueur du ressort à vide, l_1 la longueur du ressort et k la constante de raideur du ressort.
A l'équilibre : $\bar{T} = \quad p$

III.4.2.2. Force de réaction d'un support

Un objet posé sur un support de surface horizontale va appliquer par le biais de son poids une force perpendiculaire à cette surface. Pour que l'objet ne s'enfonce pas dans le support, ce dernier va lui appliquer une force de réaction de même intensité que le poids mais de sens opposé.

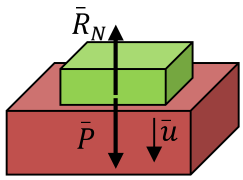


Figure 49 : Force de réaction d'un support.

On écrit : $\bar{R}_N = \quad \bar{P} = \quad mg.\bar{u}$

III.4.2.3. Force de frottement

Soit deux objets en contact. Lorsque l'un est en mouvement par rapport à l'autre, il apparait une force, appelée force de ***frottement*** qui s'oppose à ce mouvement. Lorsque les deux objets sont des solides, on parle de fortement solide (forces de friction), si l'un est solide et l'autre un liquide, on parle de frottement visqueux.

Frottement solide

Lorsqu'un frottement s'oppose à un mouvement déjà établi, on parle de frottement cinétique, et lorsqu'il empêche un mouvement de démarrer, il s'agit de frottement statique.
.
Considérons l'exemple de l'objet posé sur un support horizontal. On pousse horizontalement l'objet à l'aide d'une force F motrice.

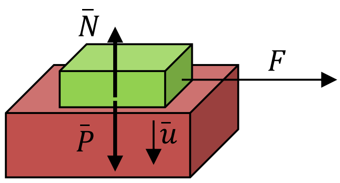


Figure 50 : Force de frottement exercée par un support sur un objet muni d'une force motrice.

Si cette force n'est pas suffisante, l'objet reste à sa position à cause d'une force de résistance appelée force de frottement solide notée f_s . Si l'on continue de pousser encore et encore, l'objet se met à bouger et donc la force de frottement atteint sa valeur limite $f_{s.max}$. L'Objet ne bouge pas tant que l'intensité de $\bar{\mathrm{F}}$ n'est pas supérieure à $f_{s.max}$

$f_{s.max} = \mu_s N$ (loi de coulomb) ;

où μ_s est le coefficient de frottement statique qui dépond de la nature de la surface de contact.

La réaction du support $\bar{\mathrm{R}}$ peut se décomposer donc en deux composantes : une composante normale $\bar{\mathrm{N}}$ (N = P = mg) et une composante tangentielle f_s : $\bar{\mathrm{R}} = \bar{\mathrm{N}} + f_s$

On peut donc définir l'angle de frottement φ qu'est l'angle entre la composante normal $\bar{\mathrm{N}}$ et la réaction du support $\bar{\mathrm{R}}$: $\tan\varphi = \frac{f_s}{N}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

L'angle de frottement maximal $\varphi_{\max}$ s'écrit : $\tan\varphi_{\max} = \frac{f_{s.max}}{N} = \mu_s$

Si $\varphi \le \varphi_{\max}$ l'objet ne bouge pas

Si $\varphi > \varphi_{\max}$, l'objet se met en mouvement

Lorsque l'objet est en mouvement, on se retrouve dans l'état non statique ou bien cinétique avec une autre force de frottement notée $f_c = \mu_c N$;

où μ_c est le coefficient de frottement cinétique.

L'expérience montre que $\mu_c < \mu_s$.

Sur la figure ci-dessous, nous montrons la variation de la force de frottement en fonction de la force motrice appliquée.

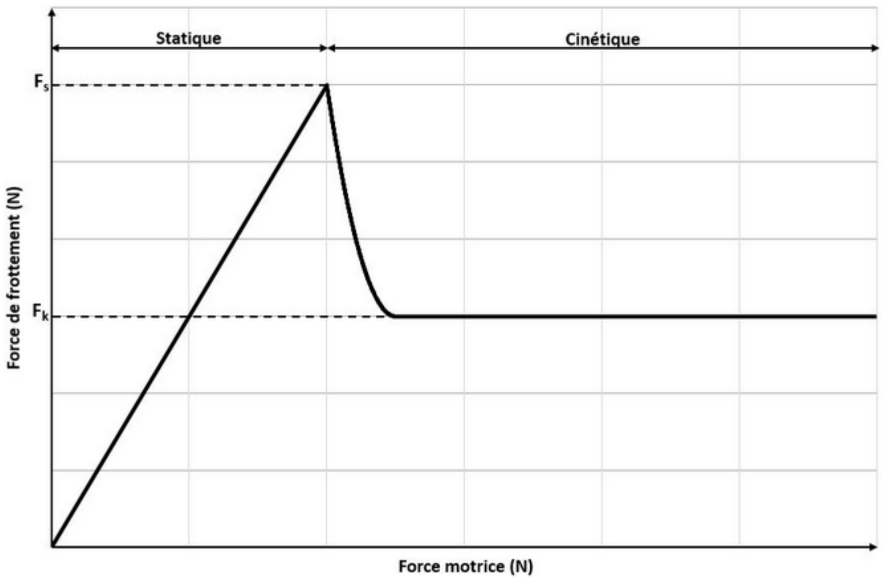


Figure 51 : Variation de la force de frottement en fonction de la force motrice appliquée.

Frottement visqueux (contact solide –liquide)

Lorsqu'un objet est en mouvement dans un fluide (liquide ou gaz), il apparait des forces de frottement qui s'opposent à ce mouvement. Lorsque la vitesse relative de l'objet par rapport au fluide est faible, la force de frottement visqueux s'écrit :

f = $\alpha.\bar{\mathrm{v}}$,

avec, α est le coefficient de frottement visqueux, il dépend de la nature du fluide (viscosité η) ainsi que de la forme de l'objet (coefficient K) , $\alpha = K\eta$

$\bar{v}$ est la vitesse relative de l'objet par rapport au fluide.

Exemple : pour un objet de forme sphérique K= $6\pi R$

$f = \quad 6\pi R\eta.\bar{v}$ (loi de Stockes)

Cette loi n'est valable que pour des vitesses faibles. Lorsque la vitesse est élevée, il s'agit de frottement turbulent et la force de frottement s'écrira :

$f = \alpha.v^2$

III.5. Théorème du moment cinétique

Dans de nombreux problèmes, il est plus utile d'utiliser le théorème du moment cinétique que le principe fondamental de la dynamique.

III.5.1. Moment d'une force

Considérons un point matériel M dans un référentiel $\Re$ soumis à une force $\bar{F}$.

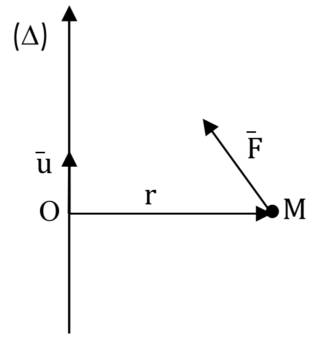


Figure 52 : Moment d'une force par rapport à un point.

Le moment de la force $\bar{F}$ par rapport au point O est défini par :

$\tau_O = \overline{OM} \wedge \bar{F} = r \wedge \bar{F}$; c'est un vecteur perpendiculaire au plan contenant les vecteurs r et $\bar{F}$ de façon à ce que le trièdre $(\bar{u}, r, \bar{F})$ soit direct.

Le moment de la force $\bar{F}$ par rapport à l'axe (Δ) est la grandeur scalaire définie par :

$\tau_\Delta = \tau_O.\bar{u}$; c'est la projection de τ_O sur l'axe (Δ)

III.5.2. Moment cinétique

Le moment cinétique du point M par rapport au point O dans le référentiel $\Re$ est défini par :

$\bar{L}_O = \overline{OM} \wedge \bar{P} = r \wedge \bar{P}$

Où, $\bar{P} = m\bar{v}$ (vecteur quantité de mouvement)

Le moment cinétique du point M par rapport à l'axe (Δ) passant pas O et ayant comme vecteur unitaire $\bar{u}$ est défini par :

$\bar{L}_\Delta = \bar{L}_O.\bar{u}$; c'est la projection de $\bar{L}_O$ sur l'axe (Δ).

III.5.3. Théorème du moment cinétique

Dérivons par rapport au temps le moment cinétique du point M par rapport au point O dans le référentiel $\Re$, nous obtenons le moment dynamique :

$\frac{d(\bar{L}_O)}{dt} = \frac{d(\bar{r} \wedge \bar{P})}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \wedge \bar{P} + r \wedge \frac{d\bar{P}}{dt}$

$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$

$\frac{d\bar{r}}{dt} \wedge \bar{P} = \bar{v} \wedge m\bar{v} = m.\bar{v} \wedge \bar{v} = \bar{0}$

Donc, $\frac{d(\bar{L}_O)}{dt} = \frac{d(\bar{r} \wedge \bar{P})}{dt} = r \wedge \frac{d\bar{P}}{dt} = r \wedge \bar{F} = \tau_O$

Le théorème s'énonce :

Dans un référentiel Galiléen, la dérivée par rapport au temps (le moment dynamique) du moment cinétique du point M par rapport au point fixe O du référentiel Galiléen $\Re$ est égale au moment de la résultante des forces extérieures appliquées sur M.

$\frac{d\bar{L}_O(M/\Re)}{dt} = \tau_O(\sum f_{ext})$

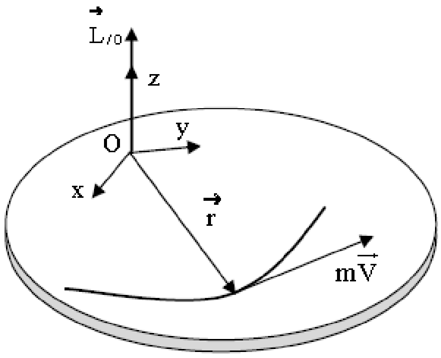


Figure 53 : Principe du moment cinétique.

De même, on peut vérifier que :

$\frac{d(\bar{L}_\Delta)}{dt} = \tau_\Delta$

Chapitre IV : Travail et énergie

IV.1. Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent, que lorsqu'on connait les forces qui s'appliquent sur un point matériel, on peut prédire son mouvement. Ceci, passe par l'application de la loi fondamentale de la dynamique (mécanique classique ou mécanique Newtonienne). Cette approche nécessite la détermination de toutes les forces qui s'exercent sur un point matériel, ce qui n'est pas toujours facile à réaliser, ou cette approche nous amène parfois à des équations différentielles, difficiles à résoudre. Nous allons donc introduire la notion du travail et l'énergie, une autre approche qui permet de résoudre les problèmes de la mécanique avec moins de calcul et moins d'étapes.

IV.2. Travail d'une force

Le travail d'une force mesure l'effort à faire pour déplacer un objet le long d'un trajet. Intuitivement, plus la distance à parcourir est longue, plus le travail sera grand et plus l'objet est imposant et plus le travail à fournir pour le déplacer sera grand.
Le travail d'une force appliquée à un objet est donc le produit de la composante de la force dans la direction du mouvement par le déplacement sur lequel la force agit.

$w = F.dr$

Où, dr est le vecteur déplacement, et F est la force appliquée.

Le travail W s'exprime en Joules (1J=1Nm)

W est une grandeur algébrique : si W est positif le travail est appelé **travail moteur.**
Dans le cas contraire il est dit **travail résistant**.

IV.2.1. Travail élémentaire

Considérons un point matériel (M) se déplaçant sous l'action d'une force F sur une trajectoire de forme quelconque.

Nous décomposons la trajectoire en une succession d'éléments dl infiniment petits pour pouvoir les considérer comme rectilignes. Sur le déplacement élémentaire dl, la force n'a pas le temps de varier, elle est donc considérée comme constante.

On associé au déplacement élémentaire dl un travail élémentaire δw tel que :
$\delta w = F.dl$

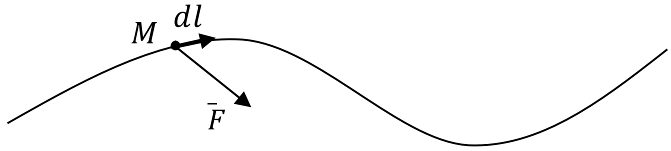


Figure 54 : Travail élémentaire.

Remarques

- δw est le résultat d'un produit scalaire, donc un scalaire
- δw dépond souvent du chemin suivi par l'objet et non pas juste de l'état initial et l'état final ; c'est pourquoi on note δw et non dw
- Le travail total effectué entre deux point M et M' sera :
  $w = \int_{M}^{M'} F.dl$

IV.2.2. Travail d'une force constante
Lorsque la force est constante, le travail fourni entre deux points M et M' est :

$$w = \int_{M}^{M'} F.dl = F\int_{M}^{M'} dl = F.\overline{MM'}$$

$$w = F.MM'cos\alpha$$

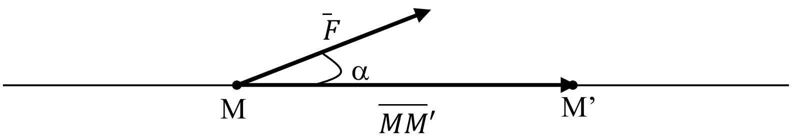


Figure 55 : Travail d'une force constante.

Remarques
Ici, le travail ne dépond que de la position final M' et la position initiale M, il ne dépend pas du chemin suivi.
Si $\bar{F}$ et $\overline{MM'}$ sont dans le même sens, alors w sera positif

Si $\bar{F}$ et $\overline{MM'}$ ont deux sens opposés, alors w sera negatif

Si $\bar{F}$ est perpendiculaire à $\overline{MM'}$, alors w sera nul.

IV.2.3. Travail d'une force variable le long d'un chemin quelconque
Si la force varie le long du trajet suivi, alors l'expression du travail fourni sera :

$$w = \int_{M}^{M'} F.dl$$

IV.2.3.1. Calcul du travail en utilisant les coordonnées cartésiennes
Il s'agit tout simplement d'exprimer le produit scalaire en fonctions des composantes de $\bar{F}$ et de $\overline{dl}$:

Soit $\bar{F}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ et $dl\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dy \end{pmatrix}$

$$w = \int_{M}^{M'} (F_x dx \ + \ F_y.dy + F_z.dz) = \int_{M}^{M'} F_x dx + \ \int_{M}^{M'} F_y dy + \ \int_{M}^{M'} F_z dz$$

Si $\bar{F}$ est constante (en grandeur et en direction)

$$w = F_x \int_M^{M'} dx \; + F_y \int_M^{M'} dy \; + F_z \int_M^{M'} dz = F_x(M'_x \quad M_x) + F_y\left(M'_y \quad M_y\right) + F_z(M'_z \quad M_z)$$

Donc on retrouve le résultat précédent : w ne dépond que de la position finale et la position initiale

IV.2.3.2. Calcul du travail en utilisant les coordonnées cylindriques

Connaissons les composantes du déplacement élémentaire dl en coordonnées cylindriques (regarder le chapitre consacré à la cinématique) :

Soit $\bar{F}\begin{pmatrix} F_\rho \\ F_\theta \\ F_z \end{pmatrix}$ et $dl\begin{pmatrix} d\rho \\ \rho.d\theta \\ dz \end{pmatrix}$

$$w = \int_M^{M'} (F_\rho d\rho \; + \; F_\theta.\rho.d\theta + F_z.dz)$$

IV.2.3.3. Calcul du travail en utilisant les coordonnées sphériques

De même, connaissons les composantes du déplacement élémentaire dl en coordonnées sphériques :

Soit $\bar{F}\begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\varphi \end{pmatrix}$ et $dl\begin{pmatrix} dr \\ r.d\theta \\ r.sin\theta.d\varphi \end{pmatrix}$

$$w = \int_M^{M'} (F_r dr \; + \; F_\theta.r.d\theta + F_\varphi.r.sin\theta.d\varphi)$$

IV.2.3.4. Calcul du travail en utilisant l'abscisse curviligne

Rappelons que le déplacement élémentaire $dl = ds.\bar{u}_T$

Donc, $w = \int_M^{M'} F_T ds$

IV.2.4. Travail de la force du poids d'un corps

Considérons un point matériel en déplacement suivant une trajectoire quelconque entre deux points A et B d'altitudes z_A et z_B respectivement et soumis à son poids (P = mg, une force constante).

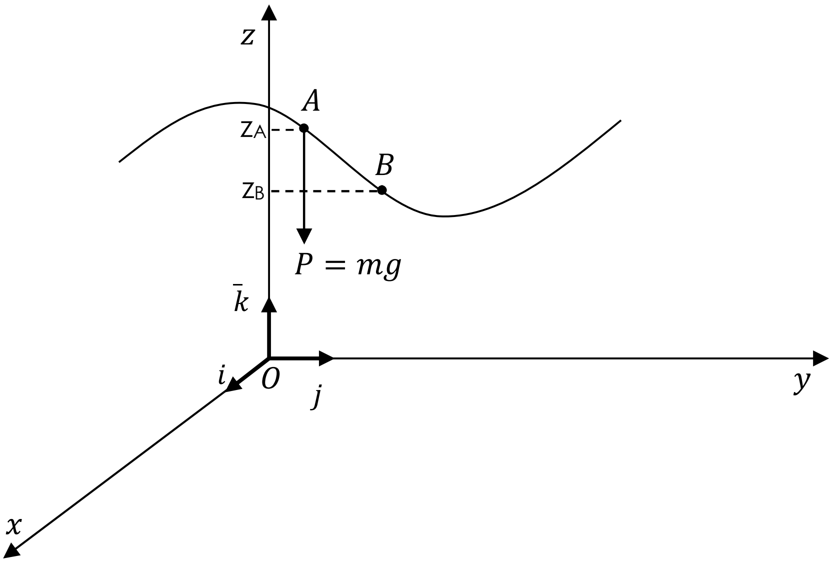


Figure 56 : Une masse en chute libre.

Connaissons les composantes du poids, qui est toujours dirigé vers le bas :
$\bar{P} = \quad mg\bar{k}$

Et celles du déplacement :
$\overline{dl} = dx.i + dy.j + dz.\bar{k}$

Donc, l'expression du travail sera :

$w = \int_A^B \quad mg.dz = \quad mg\int_A^B dz = \quad mg(z_B \quad z_A)$

Ou encore : $w = mg(z_A \quad z_B) = mg$

Avec, h est la différence de la hauteur entre les deux points A et B.

IV.2.5. Travail d'une force de rappel d'un ressort

Considérons un point matériel M en déplacement horizontal suivant l'axe Ox sans frottement. Ce point est attaché à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k. L'autre extrémité du ressort est attachée au point O, l'origine du repère.

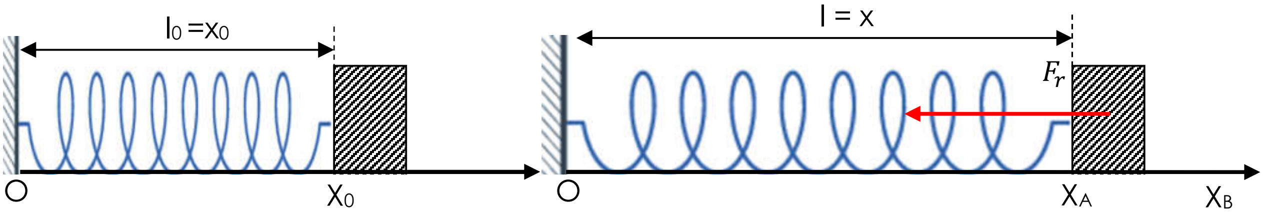


Figure 57 : Force de rappel d'un ressort.

La force de rappelle F_r du ressort s'écrit:

$$\bar{F}_r = \quad k(l \quad l_0)\,\imath = \quad k(x \quad x0)\,\imath$$

Le travail fourni par cette force lors du déplacement de l'objet de la position A vers B s'écrit :

$$w = \int_A^B \quad k(x \quad x_0)\,i\,.dx.\,i = \int_A^B \quad k(x \quad x_0)\,i\,.dx.\,i = \quad \frac{1}{2}k[(x_B \quad x_0)^2 \quad (x_A \quad x_0)^2]$$

IV.3. Puissance d'une force

Nous avons vu que dans l'expression du travail, le temps n'intervient pas. Ainsi, la valeur du travail est la même que le déplacement ait duré une seconde ou un jour. Pour tenir compte de la vitesse d'exécution de ce travail, on définit la puissance.
La puissance d'une force est la variation du travail par rapport au temps.

IV.3.1. Puissance moyenne

La puissance d'une force $\bar{F}$ sur le trajet de A vers B est le rapport du travail fourni par cette force sur le temps mis lors de ce déplacement.

$$P_{moy} = \frac{w(F)}{\Delta t}$$

La puissance s'exprime dans le SI en Watts (1W = 1J/s)

IV.3.2. Puissance instantanée

Considérons un déplacement élémentaire, ce qui correspond à un travail élémentaire δw effectué au cours d'une durée élémentaire dt, et donc on parle de puissance instantanée :

$$P(t) = \frac{\delta w}{dt}$$

IV.4. Énergie

L'énergie d'un corps est la capacité qu'il possède pour pouvoir produire un travail. Exemple : une voiture qui n'a pas de carburant (énergie) ne roule pas.
Il existe de nombreuses formes d'énergie (électrique, chimique, nucléaire, ...) mais on s'intéresse dans ce chapitre à l'énergie mécanique dont les deux aspects sont : l'énergie cinétique et l'énergie potentiel de pesanteur.

IV.4.1. Energie cinétique

Considérons un point matériel, sous l'effet d'une force $\bar{F}$ (la résultante des forces appliquées), en déplacement du point A vers le point B.

Le travail fourni de cette force est :

$$w = \int_A^B F.dl$$

On utilisant le principe fondamental de la dynamique (la 2ème loi de Newton) :

$F = m\gamma = m\frac{d\bar{v}}{dt}$

Sachant que $dl = vdt$

Donc, $w = \int_A^B m\frac{d\bar{v}}{dt}.vdt = \int_A^B m.dv.v = \int_A^B mv.dv = m\int_A^B vdv = m\frac{1}{2}(v_B{}^2 \quad v_A{}^2)$

$$w(F)_A^B = \ (\frac{1}{2}mv^2)_A^B$$

Par définition, la quantité $\frac{1}{2}mv^2$est appelée ***l'énergie cinétique,*** son unité est le ***Joule.***

IV.4.2. Théorème de l'énergie cinétique

Selon la relation qu'on vient de trouver : $w(F)_A^B = \ (\frac{1}{2}mv^2)_A^B$, le théorème de l'énergie cinétique s'énonce comme suit :

Dans un référentiel Galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel, soumis à un ensemble de forces extérieures, entre deux points A et B, est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

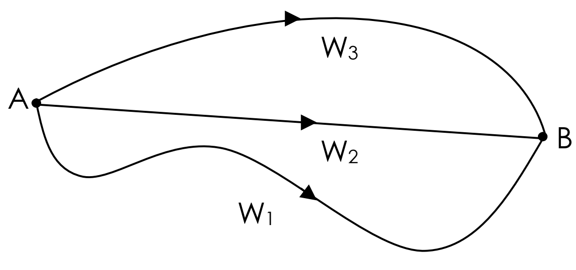
$$\frac{1}{2}mv_B{}^2 \quad \frac{1}{2}mv_A{}^2 = E_C(B) \quad E_C(A) = \sum W_{A\to B}(F_{ext})$$

Remarques

- L'énergie cinétique est toujours positive.
- L'énergie cinétique d'un objet est une mesure du travail nécessaire pour faire passer sa vitesse de zéro à une valeur donnée.
- Pour un travail moteur (positif) l'énergie cinétique croît au cours du déplacement.
- Pour un travail résistant, l'énergie cinétique décroit au cours du déplacement.

IV.4.3. Forces conservatives et non-conservatives

On appelle une force conservative, une force dont le travail fourni entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi mais seulement de la position B et la position initiale A.



W_1=W_2=W_3

W_1-W_2=0

Figure 58 : Un même travail fourni suivant différents chemins.

Si W_2 est le travail effectué lors du déplacement de A vers B en suivant le chemin 2 alors $-W_2$ sera le travail effectué entre B et A suivant le chemin 2 mais dans le sens inverse. On peut donc déduire que le travail effectué sur une boucle fermée et nul.

On peut donc dire qu'une force est conservative si son travail fourni suivant une boucle fermée est nul.

Exemples de force conservatives : La force de pesanteur, force élastique, force électrique
Exemples de force non conservatives : La force de frottement

IV.4.4. Énergie potentielle

Pour initier l'étudiant au concept de l'énergie potentiel, nous donnons l'exemple suivant :
Considérons un objet lancé vers le haut, à partir du sol, avec une vitesse V_0, donc une énergie cinétique ½.mV^2 . Arrivé à une certaine hauteur *h*, sa vitesse s'annule (ayant perdu toute son énergie cinétique) ; il effectue alors une chute libre. Partons de l'idée que l'énergie ne se crée pas mais se transforme. On peut dire alors qu'entre le sol et le point se trouvant à la hauteur h, le corps a transformé son énergie cinétique en énergie potentielle qu'il retransforme en énergie cinétique en retombant. Cette énergie potentielle est liée à la position d'un objet. En changeant de position, cette énergie peut augmenter (le système reçoit de l'énergie) ou une diminution (le système perd de l'énergie à l'extérieur).

On peut donc définir l'énergie potentielle comme étant l'énergie que possède un système lorsqu'il est soumis à une force susceptible de le mettre en mouvement.
Comme pour l'énergie cinétique, la variation de l'énergie potentielle est définie par le travail de certaines forces ; ce sont les forces conservatives.

Pour une force conservative F :$W_{A\to B}(F) = \int_A^B F.dl = E_P(A) \quad E_P(B) = \quad E_P$

Le signe (-) veut dire que pour un travail fourni positif il y'a une diminution de l'énergie potentielle, autrement dit, le déplacement se fait vers la décroissance de l'énergie potentielle.

Remarque :
- L'énergie potentielle ne dépend que de la position.
- L'énergie potentielle est définie à travers sa variation (E_P), donc elle est définie à une constantes additive près qu'on peu choisir arbitrairement.

IV.4.4.1. Relation entre l'énergie potentielle et la force conservative
Rappelons que le travail d'une force conservative entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement de l'état initial et de l'état final, représenté par une fonction d'état qu'on appelle l'énergie potentielle.

$W_{A\to B}(F) = E_P(A) \quad E_P(B)$, où $\bar{F}$ est une force conservative.

Pour une un déplacement élémentaire dl

$dE_P = \quad dw(F) = \quad F.dl$

Rappelons que le gradient d'une fonction f, noté $\overline{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\imath + \frac{\partial f}{\partial y}\jmath + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}$

Et que $dl = dx.\imath + dy.\jmath + dz.\bar{k}$

Donc, $\overline{grad}f.dl$ n'est rien d'autre que le différentiel total d'une fonction f

$df = \overline{grad}f.dl$

On peut donc écrire : $dE_P = \overline{grad}E_P.dl$
Or, $dE_P = \quad F.dl$,

D'où $\quad F = \quad \overline{grad}E_P$

On peut vérifier mathématiquement que si le rotationnel d'une force ($\overline{rot}(F) = \bar{\nabla} \quad F$) est nul alors cette force dérive d'un potentiel ($F = \quad \overline{grad}E_P$)

On écrit, si $\overline{rot}(F) = \bar{0}$ ➔ $F = \quad \overline{grad}E_P$

Remarque :
L'expression du gradient dépond du système de cordonnées choisi :

- Pour les cordonnées cylindriques : $\overline{grad}f(\rho, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\bar{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\bar{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}$
- Pour les cordonnées sphériques : $\overline{grad}f(\mathrm{r}, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{r}}\bar{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\bar{u}_\theta + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\bar{u}_\varphi$

IV.4.4.2. Énergie potentielle de la force de pesanteur
Nous avons montré que le poids est une force conservative, et que son expression est :
$F = \bar{P} = \quad mg\bar{k}$ pour un repère unidimensionnel dirigé vers le haut.

On peut donc écrire : $dE_P = \quad dw = \quad \bar{P}\,\overline{dl} = mg\bar{k}dz\bar{k} = mgdz$

$E_P = \int mgdz = mgz + Cste$

On peut choisir : à z=0, E_P=0 donc $Cste = 0$

IV.4.4.3. Énergie potentielle de la force de rappel d'un ressort élastique
Nous avons montré que la force de rappelle d'un ressort élastique est une force conservative et que son expression est :

$F = \quad kx\imath$
$dE_P = \quad dw = F\overline{dl} = kx\imath\, dx\, \imath = kxdx$

$$E_P = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2 + Cste$$

IV.4.5. Énergie mécanique

Soit un point matériel en déplacement entre deux points A et b, dans un référentiel galiléen, soumis à des forces, conservatives dont la résultante est F_c et non-conservatives dont la résultante est F_{Nc}.

Le travail fourni entre les deux points A et B est :

$$W_{A\to B}(F) = \int_A^B (F_c + F_{Nc}).dl = W_{A\to B}(F_c) + W_{A\to B}(F_{Nc})$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = E_C(B) \quad E_C(A) = W_{A\to B}(F) = W_{A\to B}(F_c) + W_{A\to B}(F_{Nc})$$

Nous avons montré que pour une force conservative F_c:

$$\Delta E_P = E_P(A) \quad E_P(B) = W_{A\to B}(F_c)$$

Donc, $\Delta E_C = E_C(B) \quad E_C(A) = W_{A\to B}(F) = W_{A\to B}(F_c) + W_{A\to B}(F_{Nc}) = E_P(A) \quad E_P(B) + W_{A\to B}(F_{Nc})$

$$E_C(B) \quad E_C(A) = E_P(A) \quad E_P(B) + W_{A\to B}(F_{Nc})$$

Ou encore : $\left(E_C(B) + E_P(B)\right) \quad \left(E_C(A) + E_P(A)\right) = W_{A\to B}(F_{Nc})$

Par définition, $E_C(B) + E_P(B)$ est appelée l'énergie mécanique E_m ;

Son unité de mesure est le joule.

IV.5. Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie mécanique d'un point matériel en déplacement entre deux point A et B est égale à la somme des travaux de forces non-conservatives.

IV.5.1. Conservation de l'énergie mécanique

Considérons un point matériel en déplacement entre deux point A et B, qui n'est soumis qu'à des forces conservatives (les forces non-conservatives sont nulles).

En appliquant le théorème de l'énergie mécanique :

$E_m = W_{A\to B}(F_{Nc}) = 0$, donc pas de variation de l'énergie mécanique ($E_m(B) = E_m(A)$).

On dit que le système (ici, c'est le point matériel) est conservatif.

Remarque : E_m = Cste veut dire que la somme E_c+E_p =Cste mais l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p peuvent varier à condition que leur somme reste constante.