

UNIVERSITE IBN KHALDOUN DE TIARET

FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

ET

DEPARTEMENT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

**MECANIQUE DES FLUIDES
THEORIE ET APPLICATIONS**

**Polycopié de Cours destiné aux étudiants de 2^{ème} année
Licence (Semestre 3)**

Sciences et Technologie (ST)

Préparé par :

Dr ELGUERRI Mohamed

**Enseignant Chercheur
Maître de Conférences "B"
Génie Mécanique**

Année Universitaire 2014 / 2015

MECANIQUE DES FLUIDES - THEORIE ET APPLICATIONS

Table des matières

Chapitre 1. Propriétés des fluides

1.1 Introduction	05
1.2 Définition physique d'un fluide	06
1.2.1 États de la matière	07
1.2.2 Matière divisée (Dispersion, suspensions, émulsions)	08
1.3 Fluide parfait, fluide réel, fluide compressible et fluide incompressible	09
1.3.1 Fluide parfait	09
1.3.2 Fluide réel	10
1.3.3 Fluide incompressible	10
1.3.4 Fluide compressible	10
1.4 Masse volumique, densité	11
1.4.1 Masse volumique	11
1.4.2 Densité	11
1.5 Rhéologie d'un fluide, viscosité des fluides, tension de surface d'un fluide	12
1.5.1 Rhéologie d'un fluide	12
1.5.2 Viscosité des fluides	13
1.5.3 Tension de surface d'un fluide	15
1.5.4 Compressibilité des fluides	17
1.6 Applications	17

Chapitre 2. Statique des fluides

2.1 Définition de la pression, pression en un point d'un fluide	23
2.1.1 Définition de la pression	23
2.1.2 Pression en un point d'un fluide	25
2.2 Loi fondamentale de statique des fluides	26

2.3	Surface de niveau	28
2.4	Théorème de Pascal	28
2.5	Calcul des forces de pression	31
2.5.1	Plaque plane (horizontale, verticale, oblique)	31
2.5.2	Centre de poussée	32
2.5.3	Instruments de mesure de la pression statique	35
2.5.4	Mesure de la pression atmosphérique	35
2.5.5	Baromètre et loi de Torricelli	37
2.6	Applications	38
Chapitre 3. Dynamique des fluides incompressibles parfaits		
3.1	Introduction	40
3.2	Ecoulement permanent	40
3.3	Equation de continuité	40
3.4	Débit masse et débit volume	41
3.4.1	Débit massique	41
3.4.2	Débit volumique	42
3.4.3	Relation entre débit massique et débit volumique	43
3.5	Théorème de Bernoulli, cas sans échange de travail et avec échange de travail	43
3.5.1	Cas sans échange de travail	43
3.5.2	Cas avec échange de travail	44
3.6	Applications aux mesures des débits et des vitesses : Venturi, Diaphragmes, tube de Pitot ...	46
3.6.1	Venturi	46
3.6.2	Diaphragmes	47
3.6.3	Tube de Pitot	48
3.7	Théorème d'Euler	49
3.8	Applications	51

Chapitre 4. Dynamique des fluides incompressibles réels

4.1	Régimes d'écoulement, expérience de Reynolds	55
4.2	Analyse dimensionnelle, théorème de Vashy-Buckingham, nombre de Reynolds	55
4.2.1	Régimes d'écoulement	55
4.2.2	Expérience de Reynolds	55
4.3	Pertes de charges linéaires et pertes de charge singulières, diagramme de Moody	56
4.3.1	Analyse dimensionnelle	56
4.3.2	Théorème de Vaschy-Buckingham	56
4.3.3	Nombre de Reynolds	57
4.4	Généralisation du théorème de Bernoulli aux fluides réels	58
4.4.1	Introduction	58
4.4.2	Pertes de charges linéaires	61
4.4.3	Pertes de charge singulières	62
4.4.4	Diagramme de Moody	63
4.5	Applications	63

Tiaret, le 2 novembre 2014
Dr ELGUERRI Mohamed

Chapitre 1. Propriétés des fluides

1.1 Introduction

On reconnaît les choses généralement par leurs noms ou on les définit parfois par leurs opposés. Dans notre cas la première et la plus appropriée, alors, dans l'expression mécanique des fluides le premier terme (mécanique) vient du mot machine qui est relatif aux lois du mouvement et de l'équilibre des mécanismes et le second (fluide) désigne les matières en écoulement qui englobe les liquides et les gaz qui sont deux états de la matière. L'expression mécanique des fluides signifie donc les choses qui sont en mouvement ou désigne l'étude du mouvement des liquides et/ou des gaz en écoulement. D'une manière plus académique, la mécanique des fluides étudie les lois physiques régissant l'écoulement des liquides et des gaz et aide à reconnaître les causes et les effets de ces écoulements afin de déterminer leurs paramètres caractéristiques comme le champ de pression ou le champ de vitesse en tenant compte des différentes propriétés du fluide telles que la densité et la viscosité et principalement les relations existant entre elles dans différentes situations.

Les phénomènes physiques dans l'univers ne sont pas simples dans leurs actions, ils se manifestent de manières de plus en plus complexes, ce qui rend leurs études si compliquée pour cela le traitement de problèmes réels des écoulements par la mécanique des fluides a besoin de simplifications afin de faciliter d'arriver à les résoudre. Par exemple, la respiration et la circulation du sang qui reposent sur le principe de l'écoulement du fluide, l'air qui nous entoure et la pression exercée par lui sur nous qui sont régis par les lois de l'écoulement du fluide. L'escalade ou la montée en altitude qui réduit la pression atmosphérique d'après les lois du fluide. Des applications simples de l'écoulement des fluides dans l'ingénierie comme le transport de l'eau ou des hydrocarbures dans des tuyaux jusqu'aux technologies avancées, comme la technologie sous profondeur d'eau de mer, la propulsion d'avion et le lancement de fusées dépendent tous sur le principe de l'écoulement du fluide.

La mécanique des fluides concerne l'étude du comportement des fluides et des forces internes qui lui sont associées, c'est la science des lois de l'écoulement des fluides. Elle est à l'origine du dimensionnement des conduites et des dispositifs de transport des fluides. C'est une branche de la physique qui étudie les écoulements des fluides sous l'effet des forces ou des contraintes et comprend deux grandes sous branches :

- la statique des fluides ou l'hydrostatique qui étudie les fluides au repos, historiquement le début de la mécanique des fluides avec la poussée d'Archimède et l'étude de la pression.
- la dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement, comme d'autres branches de la mécanique des fluides.

On distingue également d'autres branches importantes liées à la mécanique des fluides : l'hydraulique, l'hydrodynamique, l'aérodynamique, etc.

Une nouvelle approche a vu le jour depuis quelques décennies est la mécanique des fluides numérique qui signifie en anglais Computational Fluid Dynamics (CFD) qui permet la simulation par ordinateurs les écoulements des fluides par résolution numérique des équations qui les gouvernent.

La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans des domaines divers comme l'aéronavale, l'aéronautique, la météorologie, la climatologie ou encore l'océanographie, etc.

1.2 Définition physique d'un fluide

Un fluide est un milieu matériel, continu, déformable et sans rigidité qui peut s'écouler (c'est-à-dire subir de grandes variations de forme) sous l'action de forces qui sont d'autant plus faibles que ces variations de forme sont plus lentes.

Un fluide est supposé être une matière formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Les forces de cohésion entre particules élémentaires sont très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre qui prend la forme du récipient qui le contient, par exemple : les métaux en fusion sont des fluides qui permettent par moulage d'obtenir des pièces brutes de formes complexes. Il est important de souligner qu'un fluide est considéré comme un milieu continu : même si l'on choisit un très petit élément de volume, il sera toujours beaucoup plus grand que la dimension des molécules qui le constitue. Par exemple, une gouttelette de brouillard, aussi petite soit-elle à notre échelle, est toujours immense à l'échelle moléculaire. Elle sera toujours considérée comme un milieu continu. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz.

1.2.1 États de la matière

La matière est la substance qui compose tout corps ayant une réalité tangible. Ses trois états les plus communs sont l'état solide, l'état liquide, l'état gazeux. La matière occupe de l'espace et possède une masse. Ainsi, en physique, tout ce qui a une masse est de la matière. La matière peut donc se retrouver sous différentes formes : liquide, solide ou gaz.

L'état de l'eau est en fait fonction de l'agitation de ses molécules (H_2O : molécule renfermant deux atomes d'hydrogène et un atome d'oxygène).

- A l'état **solide**, les molécules d'eau sont soudées les unes aux autres et vibrent très faiblement (d'autant moins que la température de la glace est basse).
- A l'état **liquide**, les molécules d'eau sont associées ; c'est-à-dire faiblement attachées les unes aux autres.
- A l'état **gazeux**, les molécules ne sont plus liées entre elles ; elles sont animées de mouvements désordonnés.

Solide	Liquide	Gaz
		
Glaçon	Eau	Nuage

Figure 1.1 Présentation des trois états de la matière pour l'eau

Le passage d'un état de la matière à un autre s'effectue par transition de phase lors d'un changement d'état thermodynamique provoqué par une modification de sa pression, de sa température et/ou de son volume. En plus des trois principaux états de la matière il existe d'autres états : plasma, fluide supercritique, mésophase ...

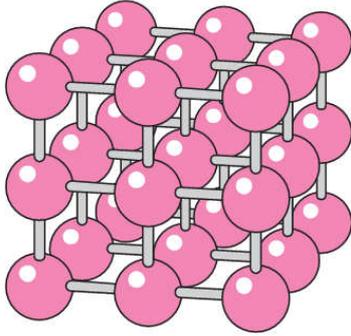
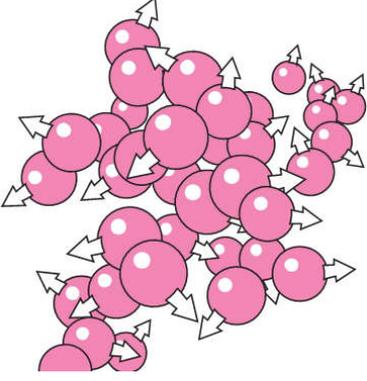
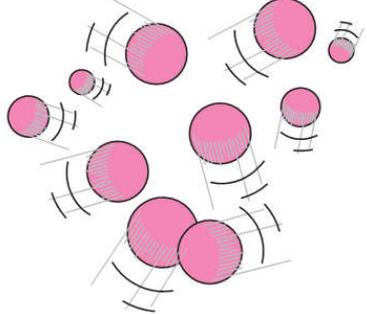
Etat Solide	Etat liquide	Etat gazeux
		
<ul style="list-style-type: none"> • molécules ordonnées • très rapprochées • liées 	<ul style="list-style-type: none"> • molécules désordonnées • rapprochées • peu liées 	<ul style="list-style-type: none"> • molécules désordonnées • espacées • très agitées
<p>caractéristiques :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Forme invariable • Volume invariable 	<p>caractéristiques :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Forme variable • Volume invariable 	<p>caractéristiques :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Forme variable • Volume variable

Figure 1.2 Représentation de la disposition des molécules d'eau selon les trois états

1.2.2 Matière divisée (Dispersion, suspensions, émulsions)

Un fluide n'est jamais à l'état purement liquide ou gazeux, sa composition est en réalité un mélange de différentes matières dont l'une d'entre elles est principale et contenant les autres qui peuvent être à des proportions différentes. Un fluide peut être à deux phases coexistant en équilibre thermodynamique ou en état pur en présence de particules en bulles de gaz, en gouttelettes ou en corps solides avec existence d'interfaces multiples entre la phase continue (liquide) et la phase dispersée (particules).

1. Dispersions

Les dispersions sont des mélanges de particules très fines de taille inférieure à un μm . Ces particules sont souvent de forme colloïdales comme les argiles. Les dispersions ne sédimentent pas seules et ne peuvent pas être filtrées mais elles forment des mélanges chimiquement très sensibles à ce qui peut modifier la nature de leurs interactions. Une modification simple de propriété d'une solution peut affecter complètement le comportement inter-facial des particules, provoquant des variations brutales de comportement du mélange, par exemple, l'ajout de sel à un gel de cheveux peut le liquéfier.

2. Suspensions

Les suspensions sont des mélanges de particules fines ou grosses de tailles supérieures à $1\ \mu\text{m}$, généralement sans interaction entre elles. A l'inverse des dispersions, les suspensions sédimentent à des vitesses qui dépendent de la taille des particules et des conditions de dépôt et peuvent être filtrées mécaniquement. Les suspensions sont généralement peu sensibles aux variations chimiques du liquide. Le transport en suspension de particules fines (sable, limon, silt) peut se faire dans un cours d'eau.

3. Emulsions

Le mélange de deux substances liquides en gouttelettes forme une émulsion. La plupart des liquides sont non miscibles. Le lait ou la mayonnaise sont des exemples d'émulsion de globules de graisse dans une phase aqueuse. La stabilité des émulsions est un problème important (coalescence des gouttelettes, séparation des phases). Les mousses sont des cas particuliers d'émulsion où les gouttelettes sont des bulles de gaz. Les chutes d'eau dans les cascades et l'écume des vagues sont des émulsions d'air dans de l'eau. Le phénomène de cavitation dans les conduites peut mener à la formation d'émulsions.

1.3 Fluide parfait et fluide réel, fluide incompressible et fluide compressible

Les fluides peuvent être classés en deux familles relativement à leur viscosité qui est une de leur caractéristique physico-chimique qui sera définie ultérieurement. Les fluides peuvent être classés en deux grande familles : La famille des fluides "newtoniens" (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) et celle des fluides "non newtoniens" (quasiment tout le reste... le sang, les gels, les boues, les pâtes, les suspensions, les émulsions...). Les fluides "newtoniens" ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température. La deuxième famille est constituée des fluides "non newtoniens" qui ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent.

1.3.1 Fluide parfait

Soit un système fluide, c.à.d. un volume délimité par une surface fermée \mathcal{S} fictive ou non. Considérons $d\mathbf{F}$ la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire $d\mathbf{S}$ de normale \mathbf{n} entre le fluide et le milieu extérieur. On peut toujours décomposer $d\mathbf{F}$ en deux composantes :

- une composante dF_N normale à dS ,
- une composante dF_T tangentielle à dS .

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement, c'est à dire quand la composante T est nulle. Autrement dit, la force dF est normale à l'élément de surface dS .

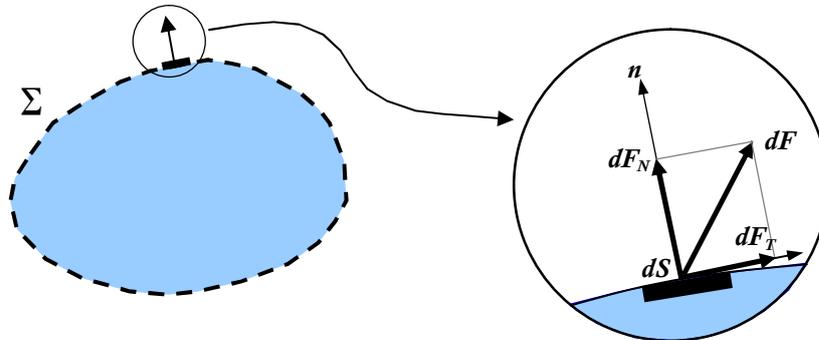


Figure 1.3 : Force d'interaction au niveau de la surface élémentaire d'un fluide

1.3.2 Fluide réel

A l'inverse d'un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle simplifiant les calculs, quasiment inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prises en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide.

C'est seulement au repos, qu'on accepte que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait et on suppose que les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent. La statique des fluides réels se confond avec celle des fluides parfaits.

1.3.3 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.).

1.3.4 Fluide compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure, les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

1.4 Masse volumique, densité

Souvent, il existe une confusion entre la masse volumique et la densité. Expliquer la différence fondamentale entre ces deux notions peut s'avérer important.

1.4.1 Masse volumique

La masse volumique ou spécifique d'une substance est définie par la masse d'une unité de volume de cette substance. On la calcule par la relation :

$$\rho = \frac{\text{masse}}{\text{volume}} = \frac{m}{V} \quad (1.1)$$

où ρ : masse volumique en $[\text{kg}/\text{m}^3]$, m : masse en $[\text{kg}]$ et V : volume en $[\text{m}^3]$.

La masse volumique de l'eau est voisine de $1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ à la température ordinaire. La masse volumique d'un gaz est obtenue à partir de l'équation d'état des gaz parfaits.

Tableau 1.1 : Exemples de masses volumique selon le type de fluide

Type	Incompressible					Compressible (*)		
Fluide	Benzène	Eau	Huile d'olive	Chloroforme	Mercure	Air	Hydrogène	Méthane
Masse volumique ρ $[\text{kg}/\text{m}^3]$	880,000	1.000,000	918,000	1.489,000	13.546,000	1,205	0,880	0,717

(*) Valeurs prises à titre indicatif dans les conditions normales de pression et de température.

Souvent une propriété liée à la masse volumique est utilisée, c'est le poids volumique, défini par :

$$\varpi = \frac{m \cdot g}{V} = \rho \cdot g \quad (1.2)$$

avec ϖ poids volumique en $[\text{N}/\text{m}^3]$, m masse en $[\text{kg}]$, g accélération de la pesanteur en $[\text{m}/\text{s}^2]$ et V volume en $[\text{m}^3]$.

1.4.2 Densité

La densité d'un corps est le nombre sans dimension qui exprime le rapport de la masse du corps à la masse d'un volume égal d'une substance de référence. Les solides et les liquides sont comparés à l'eau (à $4 \text{ }^\circ\text{C}$) prise Comme référence, tandis que les gaz sont souvent comparés à l'air (sans gaz carbonique et sans hydrogène) pris comme référence (à $0 \text{ }^\circ\text{C}$ et $1 \text{ atmosphère} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$).

La densité est une grandeur sans unité définie par :

$$d(\text{densité}) = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique du fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{\text{ref}}} \quad (1.3)$$

Le corps de référence dépend de l'état physique :

- eau : pour les solides et liquides ;
- air : pour les gaz.

Cas de l'eau : Étant donné que la masse volumique de l'eau peut valoir 1,0 avec certaines unités, on aura la même valeur pour la masse volumique et la densité.

1.5 Rhéologie d'un fluide, viscosité des fluides et tension de surface d'un fluide

1.5.1 Rhéologie d'un fluide

La rhéologie vient des mots grecs rheo qui veut dire couler et logos qui signifie étude pour constituer l'étude de l'écoulement (ou de la déformation) de la matière (sous l'effet d'une contrainte appliquée). Le concept (rheology) a été introduit en 1928 par Bingham, sa plus simple définition est donc la science de la déformation et de l'écoulement de la matière.

Étymologiquement, la rhéologie est une science qui traite de l'écoulement, des déformations, et plus généralement de la viscosité des matériaux sous l'action de contraintes. Elle est capable d'intégrer l'étude des liquides ou solides. Mais dans la plupart des cas, sont traités des problèmes qui concernent les solides pâteux ou les liquides épais. Les termes utilisés ici sont volontairement équivoques. La notion de liquide recouvre aussi bien des liquides très fluides comme l'eau, les solvants organiques, les solutions et les dispersions diluées mais aussi des substances beaucoup plus visqueuses et consistantes à l'aspect pâteux, semi solide voire même solide. Ces différences sont souvent dues à la très large gamme d'échelle de temps qui concerne le mécanisme d'écoulement. L'écoulement d'un fluide comme l'eau s'effectue instantanément sous l'effet de la pesanteur. Dans certains cas, il faudra attendre quelques longtemps, pour observer un début d'écoulement significatif.

Malgré ces différences d'échelle de temps, ce sont les mêmes lois de comportement et les mêmes grandeurs qui régissent les écoulements. La viscosité n'est pas la seule grandeur à observer, la plupart des matériaux possèdent également des propriétés élastiques d'autant plus marquées qu'ils possèdent une organisation moléculaire complexe. La viscoélasticité étudie de concert les propriétés visqueuses et élastiques des matériaux.

On s'intéresse à la rhéologie car il existe plusieurs secteurs qui sont concernés par la rhéologie, l'agroalimentaire, la plasturgie, les peintures, les cosmétiques, l'envasement des barrages, l'industrie du papier, ...

1.5.2 Viscosité des fluides

La viscosité tiens son nom du latin viscum signifiant résistance à l'écoulement se produisant dans la masse d'une matière. Elle est définie aussi comme la résistance à l'écoulement des différentes couches d'un fluide (les unes sur les autres). Lorsque la viscosité augmente, la capacité du fluide à s'écouler diminue.

La viscosité est le critère qui différencie un fluide réel d'un fluide parfait. Elle est la cause des frottements internes qui entraînent la dissipation d'énergie mécanique en chaleur.

1. Viscosité dynamique

La viscosité dynamique correspond à la contrainte de cisaillement qui accompagne l'existence d'un gradient de vitesse d'écoulement dans la matière.

On classe notamment les huiles mécaniques selon leur viscosité, en fonction des besoins de lubrification du moteur et des températures auxquelles l'huile sera soumise lors du fonctionnement du moteur.

Si le coefficient de viscosité dynamique μ des liquides est bien supérieur à celui des gaz, par contre le coefficient de viscosité cinématique est souvent inférieur.

Contrairement au cas des gaz, la viscosité des liquides diminue avec la température. Des formules empiriques ou semi-empiriques permettent de relier μ à T . C'est par exemple celle de Walther qui est applicable aux huiles de graissage :

$$\mu = \mu_0 e^{(T_0/T)^m} \quad (1.4)$$

avec m une constante qui dépend du liquide étudié.

2. Viscosité cinématique

Beaucoup d'équations de la mécanique des fluides comprennent le ratio μ/ρ . Parce qu'il se produit si souvent, ce ratio a été donné le nom spécial viscosité cinématique.

Le symbole utilisé pour identifier la viscosité cinématique est ν . L'unité de la viscosité cinématique est $[m^2/s]$, comme indiqué.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{N \cdot s / m^2}{kg / m^3} \right] = \left[\frac{m^2}{s} \right] \quad (1.5)$$

L'unité du système CGS (Centimètre Gramme Seconde) est le stokes noté St où 1 St = 1 cm²/s. Dans le système SI (Système International) l'unité n'a pas de nom particulier, c'est le mètre carré par seconde noté aussi par :

$$1 \text{ m}^2/\text{s} = 10^4 \text{ St} = 1 \text{ myriastokes.}$$

Il existe d'autres unités de la viscosité qui sont souvent employées dans l'industrie, particulièrement, pour définir les huiles minérales. Ces unités qui correspondent à une viscosité cinématique sont :

- le degré de viscosité Engler (*E*), utilisé en France et en Allemagne ;
- la seconde de viscosité Redwood Standard (*R*), essentiellement en Angleterre ;
- la seconde de viscosité Saybolt Universal (*S*) aux États-Unis ;
- le nombre *SAE* (Society of Automotive Engineers).

Ces diverses viscosités sont définies à partir de mesures très précises faites avec des appareillages particuliers :

- À l'aide du viscosimètre Engler, on définit le degré Engler qui est le rapport du temps nécessaire à l'écoulement de 200 cm³ du liquide à étudier à travers un orifice calibré, au temps nécessaire à l'écoulement de 200 cm³ d'eau à 20 °C à travers le même orifice (ce dernier temps est de 51 s pour l'appareil Engler).
- La Second Redwood Standard (SRS) a, par convention, la valeur 100 pour une huile de densité 0,915 et dont 50 cm³ s'écoulent en 535 s à 15,55 °C dans l'appareil Redwood Standard.
- La Second Redwood Standard (SRS) est utilisée pour exprimer les viscosités moyennes ; pour les fortes viscosités, on utilise la Second Redwood Admiralty (SRA) qui est sensiblement dix fois plus grande que la Second Redwood Standard.
- La Second Saybolt Universal (SSU) est le nombre de secondes nécessaires à l'écoulement de 60 cm³ du liquide à étudier dans le viscosimètre Saybolt Universal (la viscosité de l'eau à 15,5 °C est de 30 SSU). Pour les fortes viscosités, on utilise le viscosimètre Saybolt Furol et on exprime la viscosité en Second Saybolt Furol (SSF) qui est sensiblement dix fois plus grande que la Second Saybolt Universal (SSU).
- Le nombre SAE, qui a été introduit aux États-Unis dans l'industrie automobile, ne mesure pas à proprement parler une viscosité mais couvre en réalité une gamme de

viscosités comprises entre certaines limites. Par exemple, à 50 °C, on peut noter les correspondances approximatives données dans le tableau 2.

Tableau 1.2 : Correspondance entre les nombres SAE et la viscosité d'une huile

Type d'huile	Nombre SAE	Degré Engler	Viscosité cinématique (en cm ² /s ou stokes)
Très fluide	20	8,0	0,60
Semi fluide	40	10,2	0,78
Semi épaisse	60	13,5	1,05
Épaisse	80	16,8	1,20
Très épaisse	140	22,0	1,60

On peut noter les relations de correspondance entre les différents types de viscosités comme il est indiqué sur la figure 1.4 qui présente la viscosité dans quatre systèmes différents : SI, Saybolt, Engler et SAE.

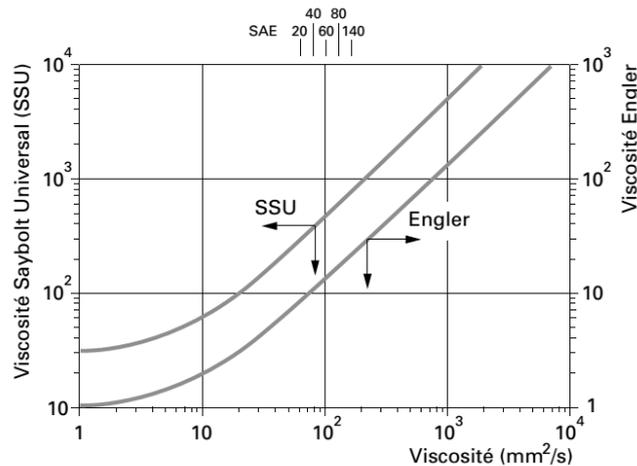


Figure 1.4 : Correspondance entre les viscosités « industrielles » et la viscosité cinématique

1.5.3 Tension de surface d'un fluide

La **tension superficielle** est un phénomène d'augmentation de l'énergie à la surface d'un fluide et qui en augmente localement la cohésion. Cet effet permet par exemple aux insectes de marcher sur l'eau, à un objet léger de se maintenir à la surface d'un liquide, à la rosée de ne pas s'étaler sur les pétales de fleurs, et explique la capillarité.

À la surface d'un milieu dense (liquide ou solide) ou à l'interface entre deux milieux denses, la matière n'est pas, localement, rigoureusement dans le même état. Ce nouvel état

local a une énergie légèrement supérieure. À la surface ou interface est donc associée une certaine énergie par unité de surface (exprimée en joules par mètres carrés [J/m^2]) dont l'origine est la force de cohésion entre molécules identiques. Un point de vue équivalent est qu'il existe, au voisinage de la surface ou interface, une certaine contrainte en tension dans le milieu ; c'est une force par unité de longueur, exprimée en N/m . On parle donc indifféremment d'énergie ou de tension.

Généralement, pour l'interface entre deux milieux denses, on parle de tension interfaciale, d'énergie interfaciale ou d'énergie d'interface. Entre un milieu dense et un gaz, on parle plutôt de tension superficielle, de tension de surface ou d'énergie de surface. Cet effet permet par exemple aux insectes de marcher sur l'eau, à un objet léger de se maintenir à la surface d'un liquide, à la rosée de ne pas s'étaler sur les pétales de fleurs et explique la capillarité. La tension superficielle explique aussi la formation des bulles de savon et la coalescence des gouttes ou des bulles.

Tableau 1.4 : Tension superficielle pour différents liquides en contact avec l'air

Liquide	Température [°C]	Tension de surface γ 10^{-3} [N/m]
Mercure	15	487,00
	20	436,00
Eau	0	75,64
	20	72,80
	25	71,97
	50	67,91
	100	58,85
Glycérol	20	63,00
Acide acétique (10,0 %) + Eau	30	54,56
Éthanol (11,1 %) + Eau	25	46,03
Acide acétique (40,1 %) + Eau	30	40,68
Éthanol (40 %) + Eau	25	29,63
Acide acétique	20	27,60
Acétone	20	23,70
Méthanol	20	22,60
Éthanol	20	22,27
Octane	20	21,80
Isopropanol	20	21,70
Diéthyl éther	20	17,00

1.5.4 Compressibilité des fluides

La compressibilité est une caractéristique d'un corps, définissant sa variation relative de volume sous l'effet d'une pression appliquée. C'est une valeur très grande pour les gaz, faible pour les liquides et très faible pour les solides usuels. Elle est définie par :

$$\chi = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} \quad (1.6)$$

où V est le volume du corps et P la pression appliquée. χ s'exprime en Pa^{-1} .

La variation de volume avec la pression étant le plus souvent négative, cette définition rend la compressibilité χ positive. Cette définition est le plus souvent insuffisante : sous l'effet d'une compression, les corps ont tendance à s'échauffer, et donc on définit une compressibilité isotherme pour un corps restant à température constante :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dP} \right)_T \quad (1.7)$$

T comme indice de la dérivée indique que la dérivée est prise à température constante.

On remarquera que le **coefficient de compressibilité** est l'inverse du **module d'élasticité isostatique** du milieu, généralement noté K , aussi appelé **module de compressibilité**. C'est une variable intensive toujours positive, le volume du corps ne pouvant que diminuer, lorsqu'on augmente la pression.

1.6 Applications

Exercice 1.1 Calculer le poids volumique d'un carburant diesel d'une densité $d = 0,85$.

Solution : L'accélération de la pesanteur $g = 9,81$ et la masse volumique de l'eau $\rho = 1000$ kg/m^3 . Le poids volumique est défini par :

$$\varpi = \rho \cdot g = (\rho_{ref} \cdot d) \cdot g = 1000 \cdot 0,85 \cdot 9,81 = 8338,5 \text{ N} / \text{m}^3.$$

Exercice 1.2 Calculer le poids P_0 d'une huile industrielle de densité $d = 0,92$ et d'un volume $V = 3$ litres.

Solution : Le poids est donné par l'équation suivante :

$$P_0 = m \cdot g = (\rho \cdot V) \cdot g = (\rho_{ref} \cdot d) \cdot V \cdot g = 1000 \cdot 0,92 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 = 27,08 \text{ N}.$$

Exercice 1.3 L'unité de viscosité SSU utilisée en Grande Bretagne permet de connaître la viscosité cinématique. C'est le temps d'écoulement de 60 cm^3 du fluide à la température d'essai, exemple : l'eau SSU à $15,6 \text{ }^\circ\text{C}$ ($60 \text{ }^\circ\text{F}$) est de 30 secondes. Convertir la viscosité de 510 SSU (seconde.Saybolt) à $15,5 \text{ }^\circ\text{C}$ en viscosité cinématique ν en m^2/s .

Solution : a) pour $t \leq 100$, μ en poises = $(0,00226 t - 1,95 / t) \cdot \text{densité}$,
 pour $t > 100$, μ en poises = $(0,00220 t - 1,35 / t) \cdot \text{densité}$,
 b) pour $t \leq 100$, ν en stokes = $(0,00226 t - 1,95 / t)$,
 pour $t > 100$, ν en stokes = $(0,00220 t - 1,35 / t)$,

où t en (seconde.Saybolt). Pour convertir les stokes (cm^2/s) en m^2/s , il suffit de diviser par 10^4 . D'après (b) et pour $t > 100$, $\nu = (0,00220 \cdot 510 - 1,35 / 510) \times 10^{-4} = 1,119 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$.

Exercice 1.4 D'après "International Critical Tables", la viscosité de l'eau à $20 \text{ }^\circ\text{C}$ est de 0,01008 poises. a) Calculer la viscosité absolue en $\text{Pa}\cdot\text{s}$. b) Si la densité à $20 \text{ }^\circ\text{C}$ est de 0,998, calculer la valeur de la viscosité Cinématique en m^2/s .

Solution : En utilisant la définition :

$$1 \text{ poise} = \frac{10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s}}{\text{cm}^2} = \frac{10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s}}{(10^{-2} \text{ m})^2} = \frac{10^{-1} \text{ N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

a) μ (en $\text{Pa}\cdot\text{s}$) = $0,01008 \times 0,1 = 1,008 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

b) ν en m^2/s = $\mu / \rho = 1,008 \times 10^{-3} / (0,998 \times 1000) = 1,01 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Exercice 1.5 Déterminer la viscosité dynamique d'une huile de lubrification (20W) de moteur sachant que sa densité est de 0,886 et sa viscosité cinématique est de 0,259 Stockes à $25 \text{ }^\circ\text{C}$.

Solution : $\mu = \rho \cdot \nu = (\rho_{\text{ref}} \cdot d) \cdot \nu = 1000 \cdot 0,886 \cdot (2,59 \cdot 10^{-5}) = 22,95 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Exercice 1.6 Un carburant (essence ou heptane : C_7H_{16}) de viscosité dynamique $\mu = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ est porté à une température $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Calculer sa viscosité cinématique ν exprimée en stockes sachant que sa densité est $d = 0,76$.

Solution : $\nu = \frac{\mu}{\rho_{\text{eau}} \cdot d} = \frac{0,6 \cdot 10^{-3}}{1000 \cdot 0,76} = 7,895 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 / \text{s} = 7,895 \cdot 10^{-3} \text{ St}$.

Exercice 1.7 Au début, une unité de viscosité dans le système CGS est le poise (abrégié P), (ou $\text{g}/\text{cm}\cdot\text{s}$), nommée après J. L. M. Poiseuille, un médecin français qui a réalisé des

expériences pionnières en 1840 sur le débit de l'eau dans les tuyaux. La viscosité de l'eau (douce ou salée) à 293,16 K (20 ° C) est d'environ 0,01 P. Exprimer cette valeur en SI.

Solution : $\nu = \frac{\mu}{\rho} = 0,01 \text{ g}/(\text{cm} \cdot \text{s}) \frac{1 \text{ kg}}{1000 \text{ g}} (100 \text{ cm}/\text{m}) / \rho = 0,001 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}) / \rho = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}.$

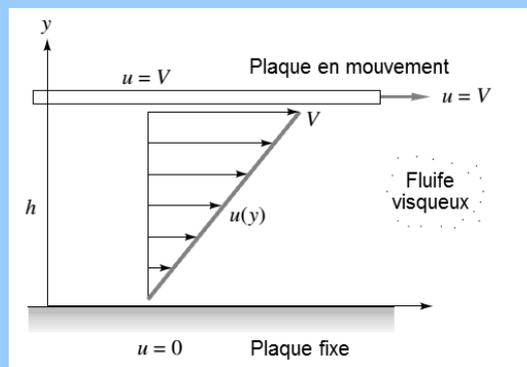
Exercice 1.8 Calculer le poids volumique (ϖ), la masse volumique (ρ) et la densité (d) d'un volume de 6 m³ d'huile de pétrole qui pèse 47 kN.

Solution : $\varpi = \frac{47 \cdot 10^3}{6} = 7830 \text{ N}/\text{m}^3,$

$$\rho = \frac{\varpi}{g} = \frac{7830}{9,81} = 798 \text{ kg}/\text{m}^3$$

et $d = \frac{\rho}{\rho_{\text{réf}}} = \frac{798}{1000} = 0,798 \approx 0,8.$

Exercice 1.9 Supposons que le fluide en cours de cisaillement dans la figure 1 est l'huile SAE 30 de viscosité $\mu = 0,29 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ à 20 °C. Calculer la contrainte de cisaillement dans l'huile si $V = 3 \text{ m}/\text{s}$ et $h = 2 \text{ cm}$.



Solution : La contrainte de cisaillement se trouve de l'équation suivante :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

de la figure et en dérivant l'équation :

$$u = V \frac{y}{h}$$

d'où :

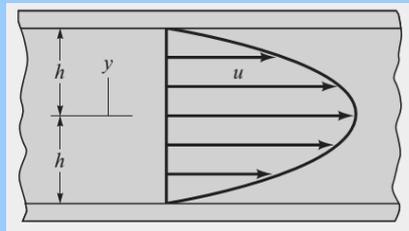
$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{V}{h}$$

Pour l'huile SAE 30, $\mu = 0,29 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$. Pour les valeurs données de V et h , on aura :

$$\tau = \mu \frac{V}{h} = 0,29 \frac{3}{0,02} = 43 \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s}^2) = 43 \text{ N}/\text{m}^2 = 43 \text{ Pa}$$

Bien que l'huile soit très visqueuse, ceci est une contrainte de cisaillement modéré, à environ 2400 fois inférieure à la pression atmosphérique. Les contraintes visqueuses des gaz et des liquides fins sont encore plus faibles.

Exercice 1.10 La vitesse de distribution de l'écoulement d'un fluide Newtonien entre deux larges plats parallèles (voir figure 2) est donnée par l'équation $u = 1,5V \left[1 - (1/h^2)y^2 \right]$ où V est la vitesse moyenne. Le fluide a une viscosité de 1,915 Pa·s et aussi, $V = 0,6096 \text{ m/s}$ et $h = 0,00508 \text{ m}$. Déterminer la contrainte de cisaillement agissant sur la paroi de fond.



Solution : Pour ce type d'écoulement parallèle la contrainte de cisaillement est obtenue à partir de cette équation :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Ainsi, si la répartition des vitesses est connue, la contrainte de cisaillement peut être déterminée pour tous les points de l'évaluation du gradient de vitesse du/dy . La distribution est donc donnée par :

$$\frac{du}{dy} = \frac{d}{dy} \left(1,5V \left[1 - (1/h^2)y^2 \right] \right) = -\frac{3V \cdot y}{h^2}$$

Le long de la paroi de fond $y = -h$ l'équation précédente devient :

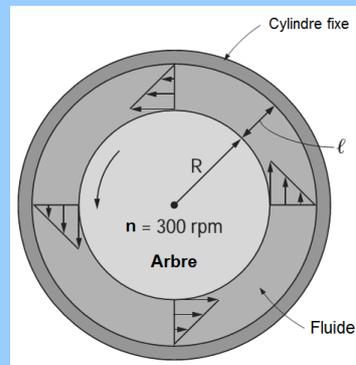
$$\left. \frac{du}{dy} \right|_h = \frac{3V}{h}$$

et donc la contrainte de cisaillement est :

$$\tau|_h = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_h = \mu \frac{3V}{h} = 1,915 \frac{3 \cdot 0,6096}{0,00508} = 689,4 \text{ N}/\text{m}^2 \text{ (dans la direction de l'écoulement).}$$

Cette contrainte crée un glissement sur la paroi. Etant donné que la distribution des vitesses est symétrique, la contrainte de cisaillement le long de la paroi supérieure aurait la même amplitude et direction.

Exercice 1.11 La viscosité d'un fluide doit être mesurée par un viscosimètre construit de deux cylindres concentriques de $L = 40$ cm de long (voir figure 3). Le diamètre extérieur du cylindre intérieur R est de 12 cm et l'écart entre les deux cylindres est de $l = 0,15$ cm. Le cylindre intérieur est mis en rotation à $n = 300$ t/min et le couple mesuré est $C = 1,8$ Nm. Déterminer la viscosité du fluide.



Solution : Le couple C et la vitesse de rotation ω du viscosimètre à double cylindre sont donnés. La viscosité du fluide μ est à déterminer.

Le cylindre intérieur est complètement immergé dans l'huile et les effets visqueux sur les deux extrémités du cylindre intérieur sont négligeables.

La détermination de la viscosité vient de :

Le couple de rotation : $C = F \cdot R$

La vitesse de rotation : $V = \omega \cdot R$

La surface du cylindre : $A = 2\pi R \cdot L$

La force de cisaillement : $F = \tau \cdot A$

La contrainte de cisaillement : $\tau = \mu \frac{du}{dy} \Rightarrow F = \tau \cdot A = \mu \frac{du}{dy} \cdot A$

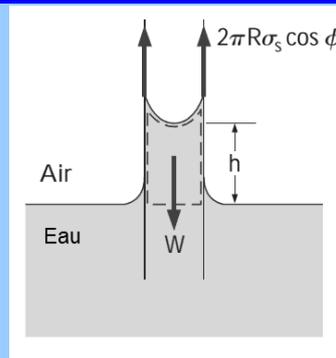
$$\Rightarrow F = \mu \frac{V}{L} \cdot A = \mu \frac{(\omega \cdot R)}{L} \cdot (2\pi R \cdot L)$$

Sachant que $\omega = \frac{2\pi n}{60} \Rightarrow C = F \cdot R = \mu \frac{2\pi n \cdot R}{60l} 2\pi R \cdot L \cdot R = \mu \frac{4\pi^2 R^3 n L}{l}$

d'où on peut tirer la viscosité du fluide :

$$\mu = \frac{C \cdot l}{4\pi^2 R^3 n L} = \frac{1,8 \text{ Nm} \cdot 0,0015 \text{ m}}{4 \cdot 3,14^2 \cdot (0,06 \text{ m})^3 \left(\frac{300}{60} \text{ s}^{-1}\right) 0,4 \text{ m}} = 0,158 \text{ Pa}\cdot\text{s}.$$

Exercice 1.12 Un tube en glace de diamètre 0,6 mm est inséré dans l'eau à 20°C dans une coupe. Déterminer l'augmentation capillaire de l'eau dans le tube (Figure 4).



Solution : La montée de l'eau dans un tube mince en raison de l'effet capillaire est à déterminer.

- 1) Il n'y a pas d'impuretés dans l'eau et pas de contamination sur les surfaces du tube de verre.
- 2) L'expérience est conduite dans l'air atmosphérique.

La tension superficielle de l'eau à 20 ° C est de 0,073 N/m. L'angle de contact de l'eau avec le verre est de 0 °. Nous prenons la densité de l'eau liquide à 1000 kg/m³. L'ascension capillaire est déterminée directement à partir de la théorie. En substituant les valeurs données, ce qui donne :

$$h = \frac{2\sigma_s}{\rho \cdot g \cdot R} \cos \phi = \frac{2(0,073 \text{ N/m})}{(1000 \text{ kg/m}^3)(9,81 \text{ m/s}^2)(0,03 \cdot 10^{-3} \text{ m})} \cos(0^\circ) \left(\frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{1 \text{ N}} \right) = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

Par conséquent, l'eau monte dans le tube de 5 cm au-dessus du niveau de liquide dans la coupelle.

Notez que si le diamètre du tube était de 1 cm, la remontée capillaire serait de 0,3 mm, ce qui est à peine perceptible à l'œil. En fait, la remontée capillaire dans un tube de grand diamètre se produit uniquement à la jante. Le centre ne se lève pas du tout. Par conséquent, l'effet capillaire peut être ignoré pour les tubes de grand diamètre.

2.1 Introduction

La statique des fluides est la science de l'équilibre des fluides au repos ou l'hydrostatique qui est consacrée à l'étude des liquides au repos. Les lois et théorèmes fondamentaux en statique des fluides sont le sujet de cette étude. Le concept de pression, le théorème de Pascal, le principe d'Archimède et la relation fondamentale de l'hydrostatique sont développés dans ce sujet.

Des applications pratiques comme la détermination de la distribution de la pression dans un réservoir, le calcul des presses hydrauliques, etc., sont basées sur les lois et théorèmes fondamentaux de la statique des fluides.

Lors de l'étude des structures, les concepteurs doivent calculer les forces exercées par les fluides. Les effets de la pression doivent être pris en considération pendant le dimensionnement des structures tels que les barrages, les réservoirs, les sous marins, etc. La pression de l'eau dans les profondeurs marine ou au fond d'un barrage est nettement supérieure qu'au voisinage de la surface. Pendant une plongée sous marine, la pression de l'eau augmente avec la profondeur comme la considérable pression qui s'exerce sur un sous-marin aux profondeurs de l'océan.

La définition de la pression et la pression en un point d'un fluide sont indispensables pour commencer cette étude. Ensuite, une présentation et analyse de la loi fondamentale de la statique des fluides est nécessaire. La surface de niveau et le théorème de Pascal sont également traités. Le calcul des forces de pression est effectué pour : les plaques planes horizontale, verticale et oblique, le centre de poussée, les instruments de mesure de la pression statique, la mesure de la pression atmosphérique, le baromètre et la loi de Torricelli. Finalement, est traitée la pression pour des fluides non miscibles superposés.

2.1.1 Définition de la pression

La pression est définie comme étant la force normale exercée par un fluide par unité de surface. On parle de pression quand on traite les gaz et les liquides seulement. L'équivalent de la pression dans les solides est la contrainte normale. Comme la pression est définie comme force par unité de surface, elle a l'unité en newtons par mètre carré (N/m^2), qui est nommée le Pascal (Pa), qui est :

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 \quad (2.1)$$

L'unité Pascal est très petite pour les pressions rencontrées en pratique. Cependant, ces multiples comme le kilopascal (1 kPa = 1000 Pa) et le megapascal (1 MPa = 10⁶ Pa) sont communément utilisés. Trois autres unités de pression sont habituellement utilisées en pratique, spécialement en Europe, le bar, le standard atmosphère et le kilogramme-force par centimètre carré :

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \quad 9,8 = 0,1 \text{ Mpa} = 100 \text{ kPa},$$

$$1 \text{ atm} = 101,325 \text{ kPa} = 1,01325 \text{ bars},$$

$$1 \text{ kgf/cm}^2 = 9,81 \text{ N/cm}^2 = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 9,81 \text{ bar} = 0,968 \text{ atm}.$$

Notons que les unités bar, atm et kgf/cm² de la pression sont souvent équivalentes à d'autres. Dans le système Anglais, l'unité de la pression est le pound-force par l'inch carré (lbf/in² ou psi) et 1 atm = 14,696 psi. Les unités kgf/cm² et lbf/in² de la pression sont alors notées en kg/cm² et lb/in² respectivement et sont communément utilisées dans les appareillages. Il peut être visible que 1 kgf/cm² = 14.223 psi.

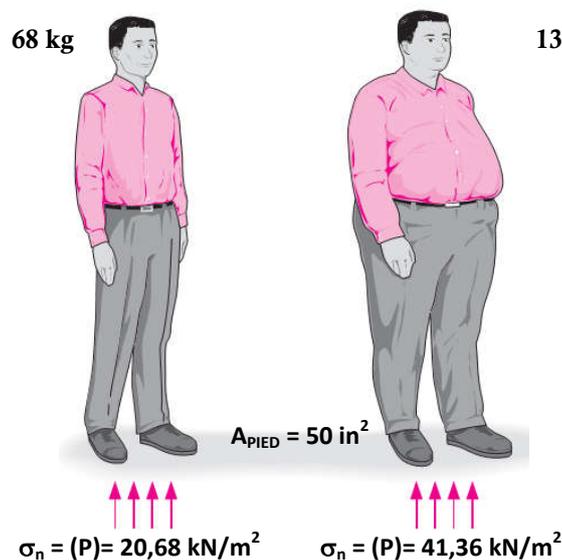


Figure 2.1 : La contrainte normale (ou «pression») sur le pied d'une personne obèse est plus grande que celle sur le pied d'une personne mince.

La pression est alors utilisée comme synonyme à la contrainte normale pour les solides, ce qui est la force agissant sur la surface par unité d'aire. Par exemple, une personne de 667 N (150-pound) avec l'aire d'une empreinte de pied totale de 32258 mm² (50 in²) exerce une pression de 667 N / 32258 x 10⁻⁶ m² = 20684,27 Pa = 20,68 kPa (≈ 3 psi) sur ses pieds (Fig.

1.1). Si la personne reste debout sur un pied, la pression double. Si elle gagne un excès de poids, elle rencontre probablement un déconfort du pied à cause de l'augmentation de la pression sur le pied (la taille du pied ne doit pas changer avec le gain en poids).

2.1.2 Pression en un point d'un fluide

La pression est la force de compression par unité de surface et elle donne l'impression d'être un vecteur. Cependant, la pression en n'importe quel point d'un fluide est la même dans toutes les directions. Ce qui est, elle a une intensité mais sans une direction spécifique et par conséquent elle est une quantité scalaire. Ceci peut être démontré en considérant un petit élément de fluide par unité de longueur en équilibre comme indiqué sur la figure 2.2.

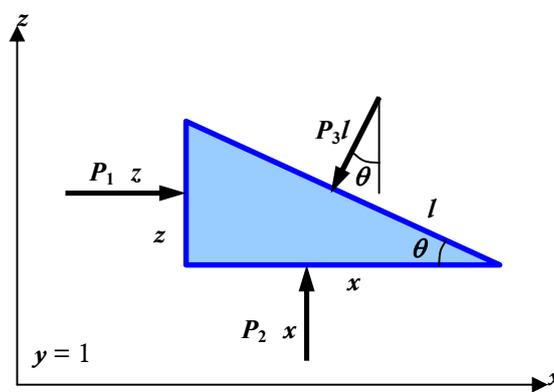


Figure 2.2 : Forces agissant sur un élément de fluide en équilibre.

Les pressions moyennes aux trois surfaces sont P_1 , P_2 et P_3 et la force agissant sur la surface est le produit de la pression moyenne et l'aire de la surface. De la seconde loi de Newton, l'équilibre des forces dans les directions x et z donnent :

$$\Sigma F_x = ma_x = 0 \Rightarrow P_1 \cdot \Delta z - P_3 \cdot l \cdot \sin(\theta) = 0 \quad (2.2)$$

$$\Sigma F_z = ma_z = 0 \Rightarrow P_2 \cdot \Delta x - P_3 \cdot l \cdot \cos(\theta) - \frac{1}{2} \rho \cdot g \cdot \Delta x \cdot \Delta z = 0 \quad (2.3)$$

Où ρ est la densité et $W = m \cdot g = \rho \cdot g \cdot \Delta x \cdot \Delta z / 2$ est le poids de l'élément du fluide. Notant que le bloc est un triangle réel, nous avons $\Delta x = l \cdot \cos(\theta)$ et $\Delta z = l \cdot \sin(\theta)$. La substitution de ces relations géométriques et divisant l'Equation 2.2 par Δz et l'Equation 2.3 par Δx donne :

$$P_1 - P_3 = 0 \quad (2.4)$$

$$P_2 - P_3 - \frac{1}{2} \rho \cdot g \cdot \Delta z = 0 \quad (2.5)$$

Le dernier terme dans la deuxième équation tend à s'annuler quand $\Delta z \rightarrow 0$ et l'élément devient infinitésimal et par conséquent l'élément se réduit à un point. En ce moment la combinaison des résultats de ces deux relations donne :

$$P_1 = P_2 = P_3 = P \quad (2.6)$$

En fonction de l'angle θ , nous pouvons répéter l'analyse pour un élément dans le plan xz et obtenir des résultats similaires. Où nous concluons que la pression en un point d'un fluide a la même intensité dans toutes les directions.

2.2 Loi fondamentale de statique des fluides

Considérons un volume de fluide, de masse volumique ρ , dans l'espace à trois dimensions et dans lequel nous isolons un domaine parallélépipédique dV de dimensions dx , dy et dz . Les forces exercées sur ce domaine par le fluide environnant sont reportées sur la Figure 3, on distingue :

- le poids (\vec{g} est l'accélération de la pesanteur) :

$$\vec{P} = \delta m \cdot \vec{g} = -\rho \cdot \delta V \cdot g \cdot \vec{z} = -\rho \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot g \cdot \vec{z} \quad (2.7)$$

- les forces de pression exercées sur les surfaces du parallélépipède. On suppose ici que le volume est de dimensions infiniment petites pour que l'on puisse considérer que la pression p exercée sur chaque surface élémentaire est uniforme. En appliquant la définition de la force de pression, la résultante des actions de pression suivant x est :

$$R_x = F_x - F_{x+\delta x} = p(x, y, z) \cdot \delta y \cdot \delta z - p(x + \delta x, y, z) \cdot \delta y \cdot \delta z \quad (2.8)$$

Comme dx est infiniment petit, on peut effectuer un développement limité au premier ordre de (dx) , sous la forme :

$$p(x + \delta x, y, z) = p(x, y, z) + \delta x \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} + \dots \quad (2.9)$$

On trouve alors :

$$R_x = -\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \quad (2.10)$$

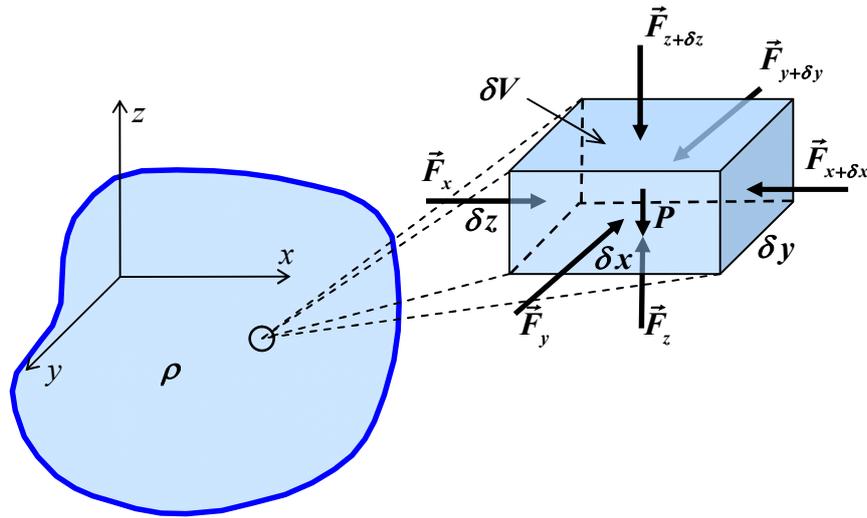


Figure 2.3 : Isolement d'un élément parallélépipédique de dimensions infiniment petites dx , dy , dz d'un domaine fluide au repos.

En effectuant le même raisonnement suivant y et z on trouve :

$$R_y = -\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial y} \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \quad (2.11)$$

et

$$R_z = -\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \quad (2.12)$$

Le volume de fluide étant à l'équilibre, les forces de pressions équilibrent le poids. On en déduit alors à partir des relations (3), (6), (7) et (8) que :

$$\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial y} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} = -\rho \cdot g \quad (2.15)$$

Soit encore de manière plus synthétique :

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \quad (2.16)$$

La dernière relation est appelée relation de l'hydrostatique. Elle démontre, qu'à masse, volumique et accélération de la pesanteur constantes, plus grande est la profondeur dans le fluide et plus grande est la pression.

2.3. Surface de niveau

Une surface de niveau se caractérise par une même pression en chacun de ses points. C'est la surface libre d'un liquide qui ; en chacun des ses points, elle est perpendiculaire à la pesanteur.

La surface des océans (environ 70 % de la surface terrestre totale) est généralement considérée comme surface de niveau, c'est-à-dire d'une surface équipotentielle du champ de pesanteur. En effet, la surface des océans et des mers est contrôlée essentiellement par la force de pesanteur, avec quelques phénomènes perturbateurs tels les courants marins, les variations de salinité, les marées, la houle causée par les vents, les variations de la pression atmosphérique, etc.

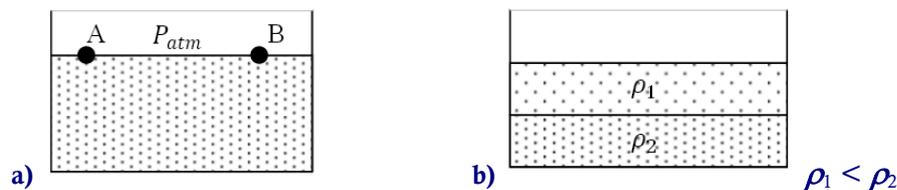


Figure 2.3 : Surface de niveau : a) Surface libre b) Fluides non miscibles

2.4 Théorème de Pascal

Soit un élément de volume cylindrique d'un fluide incompressible (liquide homogène) de poids volumique ϖ , de longueur l et de section droite dS d'axe (G, \vec{u}) faisant un angle α avec l'axe vertical $(\mathbf{0}, \vec{z})$ dans un repère $\mathfrak{R}(0, x, y, z)$ comme le montre la figure.

Soient les points G_1 d'altitude z_1 et G_2 d'altitude z_2 , les centres de surface des sections droites extrêmes. L'équilibre du cylindre élémentaire est soumis aux :

— **actions à distance** : de son poids :

$$\overline{dP} = -\varpi \cdot l \cdot dS \cdot \vec{z} \quad (2.17)$$

— **actions de contact** : forces de pression s'exerçant sur la surface latérale, notons \overline{dF}_i , l'une d'elles ; forces de pression s'exerçant sur les deux surfaces planes extrêmes. Soient p_1 et p_2 les pressions du fluide respectivement en G_1 et en G_2 :

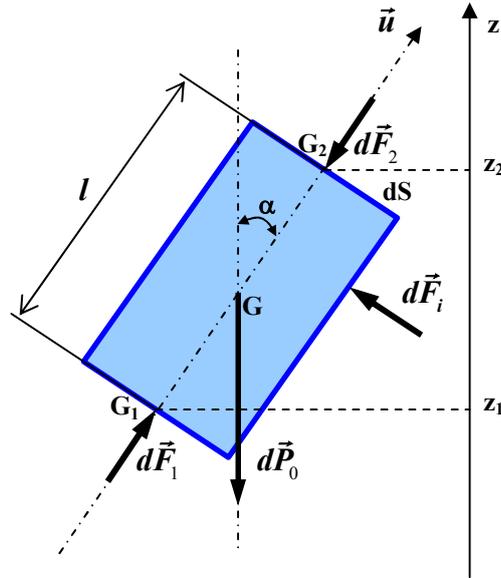


Figure 2.4 : élément de volume cylindrique d'un fluide incompressible

$$\overline{dF}_1 = -p_1 \cdot dS \cdot (-\vec{u}) = p_1 \cdot dS \cdot \vec{u} \quad (2.18)$$

$$\overline{dF}_2 = -p_2 \cdot dS \cdot \vec{u} \quad (2.19)$$

Le cylindre élémentaire étant en équilibre dans le fluide, la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle :

$$\overline{dP} + \sum \overline{dF}_i + \overline{dF}_1 + \overline{dF}_2 = \vec{0} \quad (2.20)$$

En projection sur l'axe de symétrie (G, \vec{u}) du cylindre :

$$-\varpi \cdot l \cdot dS \cdot \cos(\alpha) + p_1 \cdot dS - p_2 \cdot dS = 0 \quad (2.21)$$

sachant que $\cos(\alpha) = z_2 - z_1$ et divisant par dS ce qui permet d'exprimer en différence de pression $p_1 - p_2$, ainsi :

$$p_1 - p_2 = \varpi(z_2 - z_1) \quad (2.22)$$

Qu'on peut exprimer d'une autre forme appropriée ainsi :

$$\frac{p_1}{\varpi} + z_1 = \frac{p_2}{\varpi} + z_2 \quad (2.23)$$

Le choix arbitraire de G_1 et G_2 à l'intérieur d'un fluide de poids volumique ϖ , permet d'écrire l'équation (7) en un point quelconque d'altitude z , où règne la pression p sous la forme :

$$\frac{p}{\varpi} + z = \text{Const} \quad (2.24)$$

Supposons qu'au point G_2 , intervienne une variation de pression telle que celle-ci devienne $(p_2 + \Delta p_2)$, Δp_2 étant un nombre algébrique. Calculons la variation de pression Δp_1 qui en résulte en G_1 . Appliquons l'équation (6) (relation fondamentale de l'hydrostatique) entre G_1 et G_2 pour le fluide avec :

- à l'état initial :

$$P_1 - P_2 = \varpi \cdot (z_2 - z_1) \quad (2.25)$$

- à l'état final :

$$(P_1 + \Delta P_1) - (P_2 + \Delta P_2) = \varpi \cdot (z_2 - z_1) \quad (2.26)$$

En faisant la différence entre les équations (9) et (10) on obtient : $\Delta P_1 - \Delta P_2 = 0$, d'où :

$$P_1 = P_2 \quad (2.27)$$

Enoncé du Théorème de Pascal

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point d'un liquide entraîne la même variation de pression en tout point. (Ce théorème est valable pour les gaz).

Explication

De ce point de vue les fluides incompressibles sont donc des transmetteurs de variation de pression.

Application

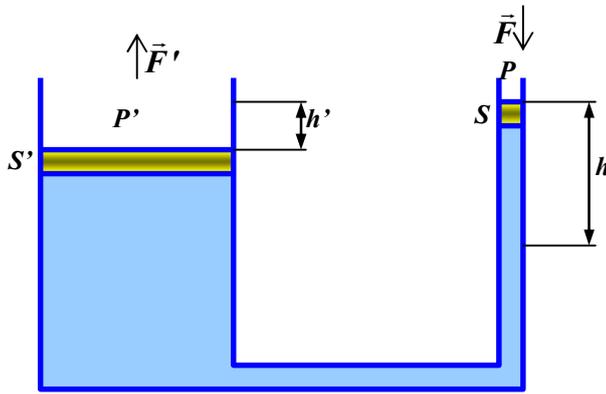
Ce théorème est utile pour l'étude et la conception des presses hydrauliques et plus généralement dans le cadre de la transmission hydraulique.

Soient par exemple, deux cylindres de sections différentes S et S' formant des vases communicants :

Exerçons sur le petit piston P une force F perpendiculaire à sa surface, cela crée une surpression qui vaut : $Dp = F/S$. En vertu du théorème de Pascal, sur P' on a donc la même variation de pression ce qui produit une force F' , et on peut donc écrire : $Dp = F/S = F'/S'$.

On voit donc que si $S' > S$ on a $F' > F$ mais le déplacement de P' est plus petit que celui de P : si on enfonce P de h , P' ne monte que de h' :

Il y a conservation du travail (ou de l'énergie) : $F \cdot h = F' \cdot h'$.



Blaise Pascal : 1623- 1662

Figure 2.5 : Principe du théorème de Pascal

2.5 Calcul des forces de pression

2.5.1 Plaque plane (horizontale, verticale, oblique)

1. Forces de pression sur une plaque plane horizontale

Considérons un réservoir ouvert à l'air libre de sa surface supérieure, de surface de base S_H contenant une hauteur h de liquide de masse volumique ρ .

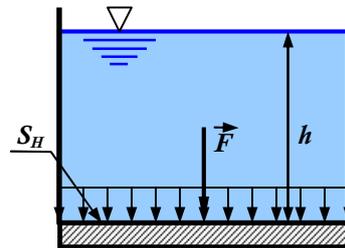


Figure 2.6 : Forces de pression sur une plaque plane horizontale

Sur une surface horizontale, la pression est uniforme sur toute la surface $P = \rho gh$, alors :

$$F = \int P dS = \int (\rho gh) dS = \rho gh \int dS \quad (2.28)$$

d'où :

$$F = \rho gh S_H \quad (2.29)$$

2. Forces de pression sur une plaque plane verticale

La force de pression en un point B quelconque de la surface verticale S_V d'épaisseur e est :

$$F = \int dF \quad (2.30)$$

où

$$dF = \rho g z_B dS_V \quad (2.31)$$

alors;

$$F = \int_0^h \rho g z_B e dz = \rho g e \int_0^h z dz = \rho g e \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^h = \rho g e \frac{h^2}{2} \quad (2.30)$$

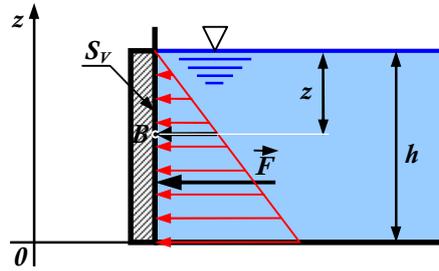


Figure 2.7 : Forces de pression sur une plaque plane verticale

3. Forces de pression sur une plaque plane oblique

Une plaque plane de forme quelconque totalement immergée dans un liquide de masse volumique ρ est représentée sur la figure 2.8.

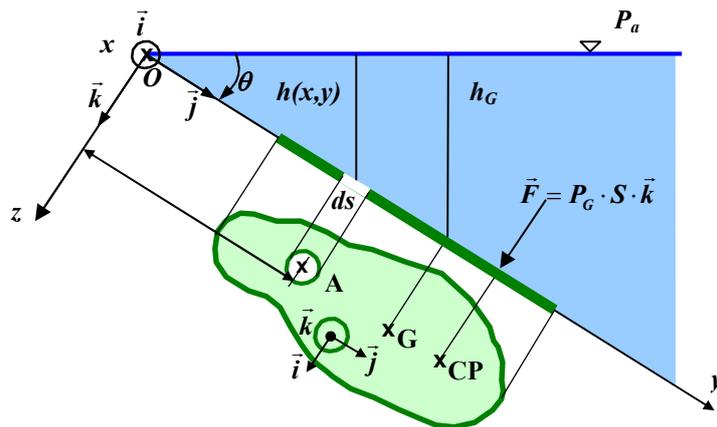


Figure 2.8 : Plaque plane totalement immergée

La plaque est inclinée de manière arbitraire d'un angle θ de sorte que la pression qu'elle subit varie. Si on considère une surface élémentaire ds quelconque située à une profondeur h de la surface du liquide sur cette plaque, la pression qu'elle subit est $P = P_a + \rho gh$, par conséquent une force dF est telle que :

$$d\vec{F} = dF\vec{k} = (P_a + \rho gh) dS\vec{k} \quad (2.30)$$

$$d\vec{F} = (P_a + \rho g(y \sin \theta)) dS\vec{k} \quad (2.31)$$

La force de pression totale s'exerçant sur cette plaque a pour expression :

$$\vec{F} = (P_a S + \rho g \sin(\theta) \iint y dS) \vec{k} \quad (2.32)$$

Le centre de gravité G de la plaque est par définition, situé dans le plan xOy et défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\iint \overrightarrow{OA} dS}{S} \quad (2.33)$$

avec pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\iint x dS}{S} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\iint y dS}{S} \quad (2.34)$$

On peut donc écrire :

$$\vec{F} = (P_a S + \rho g y_G \sin(\theta) S) \vec{k} \quad (2.35)$$

d'où :

$$\vec{F} = (P_a + \rho g h_G) S \vec{k} = P_G S \vec{k} \quad (2.36)$$

L'intensité de la force exercée par le liquide sur la paroi plane est égale au produit de l'aire de la paroi par la pression effective qui règne au centre de gravité.

2.5.2 Centre de poussée

La force F ne s'exerce pas au centre de gravité G mais à un point appelé centre de poussée (CP). Les coordonnées du centre de poussée CP sont telles que l'intégration sur la surface totale de la plaque du moment de la force élémentaire $P dS$ autour d'un point tel que le point O doit être égal au moment de la force de pression résultante F autour de ce même point, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{OC} \wedge \vec{F} = \iint_S \overrightarrow{OA} \wedge d\vec{F} \quad (2.37)$$

$$\iint_S \overrightarrow{OA} \wedge d\vec{F} = \iint y \cdot dF \cdot \vec{i} - \iint x \cdot dF \cdot \vec{j} \quad (2.38)$$

$$\overrightarrow{OC} \wedge \vec{F} = y_{CP} F \vec{i} - x_{CP} F \vec{j} \quad (2.39)$$

$$\overrightarrow{OC} \wedge \vec{F} = y_c F \vec{i} - x_c F \vec{j}$$

Par rapport à l'axe (Ox) on a :

$$y_{CP} F = \iint y F dS = \iint y (P_a + \rho g y \sin(\theta)) dS \quad (2.40)$$

$$y_{CP} F = P_a \iint y dS + \rho g \sin(\theta) \iint y^2 dS \quad (2.41)$$

avec :

$$I_{Ox} = \iint y^2 dS \quad (2.42)$$

$$y_{CP} P_G S = P_a y_G S + \rho g \sin(\theta) I_{Ox} \quad (2.43)$$

I_{Ox} est le moment d'inertie ou moment quadratique de la surface par rapport à l'axe de référence (Ox).

$$y_{CP} = \frac{P_a}{P_G} y_G + \frac{\rho g \sin(\theta) I_{Ox}}{P_G S} \quad (2.44)$$

Il est souvent plus facile dans la majorité des cas de connaître le moment d'inertie par rapport à un point comme le point G , c'est à dire le moment d'inertie polaire. En appliquant le théorème de Huygens on a :

$$I_{(Ox)} = I_{Gx} + S y_G^2 \quad (2.45)$$

On peut écrire y_{CP} ainsi :

$$y_{CP} = y_G + \frac{\rho g \sin(\theta) I_{Gx}}{P_G S} \quad (2.46)$$

De la même manière, par rapport à l'axe (Oy) on aura :

$$x_{CP} P_G S = P_a \iint x dS + \rho g \sin(\theta) \iint xy dS \quad (2.47)$$

$$x_{CP} = \frac{P_a}{P_G S} x_G + \frac{\rho g \sin(\theta) I_{xy}}{P_G S} \quad (2.48)$$

avec :

$$I_{xy} = \iint xy dS \quad (2.49)$$

I_{xy} est le produit d'inertie de la surface par rapport aux axes de références (Ox) et (Oy).

Ce produit d'inertie est nul si l'un des axes est l'axe de symétrie de la surface.

Dans la plupart des cas d'étude, la pression atmosphérique P_a agit des deux côtés de la plaque. La pression au centre de gravité de la plaque devient alors $P_G = \rho g h_G$ et celle au point A, $P = \rho g h$ de sorte que les relations :

$$x_{CP} = \frac{I_{xy} \sin(\alpha)}{h_G S} \quad \text{et} \quad y_{CP} = y_G + \frac{I_{Gx} \sin(\alpha)}{h_G S} \quad (2.50)$$

La force F exercée par un liquide sur une surface plane A est égale au produit du poids spécifique ϖ du liquide, par la profondeur h_G du centre de gravité de la surface et par la surface. L'équation est : $F = \varpi h_G A = \rho g h_G A$ d'unités $[N] = [N/m^3] \cdot m \cdot m^2$.

Le produit du poids spécifique par la profondeur du centre de gravité de la surface équivaut à l'intensité de la pression au centre de gravité de cette surface.

La ligne d'action de la force passe par le centre de poussée qui peut être repérée en appliquant la formule suivante :

$$y_{CP} = \frac{I_G}{y_G A} + y_G \quad (2.51)$$

I_G est le moment d'inertie de la surface par rapport à l'axe passant par le centre de gravité (voir Fig. 2.9). Les coordonnées sont mesurées le long du plan à partir d'un axe situé à l'intersection du plan et de la surface du liquide, tous les deux prolongés nécessairement.

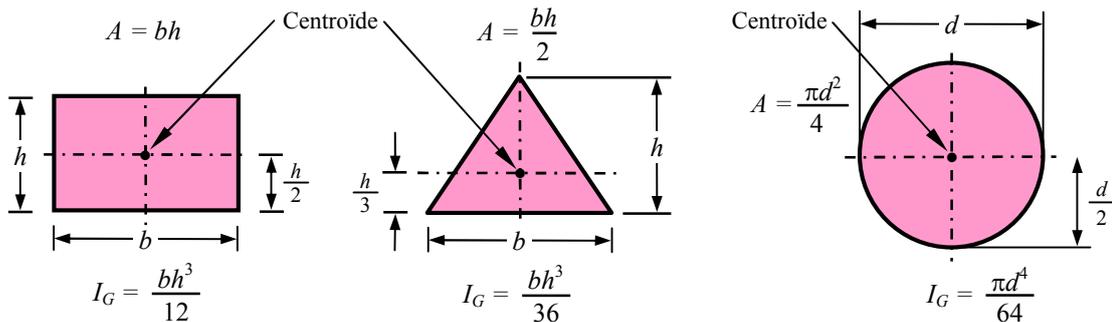


Figure 2.9 : Calcul du moment d'inertie de différentes géométries

2.5.3 Instruments de mesure de la pression statique

Il existe différents types d'instruments pour la mesure de la pression. On présente quelques uns d'entre eux : le baromètre, le piézomètre, le manomètre et le capteur. Ces appareils sont utilisés pour les essais expérimentaux afin de tester les équipements et surveiller des processus.

2.5.4 Mesure de la pression atmosphérique

1. Le baromètre : L'instrument qui est utilisé pour mesurer la pression atmosphérique est appelé un baromètre. Les types les plus communs sont le baromètre à mercure et le baromètre anéroïde. Un baromètre à mercure est réalisé en retournant un tube rempli de mercure dans un récipient de mercure comme le montre la figure 2.8. La pression au sommet du baromètre à mercure sera la pression de vapeur de mercure, qui est très faible: à 20 ° C. Ainsi, la pression atmosphérique va pousser le mercure dans le tube à une hauteur h . Le baromètre à mercure est analysé en appliquant l'équation hydrostatique. Ainsi, en mesurant h , la pression atmosphérique locale peut être déterminée en utilisant l'équation de Bernoulli.

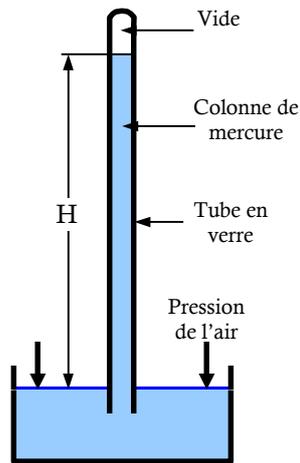


Figure 2.10 : Manomètre à mercure.

Un baromètre anéroïde fonctionne mécaniquement. Un anéroïde est un soufflet élastique qui a été hermétiquement fermés après avoir vidé de l'air. Lorsque la pression atmosphérique change elle pousse l'anéroïde à changer de taille et ce changement mécanique peut être utilisé pour dévier une aiguille pour indiquer la pression atmosphérique locale sur une échelle. Le baromètre anéroïde a certains avantages par rapport au baromètre à mercure, car il est plus petit et permet l'enregistrement de données dans le temps.

Coupe d'un baromètre anéroïde. Constitué d'une boîte métallique dans laquelle a été fait un vide partiel, ce baromètre ne contient pas de liquide. Lorsque la pression atmosphérique varie, le couvercle fin et cannelé de la boîte subit une déformation qui est transmise au moyen de leviers à une aiguille mobile sur un écran gradué.

Comme leur nom l'indique, les baromètre anéroïdes ne comportent pas de fluide et sont constitués de capsules étanches aux parois flexibles, dans lesquelles on a fait le vide. Ces capsules sont reliées par un système de leviers à une aiguille se déplaçant devant un cadran gradué en valeurs de pression.

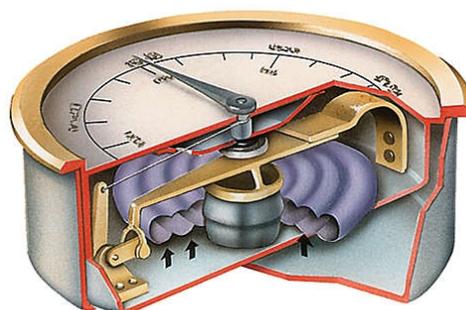


Figure 2.11 : Baromètre anéroïde

2.5.5 Baromètre de Torricelli

Le tube de Bourdon est brasé, soudé ou vissé avec le support de tube qui forme généralement une pièce complète avec le raccord. Par l'intermédiaire d'un trou dans le raccord, le fluide à mesurer passe à l'intérieur du tube. La partie mobile finale du tube se déplace lors de changement de pression (effet Bourdon). Ce déplacement qui est proportionnel à la pression à mesurer, est transmis par l'intermédiaire du mouvement à l'aiguille et affiché sur le cadran en tant que valeur de pression. Le système de mesure, le cadran et l'aiguille sont montés dans un boîtier.

Les manomètres à tube de Bourdon sont utilisés pour la mesure de pressions positives ou négatives de fluides gazeux ou liquides, à condition que ceux-ci ne soient ni hautement visqueux ni cristallisant. Les étendues de mesure s'étalent sur toutes les plages selon DIN de 0... 0,6 bar à 0... 4000 bars. La forme du tube dépend de l'étendue de mesure. Pour les étendues jusqu'à 0... 40 bars inclus on utilise normalement la forme en arc et à partir de 0... 60 bars la forme hélicoïdale. Les appareils sont fabriqués avec le raccordement vertical ou arrière. Il est conseillé de ne les utiliser qu'entre le premier quart et le dernier quart de l'échelle à cause de l'hystérésis. Il convient également de les protéger contre les risques de surpression ou de dépassement d'échelle. Le tube de Bourdon ne permet pas de mesurer les phénomènes rapides et évolutifs de pression. L'incertitude de mesure varie de 0,02 à 0,2 % pour le domaine de mesure de 0 à $3 \cdot 10^8$ Pa.

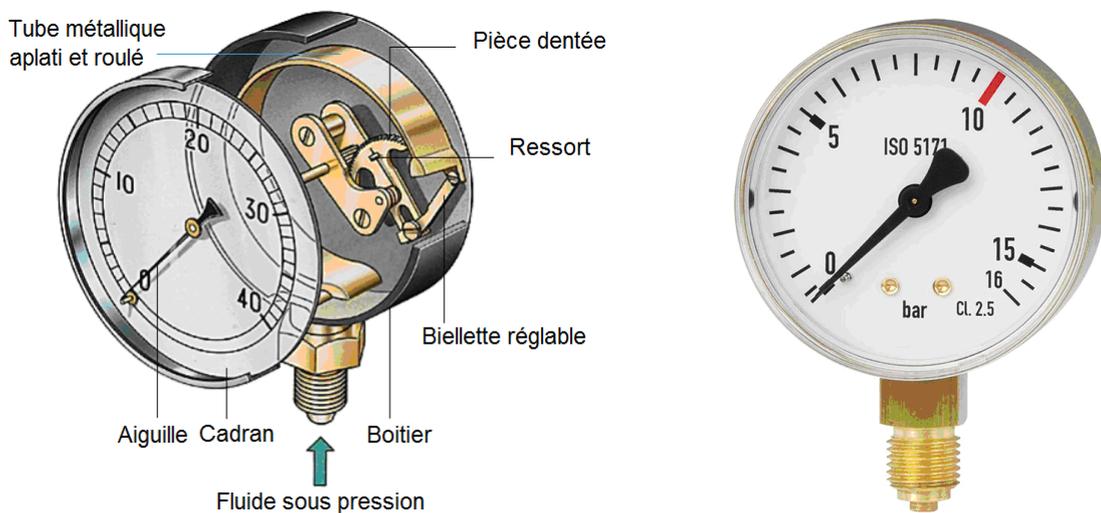


Figure 2.12 : Manomètre de Bourdon à tube.

2.6 Applications

Exercice 2.1 Calculer la pression en Pascal à une profondeur de 8 m en dessous de la surface libre d'une masse d'eau et trouver la pression absolue quand le baromètre affiche 760 mm de mercure (densité 13,57).

Solution : 1) $p = \varpi \cdot h$ et $\varpi = \rho \cdot g \Rightarrow p = \rho \cdot g \cdot h = 1000 \cdot 9,81 \cdot 8 = 78400 \text{ Pa}$

2) Pression absolue = pression atmosphérique + pression due à 8 m de profondeur. La pression atmosphérique = $\varpi_m \cdot h_m = 13,57 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,76 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, la Pression absolue = $1,01 \cdot 10^5 + 78400 = 1,794 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Exercice 2.2 Déterminer la pression en bar à une profondeur de 11 m d'huile de pétrole de densité 0,75 et déterminer également la pression pour une profondeur de 20 m.

Solution : $p = \varpi_p \cdot h = \rho_p \cdot g \cdot h = d \cdot \rho_e \cdot g \cdot h = 11 \cdot 0,75 \cdot 10^3 \cdot 9,81 = 80850 \text{ Pa}$

1) $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \Rightarrow$ donc : $p = 0,8085 \text{ bar}$.

2) Pour une profondeur de 20 m :

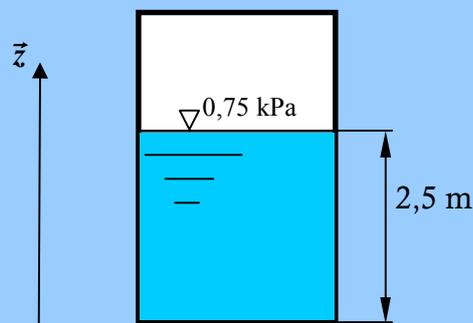
$p = \varpi_p \cdot h = \rho_p \cdot g \cdot h = d \cdot \rho_e \cdot g \cdot h = 0,75 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 20 = 147000 \text{ Pa} = 1,47 \text{ bar}$.

Exercice 2.3 Quelle profondeur d'huile de pétrole de densité 0,75 produit la pression de 1,75 bar ? Quelle profondeur d'eau produit la même pression ?

Solution : 1) $p = \varpi_p \cdot h = \rho_p \cdot g \cdot h \Rightarrow h = p / \rho_p \cdot g = p / d \cdot \rho_e \cdot g = 1,75 \cdot 10^5 / (0,75 \cdot 1000 \cdot 9,8) = 23,81 \text{ m}$

2) $p = \varpi_e \cdot h = \rho_e \cdot g \cdot h \Rightarrow h = p / \rho_e \cdot g = 1,75 \cdot 10^5 / (1000 \cdot 9,8) = 17,86 \text{ m}$.

Exercice 2.4 Trouver la pression au fond d'un réservoir contenant de la glycérine de densité 1,262. Quelle hauteur d'eau est équivalente à la pression du fond du réservoir.



Solution : $p_g = \varpi_g \cdot h = \rho_g \cdot g \cdot h = d_g \cdot \rho_e \cdot g \cdot h \Rightarrow$

$$p_f = p + d_g \cdot \rho_e \cdot g \cdot h = 0,75 \cdot 10^3 + 1,262 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,5 = 1,06 \text{ bar}.$$

$$p_f = \varpi_e \cdot h = \rho_e \cdot g \cdot h \Rightarrow$$

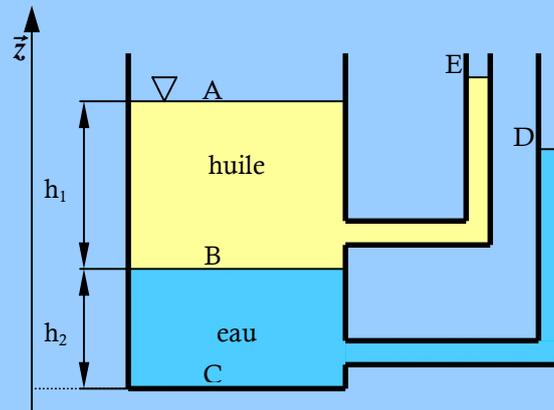
$$h = p_f / (\rho_e \cdot g) = 1,06 \cdot 10^5 / (1000 \cdot 9,81) = 10,81 \text{ m}.$$

Exercice 2.5 La figure ci-dessous représente un réservoir ouvert, équipé de deux tubes piézométriques et rempli avec deux liquides non miscibles :

- de l'huile de masse volumique $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$ sur une hauteur $h_1 = 6 \text{ m}$,
- de l'eau de masse volumique $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ sur une hauteur $h_2 = 5 \text{ m}$.

En déduire la pression p_B (en bar) au point B.

- 1) En déduire le niveau de l'huile Z_E dans le tube piézométrique.
- 2) En déduire la pression p_C (en bar) au point C.
- 3) En déduire le niveau de l'eau Z_D dans le tube piézométrique.



Solution : 1) En appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique (RFH) entre B et A

on a : $p_B - p_A = \rho_h \cdot g \cdot (z_A - z_B)$, en sachant que $p_A = p_{\text{atm}}$ et $z_A - z_B = h_1 \Rightarrow$
 $p_B = p_{\text{atm}} + \rho_h \cdot g \cdot h_1 = 1,013 \cdot 10^5 + 850 \cdot 9,81 \cdot 6,0 = 149980 \text{ Pa} \approx 1,5 \text{ bar}$.

2) RFH entre A et E : $p_E - p_A = \rho_h \cdot g \cdot (z_A - z_E)$.

$p_E - p_A = \rho_h \cdot g \cdot (z_A - z_E)$; $p_A = p_E = p_{\text{atm}} \Rightarrow z_E = z_A = h_1 + h_2 = 6,0 + 5,0 = 11,00 \text{ m}$

3) RFH entre C et B : $p_C - p_B = \rho_e \cdot g \cdot (z_B - z_C)$; or $z_B - z_C = h_2$

donc : $p_C = p_B + \rho_e \cdot g \cdot h_2$; $p_C = 150000 + 1000 \cdot 9,81 \cdot 5,0 = 198980 \approx 2,00 \text{ bar}$

4) RFH entre C et D : $p_C - p_D = \rho_e \cdot g \cdot (z_D - z_C)$; or $p_D = p_{\text{atm}}$ et $z_C = 0,0$

donc : $z_D = (p_C - p_D) / (\rho_e \cdot g) \Rightarrow z_D = (200000 - 100000) / (1000 \cdot 9,81) = 10,10 \text{ m}$.

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fluides en mouvement. Contrairement aux solides, les éléments d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes. L'écoulement des fluides est un phénomène complexe.

On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier :

- l'équation de continuité (conservation de la masse),
- le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie) et,
- le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) à partir duquel on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement (exemple les jets d'eau).

3.2. Ecoulement permanent

L'écoulement d'un fluide est dit permanent si le champ des vecteurs « vitesses » des particules fluides est constant dans le temps. Notons cependant que cela ne veut pas dire que le champ des vecteurs « vitesse » est uniforme dans l'espace. L'écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible est le seul que nous aurons à considérer dans ce cours. Un écoulement non permanent conduirait à considérer les effets d'inertie des masses fluides.

3.3. Equation de continuité

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent.

On désigne par : S_1 et S_2 respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t , S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant $t'=(t+dt)$, \vec{V}_1 et \vec{V}_2 les vecteurs vitesse d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine, dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2

pendant l'intervalle de temps dt , dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1 , dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2 , M : masse comprise entre S_2 et S_2 , dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1 , dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2 .

A l'instant t : le fluide compris entre S_2 et S'_2 a une masse égale à (dm_1+M) . A l'instant $t+dt$: le fluide compris entre S'_1 et S'_2 , a une masse égale à $(M+dm_2)$.

Par conservation de la masse : $dm_1+M=M+dm_2$, en simplifiant par M on aura $dm_1=dm_2$ donc $\rho \cdot dV_1=\rho \cdot dV_2$ ou encore $\rho \cdot S_1 \cdot dx_1=\rho \cdot S_2 \cdot dx_2$.

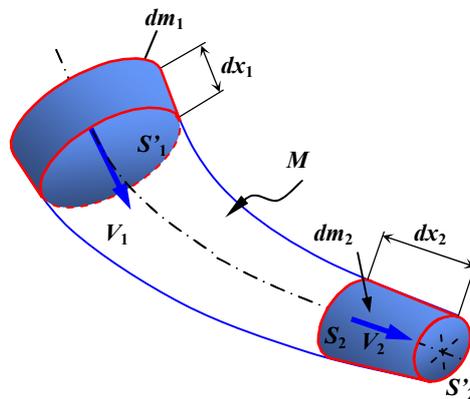


Figure 3.1 : Représentation d'une veine de fluide en écoulement

En divisant par dt on abouti à :

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 \cdot S_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} \Leftrightarrow \rho_1 \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot V_2 \quad (3.1)$$

Puisque le fluide est incompressible : $\rho_1=\rho_2=\rho$ on peut simplifier et aboutir à l'équation de continuité suivante :

$$S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2 \quad (3.2)$$

3.4 Débit masse et débit volume

3.4.1 Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport dm/dt quand dt tend vers 0.

$$q_m = \frac{dm}{dt} \quad (3.3)$$

où q_m est la masse de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite ; dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt qui intervalle de temps exprimé en (s).

En tenant compte des équations précédentes on obtient :

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \rho \cdot S_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho \cdot S_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} \quad (3.4)$$

avec :

$dx_1/dt = V_1 = \|\vec{V}_1\|$: Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S_1 , $dx_2/dt = V_2 = \|\vec{V}_2\|$: Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S_2 .

D'après l'équation (2) :

$$q_m = \rho \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho \cdot S_2 \cdot V_2 \quad (3.5)$$

Soit dans une section droite quelconque S de la veine fluide à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne V :

$$q_m = \rho \cdot S \cdot V \quad (3.6)$$

où q_m débit massique en (kg/s) ; ρ masse volumique en kg/m^3 ; S section de la veine fluide en (m^2) ; V vitesse moyenne du fluide à travers (S) en (m/s).

3.4.2 Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport dV/dt quand dt tend vers zero.

$$q_v = \frac{dV}{dt} \quad (3.7)$$

Où q_v volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite ; dV volume élémentaire, en m^3 , ayant traversé une surface S pendant un intervalle de temps dt , dt intervalle de temps en secondes (s).

D'après la relation (3) et en notant que $dV=dm/\rho$ on peut écrire également que $q_v=q_m/\rho$ soit :

$$q_v = S \cdot V \quad (3.8)$$

3.4.3 Relation entre débit massique et débit volumique

A partir des relations précédentes on peut déduire facilement la relation entre le débit massique et le débit volumique :

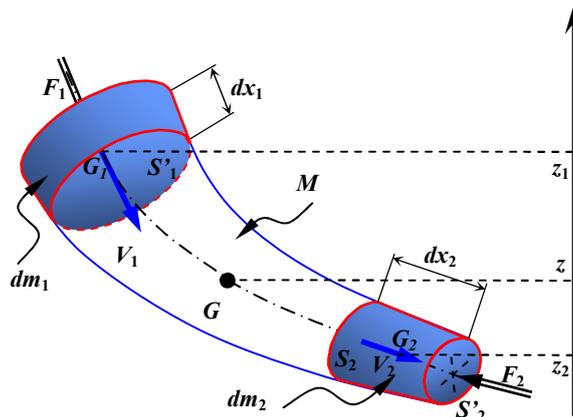
$$q_m = \rho \cdot q_v \quad (3.9)$$

3.5 Théorème de Bernoulli

3.5.1 Cas sans échange de travail

Reprenons le schéma de la veine fluide de la figure 3.1 avec les mêmes notations et les hypothèses suivantes :

- le fluide est parfait et incompressible,
- l'écoulement est permanent,
- l'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse.



Daniel Bernoulli : 1700-1782

Figure 3.2 : Application du théorème de Bernoulli entre les sections d'une veine de fluide en écoulement

Considérons un axe \vec{z} vertical dirigé vers le haut, notons z_1 , z_2 et z_3 respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm_1 , dm_2 et M et désignons F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 . A l'instant t le fluide de masse (dm_1+M) est compris entre S_1 et S_2 . Son énergie mécanique est :

$$E_{méc} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1 \cdot g \cdot z_1 + M \cdot g \cdot z) + \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{1}{2} V^2 \cdot dm \quad (3.10)$$

A l'instant $t'=(t+dt)$ le fluide de masse $(M+dm_2)$ est compris entre S'_1 et S'_2 . Son énergie mécanique est :

$$E'_{méc} = E'_{pot} + E'_{cin} = (M \cdot g \cdot z + dm_2 \cdot g \cdot z_2) + \int_{S_1}^{S_2} \frac{1}{2} V^2 \cdot dm + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2 \quad (3.11)$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : "La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures."

$$E'_{méc} - E_{méc} = W_{force\ de\ pression} = F_1 \cdot dx_1 - F_2 \cdot dx_2 \quad (3.12)$$

\Leftrightarrow

$$E'_{méc} - E_{méc} = P_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 = P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2 \quad (3.13)$$

en simplifiant on obtient :

$$dm_2 \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2 - dm_1 \cdot g \cdot z_1 - \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1} \cdot dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2} \cdot dm_2 \quad (3.14)$$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

On aboutie à l'équation de Bernoulli :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g \cdot (z_2 - z_1) = 0 \quad (3.15)$$

L'unité de chaque terme de la relation (3.15) est le joule par kilogramme (J/kg) qui peut s'écrire ainsi :

$$\frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + g \cdot z_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + g \cdot z_1 \quad (3.16)$$

3.5.2 Cas avec échange de travail

Reprenons le schéma de la veine fluide avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses. On suppose en plus qu'une machine hydraulique est placée entre les sections S_1 et S_2 . Cette machine est caractérisée par une puissance nette P_{net} échangée avec le fluide, une puissance sur l'arbre P_a et un certain rendement η . Cette machine peut être soit une turbine soit une pompe.

- Dans le cas d'une pompe : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = \frac{P_{net}}{P_a} \quad (3.17)$$

- Dans le cas d'une turbine : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = \frac{P_a}{P_{net}} \quad (3.18)$$

Entre les instant t et $t'=(t+dt)$, le fluide a échangé un travail net $W_{net}=P_{net} \cdot dt$ avec la machine hydraulique. W_{net} est supposé positif s'il s'agit d'une pompe et négatif s'il s'agit d'une turbine.

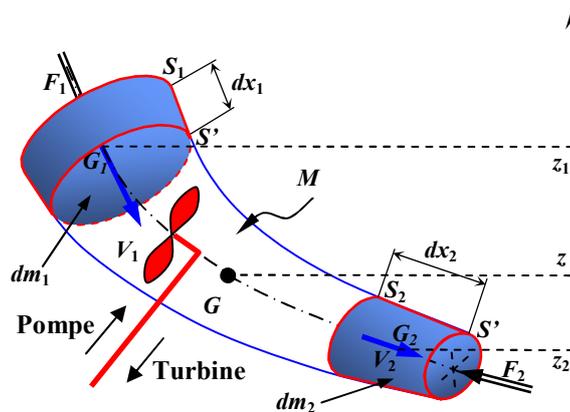


Figure 3.3 : Machine hydraulique entre les sections d'une veine de fluide

Désignons F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 . A l'instant t le fluide de masse (dm_1+M) est compris entre S_1 et S_2 . Son énergie mécanique est :

$$E_{méc} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1 \cdot g \cdot z_1 + M \cdot g \cdot z) + \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{1}{2} V^2 \cdot dm \quad (3.19)$$

L'instant $t'=(t+dt)$ le fluide de masse $(M+dm_2)$ est compris entre S'_1 et S'_2 . Son énergie mécanique est :

$$E'_{méc} = E'_{pot} + E'_{cin} = (M \cdot g \cdot z + dm_2 \cdot g \cdot z_2) + \int_{S_1}^{S_2} \frac{1}{2} V^2 \cdot dm + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2 \quad (3.20)$$

Appliquons le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : «La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures.», en considérant cette fois ci le travail de la machine hydraulique

$$E'_{méc} - E_{méc} = F_1 \cdot dx_1 - F_2 \cdot dx_2 + P_{net} \cdot dt \quad (3.21)$$

$$E'_{méc} - E_{méc} = P_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 + P_{net} \cdot dt = P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2 + P_{net} \cdot dt \quad (3.22)$$

Après simplification :

$$dm_2 \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2 - dm_1 \cdot g \cdot z_1 - \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1} \cdot dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2} \cdot dm_2 + P_{net} \cdot dt \quad (3.23)$$

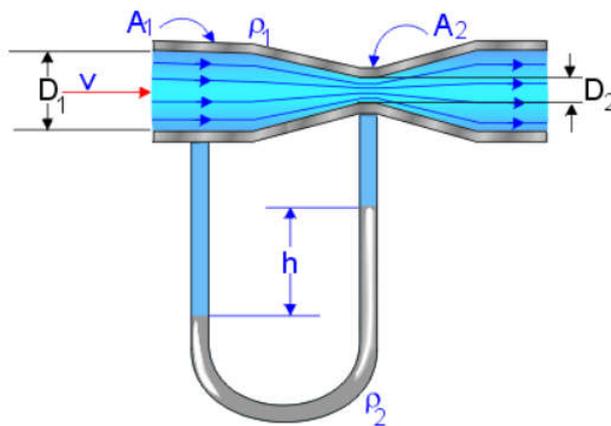
Par conservation de la masse : et puisque le fluide est incompressible ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$), on aboutie à l'équation de Bernoulli :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g \cdot (z_2 - z_1) = \frac{P_{net}}{q_m} \quad (3.24)$$

3.6 Applications aux mesures des débits et des vitesses

3.6.1 Venturi

Un Venturi est un système permettant de mesurer le débit d'un fluide. Il consiste en un tube avec un rétrécissement appelé convergent-divergent muni de prises de pression statiques, l'une en amont du convergent, l'autre au niveau du col. Son principe est de mesurer la différence de pression entre les sections de grand et de petit diamètre (voir figure).



Giovanni Battista Venturi : 1746-1822

Figure 3.4 : Tube de Venturi.

Ce tube est intercalé dans une tuyauterie dont on veut mesurer le débit. De l'eau (fluide parfait incompressible) s'écoule dans le venturi et on appelle h la dénivellation dans les tubes indiquant la pression. Les vitesses dans A_1 et A_2 sont uniformes.

- 1 - Calculer la vitesse V_2 du fluide dans la section contractée en fonction des sections A_1 et A_2 et de la différence des pressions P_1 au niveau de A_1 et de P_2 au niveau de A_2 .
- 2 - Exprimer le débit (en volume) de la conduite.
- 3 - Utilisez la relation de Bernoulli. Pensez à la conservation du débit en volume pour éliminer V_1 .

4 - Utilisez la définition du débit en volume!

1) Calcul de vitesse : en appliquant la relation de Bernoulli entre les sections A_1 et A_2 de pressions P_1 et P_2 on a :

$$P_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} = P_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{V_2^2}{2} \quad (3.25)$$

z_1 et z_2 sont les côtes respectives de la ligne de courant choisie et passant par les sections A_1 et A_2 . Appelons P_1^* et P_2^* les termes $P + \rho g z$. La conservation du débit en volume ($V_1 A_1 = V_2 A_2$), donne :

$$V_2 = \sqrt{\frac{2g}{1 - (A_2 / A_1)^2}} \cdot \sqrt{\frac{P_1^* - P_2^*}{\rho g}} \quad (3.26)$$

2) Expression du débit en volume dans le tube qui est donné par la formule suivante :

$$q_v = V_2 A_2 = A_2 \sqrt{\frac{2g}{1 - (A_2 / A_1)^2}} \cdot \sqrt{\frac{P_1^* - P_2^*}{\rho g}} \quad (3.27)$$

Ce qui nous donne avec $P_1^* - P_2^* = \rho g h$:

$$q_v = A_2 \sqrt{\frac{2gh}{1 - (A_2 / A_1)^2}} \quad (3.28)$$

3.6.2 Diaphragmes

Il s'agit d'un disque percé en son centre, réalisé dans le matériau compatible avec le liquide utilisé. Le diaphragme concentrique comprime l'écoulement du fluide, ce qui engendre une pression différentielle de part et d'autre de celui-ci. Il en résulte une haute pression en amont et une basse pression en aval, proportionnelle au carré de la vitesse d'écoulement. C'est le dispositif le plus simple, le moins encombrant et le moins coûteux. Domaine d'utilisation incompatible aux liquides contenant des impuretés solides car celles-ci peuvent s'accumuler à la base du diaphragme. Il introduit une perte de charge importante.

Les diaphragmes doivent être centrés exactement par rapport à la conduite et ils doivent être implantés sur des parties rectilignes à une distance suffisante des coudes, piquages, vannes, changement de section pour éviter les perturbations. En principe la droite amont est supérieure à 20 D et la longueur droite aval est supérieure à 10xD. Les diaphragmes ne doivent être jamais implantés sur des conduites horizontales. En effet, tous les fluides industriels contiennent des impuretés qui se déposeraient à la partie inférieure du diaphragme amont. Lorsque le liquide transporte du gaz, des bulles viennent se former en la partie supérieure. Au total, les résultats de la mesure sont complètement faussés.

Principe : un resserrement de la conduite ou un changement de direction créent entre amont et aval une différence de pression Δp liée au débit par une relation de la forme:

$$Q = K.(\Delta p)^{1/2}$$

avec ρ : masse volumique du liquide, K : constante réelle, Q : débit volumique.

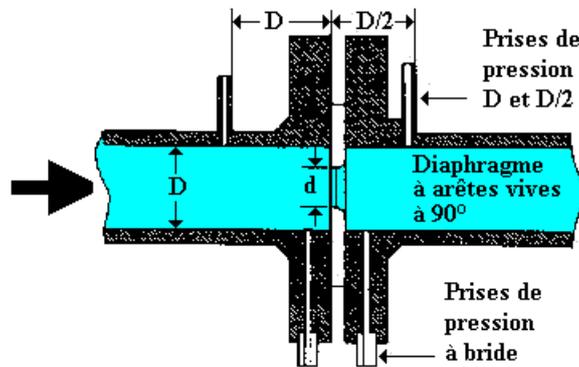


Figure 3.5 : Diaphragmes.

3.6.3 Tube de Pitot

Le physicien français Henri Pitot a proposé en 1732 un dispositif de mesure de la vitesse d'écoulement des fluides qui a pris son nom "**tube de Pitot**". L'appareil présente une forme profilée, est creux afin d'être rempli du fluide dans lequel il est immergé et muni de deux tubes manométriques (prises de pression). Comme le montre le schéma de la figure 3.6, l'un des deux tubes est relié au front d'attaque de l'appareil (point d'arrêt caractérisé par une vitesse d'écoulement nulle), alors que l'autre est en prise avec le fluide statique remplissant l'appareil.

En appliquant l'équation de *Bernoulli* entre les prises de pression, en supposant que le fluide est non visqueux, incompressible et que l'écoulement est stationnaire et uniforme en amont de l'appareil. On supposera également que toutes ces lignes de courant sont environ à la même altitude.

Le long de la ligne de courant passant par le point d'arrêt A et le point O, on a :

$$P_0 + \rho g z_0 + \rho \frac{V_0^2}{2} = P_A + \rho g z_A + \rho \frac{V_A^2}{2} \quad (3.29)$$

avec $z_0 \approx z_A$, $v_0 \approx U$ et $z_A \approx 0$. Par conséquent, on obtient la pression de stagnation : $P_A = P_0 + \rho U^2/2$, où P_0 et U sont respectivement la pression et la vitesse de l'écoulement uniforme (écoulement amont, non perturbé par la présence de l'objet sonde). Par application de la loi de l'hydrostatique, cette pression de stagnation est liée au niveau affiché dans le premier tube manométrique.

Le long de la ligne de courant passant par les points 0' et B', on a :

$$P_{0'} + \rho g z_{0'} + \rho \frac{V_{0'}^2}{2} = P_{B'} + \rho g z_{B'} + \rho \frac{V_{B'}^2}{2} \quad \text{avec} \quad z_{0'} \approx z_{B'} \quad (3.30)$$

Les points **0** et **0'** étant infiniment proches, on peut considérer que $P_{0'} \approx P_0$ et $v_{0'} \approx v_0 = U$; d'autre part, le point **B'** est situé dans une zone où l'écoulement redevient uniforme (les lignes de courant redeviennent rectilignes et parallèles) : il s'ensuit que $v_{B'} \approx U$ et l'équation de Bernoulli se résume à : $P_{B'} \approx P_{0'} \approx P_0$.

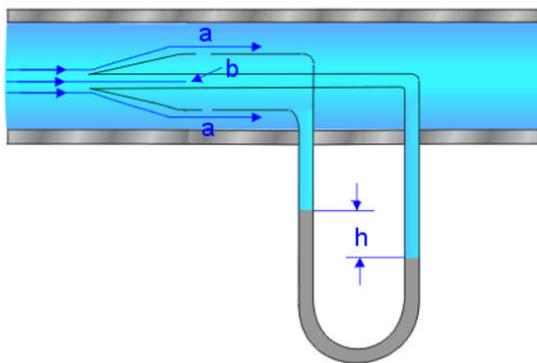
Le point **B** est situé au niveau de l'orifice permettant au dispositif d'être rempli par le fluide. En conséquence, la pression en **B** est la même que celle qui règne de manière uniforme à l'intérieur et qui est mesurée par le second tube manométrique. Par ailleurs, puisqu'à l'aplomb du point **B**, les lignes de courant sont rectilignes et parallèles, la loi de l'hydrostatique s'applique pour donner

$$P_{B'} + \rho g z_{B'} = P_B + \rho g z_B \quad \text{avec} \quad z_{B'} \approx z_B \quad (3.31)$$

Ce qui conduit simplement à $P_{B'} \approx P_B$. Pour résumer, on vient de montrer que $P_B \approx P_0$ et $P_A = P_0 + \rho U^2 / 2$. Or, la différence de niveau h lue grâce aux deux tubes manométriques permet d'évaluer la différence de pression entre les points **A** et **B** :

$$\left. \begin{array}{l} P_A - P_B = \rho g \Delta h \\ P_A - P_B = \rho U^2 / 2 \end{array} \right\} \Rightarrow U = \sqrt{2g \cdot \Delta h} \quad (3.32)$$

Il en résulte que ce dispositif permet une mesure quasi directe de la vitesse d'écoulement uniforme.



Henri Pitot

Figure 3.6 : Tube de Pitot, principe et application

3.7 Théorème d'Euler

Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, etc.

Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (3.33)$$

Avec $\vec{P} = m\vec{V}_G$: quantité de mouvement.

Ce théorème permet de déterminer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets qui les environnent.

Théorème

La résultante $\sum \vec{F}_{ext}$ des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe limitée par S_1 et S_2) est égale à la variation de la quantité de mouvement du fluide qui entre en S_1 à une vitesse \vec{V}_1 et sort par S_2 à une vitesse \vec{V}_2 .

$$\sum \vec{F}_{ext} = q_m \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (3.34)$$

Exemple

Considérons un obstacle symétrique par rapport à l'axe \vec{z} . Le jet d'un écoulement de débit massique q_m de vitesse \vec{V}_1 et de direction parallèle à l'axe \vec{z} , percute l'obstacle qui le dévie d'un angle β . Le fluide quitte l'obstacle à une vitesse \vec{V}_2 de direction faisant un angle β par rapport à l'axe \vec{z} .

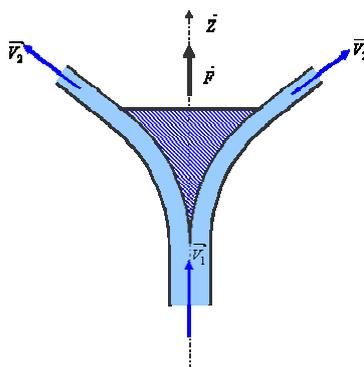


Figure 3.7 : Jet d'eau dévié et divisé par un obstacle

La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est : $q_m \cdot V_1$ porté par l'axe \vec{z} . La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est : $q_m \cdot V_1 \cdot \cos\beta$ porté par l'axe \vec{z} . La force opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$R = q_m \cdot V_2 \cdot \cos \beta - q_m \cdot V_1 \quad (3.35)$$

La force F exercée sur l'obstacle en direction de \vec{z} est égale et opposée à celle-ci :

$$F = q_m \cdot (V_1 - V_2 \cdot \cos \beta) \quad (3.36)$$

3.8 Applications

Exercice 3.1 Un liquide s'écoule dans une conduite dont les variations de section sont lentes ; on considérera donc cette conduite comme régulière, le débit est de 3 m³/min. Calculer les vitesses moyennes V_1 et V_2 dans deux sections droites de diamètres respectifs $D_1 = 120$ mm et $D_2 = 200$ mm.

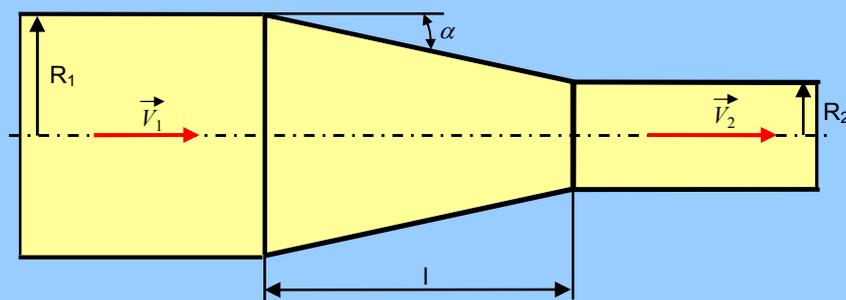
Solution : $Q_v = 3000 \text{ L/min} = \frac{3000 \cdot 10^{-3}}{60} \text{ m}^3/\text{s} = 0,05 \text{ m}^3/\text{s}.$

Comme le liquide est incompressible, le débit est constant.

$$Q_v = S \cdot V = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot V ; V = \frac{4 \cdot Q_v}{\pi \cdot D^2}, V_1 = \frac{4 \cdot Q_v}{\pi \cdot D_1^2} = \frac{4 \cdot 0,05}{\pi \cdot 0,12^2} = 4,42 \text{ m/s}$$

$$\text{et } V_2 = \frac{4 \cdot Q_v}{\pi \cdot D_2^2} = \frac{4 \cdot 0,05}{\pi \cdot 0,2^2} = 1,59 \text{ m/s.}$$

Exercice 3.2 On veut accélérer la circulation d'un fluide parfait dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par 4, pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle α (schéma ci-dessous).



1) Calculer le rapport des rayons (R_1/R_2).

2) Calculer ($R_1 - R_2$) en fonction de L et α . En déduire la longueur L ($R_1 = 50$ mm, $\alpha = 15^\circ$).

Solution : 1) On applique l'équation de continuité :

$$V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2 \text{ ou encore } \frac{S_1}{S_2} = \frac{V_2}{V_1} \text{ or } S_1 = \pi \cdot R_1^2 \text{ et } S_2 = \pi \cdot R_2^2 \text{ d'où } \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}} = 2.$$

$$2) \text{tg} \alpha = \frac{R_1 - R_2}{l} \text{ donc } l = \frac{R_1 - R_2}{\text{tg} \alpha} \text{ or } R_2 = \frac{R_1}{2} \text{ donc } l = \frac{R_1}{2 \cdot \text{tg} \alpha} \Rightarrow L = 93,3 \text{ mm.}$$

Exercice 3.3 Soit la canalisation suivante :

- 1) Montrer que la différence de pression ($P_2 - P_1$) entre ces deux points dépend seulement de la nature du fluide et de la différence entre les côtes Z_1 et Z_2 des points considérés.
- 2) Calculer cette différence de pression si le fluide est de l'eau.
- 3) Calculer cette différence de pression si le fluide est de l'air.
- 4) Calculer l'importance relative de cette différence de pression si l'écoulement a lieu sous une pression moyenne voisine de la pression atmosphérique $p_a = 10^5$ Pa, pour chacun des fluides considérés. Fournir une conclusion pour chacun des deux fluides ?

On considérera que la vitesse est la même dans une section de la canalisation (écoulement iso volume).

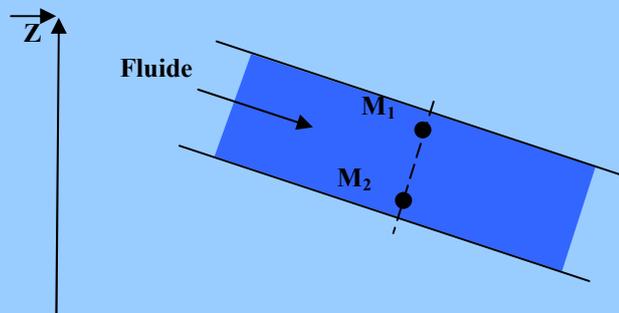
On donne :

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2,$$

$$\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg/m}^3,$$

$$\rho_{\text{air}} = 1.3 \text{ kg/m}^3,$$

$$Z_1 - Z_2 = 10 \text{ cm}.$$



Solution : 1) On applique le théorème de Bernoulli :

$$\left(\frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z + P = cte\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 + P_1 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2 + P_2.$$

En simplifiant on obtient $P_2 - P_1 = \rho g (z_1 - z_2)$.

2) pour l'eau ($\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$) ; $P_2 - P_1 = 10^3 \cdot 9,8 \cdot 0,1 = 980 \text{ Pa}$.

3) Pour l'air ($\rho_{\text{air}} = 1.3 \text{ kg/m}^3$) ; $P_2 - P_1 = 1,3 \cdot 9,8 \cdot 0,1 = 1,274 \text{ Pa}$.

$$I_{re} = \frac{(p_2 - p_1)_{\text{eau}}}{p_{\text{atm}}} = \frac{980}{10^5} = 9,8 \cdot 10^{-4} ; I_{ra} = \frac{(p_2 - p_1)_{\text{air}}}{p_{\text{atm}}} = \frac{1,274}{10^5} = 1,274 \cdot 10^{-5}.$$

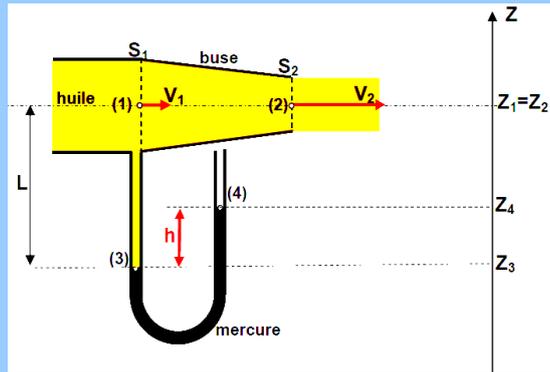
Exercice 3.4 De l'huile est accélérée à travers une buse en forme de cône convergent (figure -1-), La buse est équipée d'un manomètre en U qui contient du mercure.

Partie 1 : Un débit volumique $q_v = 0,4 \text{ l/s}$, l'huile traverse la section S_1 de diamètre $d_1 = 10 \text{ mm}$ à une vitesse d'écoulement V_1 , à une pression P_1 et sort vers l'atmosphère par la section S_2 de diamètre d_2 à une vitesse d'écoulement $V_2 = 4 \cdot V_1$ et une pression $P_2 = P_{\text{atm}} = 1 \text{ bar}$.

On donne la masse volumique de l'huile : $\rho_{\text{huile}} = 800 \text{ kg/m}^3$.

- 1) Calculer la vitesse d'écoulement V_1 .
- 2) Déduire le diamètre d_2 .

3) Déterminer la pression P_1 en bar.



Partie 2 : Le manomètre, tube en U, contient du mercure de masse volumique $\rho_{\text{mercure}} = 13600 \text{ kg/m}^3$. Il permet de mesurer la pression P_1 à partir d'une lecture de la dénivellation.

On donne :- $(Z_1 - Z_3) = L = 1274 \text{ mm}$.

- l'accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

- la pression $P_4 = P_{\text{atm}} = 1 \text{ bar}$,

1) Déterminer la pression P_3 .

2) Déterminer la dénivellation h du mercure.

Solution : Partie 1 : Etude de la buse :

$$1) \text{ Vitesse d'écoulement : } q_v = v_1 S_1 = v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} \Rightarrow v_1 = \frac{4 \cdot q_v}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,01^2} = 5 \text{ m/s}$$

$$2) \text{ Equation de continuité : } v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 \Rightarrow d_2 = \sqrt{(v_1 / v_2)} \cdot d_1 = \sqrt{(5 / 20)} \cdot 10 = 5 \text{ mm}$$

$$3) \text{ Equation de Bernoulli : } \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho_{\text{huile}}} + g(Z_2 - Z_1) = 0 \text{ or } Z_2 = Z_1 \text{ et } p_2 = p_{\text{atm}}$$

$$\text{Donc : } P_1 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho_{\text{huile}} \cdot (v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow P_1 = 10^5 + \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot (20^2 - 5^2) = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 2,5 \text{ bar}$$

Partie 2 : Etude du manomètre (tube en U)

$$\text{RFH entre (1) et (3) : } P_3 - P_1 = \rho_{\text{huile}} \cdot g \cdot (Z_1 - Z_3)$$

$$P_3 = P_1 + \rho_{\text{huile}} \cdot g \cdot L \Rightarrow P_3 = 2,5 \cdot 10^5 + 800 \cdot 9,81 \cdot 1,274 = 2,6 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 2,6 \text{ bar}$$

$$\text{RFH entre (3) et (4) : } P_3 - P_4 = \rho_{\text{mercure}} \cdot g \cdot (Z_4 - Z_3) \text{ or } Z_4 - Z_3 = h$$

$$\text{Donc } h = \frac{P_3 - P_4}{\rho_{\text{mercure}} \cdot g} = \frac{2,6 \cdot 10^5 - 1 \cdot 10^5}{13600 \cdot 9,81} = 1,2 \text{ m}$$

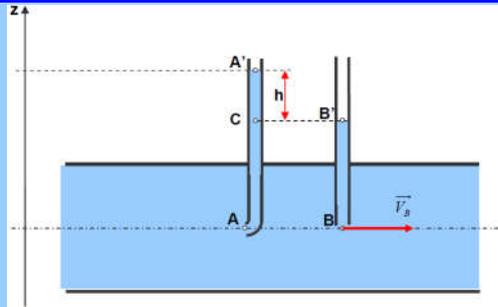
Exercice 3.5 1) Déduire la pression P_A au point A en fonction de P_B , ρ et V .

2) Ecrire la relation fondamentale de l'hydrostatique entre les points A et A'.

3) Ecrire la relation fondamentale de l'hydrostatique entre les points B et B'.

4) Donner l'expression de V en fonction de g et h .

5) En déduire le débit volumique q_v . Faire une application numérique pour une dénivellation $h = 3,2 \text{ cm}$.



Solution : 1) Théorème de Bernoulli :

$$P_A + \rho \cdot g \cdot Z_A + \frac{1}{2} \rho \cdot V_A^2 = P_B + \rho \cdot g \cdot Z_B + \frac{1}{2} \rho \cdot V_B^2 \text{ or } Z_A = Z_B ; V_A = 0 \text{ et } V_B = V$$

$$\text{donc } P_A = P_B + \frac{1}{2} \rho \cdot V^2$$

2) Relation fondamentale de l'hydrostatique entre A et A': $P_A = P_{A'} + \rho \cdot g \cdot (Z_{A'} - Z_A)$.

3) Relation fondamentale de l'hydrostatique entre B et B': $P_B = P_{B'} + \rho \cdot g \cdot (Z_{B'} - Z_B)$.

4) En substituant P_A et P_B dans la relation de Bernoulli on obtient :

$$P_{A'} + \rho \cdot g \cdot (Z_{A'} - Z_A) = P_{B'} + \rho \cdot g \cdot (Z_{B'} - Z_B) + \frac{1}{2} \rho \cdot V^2 \text{ or } P_{A'} = P_{B'} = P_a ; Z_A = Z_B \text{ et } Z_{A'} - Z_{B'} = h$$

$$\text{donc } \rho \cdot V^2 / 2 = \rho \cdot g \cdot (Z_{A'} - Z_{B'}) \quad \text{ou encore } V = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

$$5) q_v = S \cdot V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = 1 \text{ L / s}$$

Exercice 3. On considère une conduite de diamètre intérieur $d = 40 \text{ mm}$ dans laquelle s'écoule de l'eau à une vitesse V . Afin de mesurer le débit volumique, la canalisation a été équipée de deux tubes plongeant dans le liquide (figure 2), l'un débouchant en A face au courant et l'autre en B est le long des lignes de courant, En mesurant la dénivellation h du liquide dans les deux tubes (figure 2), on peut en déduire la vitesse V

On admet les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est permanent.
- Le fluide est parfait et incompressible.
- Au point B, le liquide a la même vitesse V que dans la canalisation ($V_B = V$).
- Les deux points A et B sont à la même hauteur ($Z_A = Z_B$).

4.1 Fluide réel

Un fluide est dit réel si pendant son écoulement ses forces de contact à la surface sur lesquelles elles s'exercent possèdent des composantes tangentielles qui s'opposent au glissement des couches fluides. Cette propriété est caractérisée par la viscosité manifestant une résistance du fluide à l'écoulement.

4.2 Régimes d'écoulement, expérience de Reynolds

4.2.1 Régimes d'écoulement

Un fluide réel en écoulement se distingue par deux types de comportement qui ont été expérimentés par *Reynolds* en 1883. Ces expériences ont été réalisées par écoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique rectiligne dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré permettant d'élucider l'existence de deux régimes d'écoulement : régime **laminaire** et régime **turbulent** : a) **Régime laminaire** : les filets fluides sont des lignes régulières, sensiblement parallèles entre elles. b) **Régime turbulent** : les filets fluides s'enchevêtrent, s'enroulent sur eux-mêmes.

D'autres études ont démontré qu'il existe encore des écoulements turbulents lisses et des écoulements turbulents rugueux. La limite entre ces différents types d'écoulements est évidemment difficile à appréhender.

4.2.2 Expérience de Reynolds

Reynolds a établi un nombre sans dimension qui prend son nom en expérimentant plusieurs fluides de différentes viscosités et en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation d'écoulement, ce qui permet de préciser si l'écoulement est laminaire ou turbulent, donné par l'équation :

$$Re = \frac{V \cdot d}{\nu} \quad (4.1)$$

V vitesse moyenne d'écoulement à travers la section considérée en [m/s], d diamètre de la conduite ou largeur de la veine fluide en [m] et ν viscosité cinématique du fluide [m²/s].

Pratiquement, l'écoulement : pour $Re < 2 \cdot 10^3$ est laminaire, pour $Re > 2 \cdot 10^3$ est turbulent, pour $2000 < Re < 10^5$ est turbulent lisse et pour $Re > 10^5$ il est turbulent rugueux.

4.3 Analyse dimensionnelle, théorème de Vaschy-Buckingham, nombre de Reynolds

4.3.1 Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est un outil théorique servant à interpréter les problèmes à partir des dimensions des grandeurs physiques mises en jeu, c'est-à-dire de leur nature essentielle : longueur, durée, masse, intensité électrique, etc.

L'analyse dimensionnelle repose sur le fait que ne peuvent être comparées que des grandeurs ayant la même dimension ; en effet, il est possible de comparer deux longueurs entre elles, mais pas une longueur et une masse par exemple. Mathématiquement, cette déclaration est fondée sur le théorème de **Vaschy-Buckingham**. L'analyse dimensionnelle est ainsi à la base des systèmes d'unités naturelles.

L'analyse dimensionnelle est utilisée particulièrement en physique, en chimie et en ingénierie, elle permet notamment de vérifier *a priori* la possibilité d'une équation ou du résultat d'un calcul et elle est utile pour formuler des hypothèses simples sur les grandeurs qui gouvernent l'état d'un système physique avant qu'une théorie plus complète ne vienne valider ces hypothèses.

4.3.2 Théorème de Vaschy-Buckingham

En mathématiques, le **théorème de Vaschy-Buckingham**, ou **théorème Pi**, est un des théorèmes de base de l'analyse dimensionnelle. Ce théorème établit que si une équation physique met en jeu n variables physiques, celles-ci dépendant de k unités fondamentales, alors il existe une équation équivalente mettant en jeu $n-k$ variables sans dimension construites à partir des variables originelles.

Enoncé du théorème

Soit $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ des quantités physiques, dont les p premières sont rapportées à des unités fondamentales distinctes et les $n-p$ dernières à des unités dérivées des p unités fondamentales (par exemple a_1 peut être une longueur, a_2 une masse, a_3 un temps, et les $n-3$ autres quantités a_4, a_5, \dots, a_n seraient des forces, des vitesses, etc.; alors $p = 3$). Si entre ces n quantités il existe une relation : $F(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = 0$ qui subsiste quelles que soient les grandeurs arbitraires des unités fondamentales, cette relation peut se ramener à une autre en $n-p$ paramètres au plus, soit :

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-p}) = 0$$

4.4 Pertes de charges linéaires, pertes de charge singulières et diagramme de Moody

4.4.1 Introduction

Considérons un écoulement entre deux points (1) et (2) d'un fluide réel dans une conduite, tel qu'entre les points (1) et (2) il n'y ait pas de machine hydraulique. Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 4 du chapitre 3 avec les mêmes notations et les hypothèses suivantes :

- Le fluide est réel et incompressible : cela suppose l'existence de forces élémentaire de frottement visqueux $d\zeta$ qui contribue dans l'équation de bilan par un travail négatif et donner naissance à des pertes de charges.
- L'écoulement est permanent.

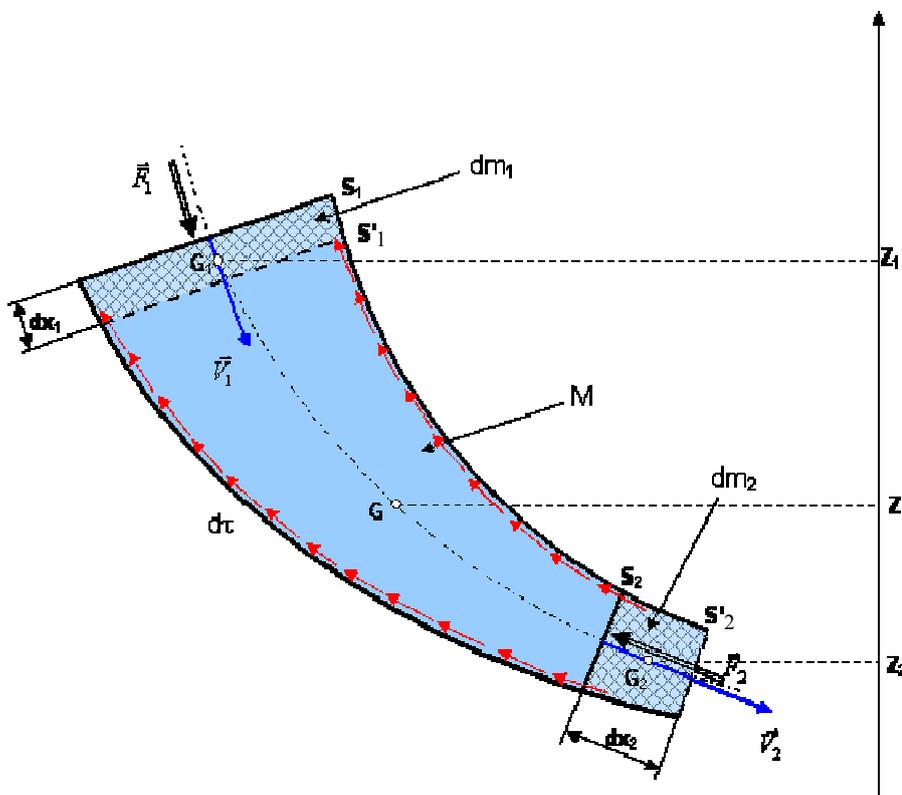


Figure 4.1 : élément

On considère un axe \vec{Z} vertical dirigé vers le haut. On désigne par Z_1 , Z_2 et Z respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm_1 , dm_2 et M .

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 . A l'instant t le fluide de masse $dm_1 + M$ est compris entre S_1 et S_2 . Son énergie mécanique est :

$$E_{méc} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1 \cdot g \cdot Z_1 + M \cdot g \cdot Z) + \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 + \int_{S_1'}^{S_2} \frac{1}{2} V^2 \cdot dm \quad (4.5)$$

A l'instant $t' = (t+dt)$ le fluide de masse $M+dm_2$ est compris entre S_1' et S_2' . Son énergie mécanique est :

$$E'_{méc} = E'_{pot} + E'_{cin} = (M \cdot g \cdot Z + dm_2 \cdot g \cdot Z_2) + \int_{S_1'}^{S_2} \frac{1}{2} V^2 \cdot dm + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2 \quad (4.6)$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' :

« La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures ». On prendra en considération cette fois ci le travail des forces de frottement visqueux $d\tau$.

$$E'_{méc} - E_{méc} = W_{Force\ de\ pression} + \Sigma W_{d\tau} = F_1 \cdot dx_1 - F_2 \cdot dx_2 + \Sigma W_{d\tau} \quad (4.8)$$

\Leftrightarrow

$$E'_{méc} - E_{méc} = P_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 + \Sigma W_{d\tau} = P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2 + \Sigma W_{d\tau} \quad (4.9)$$

En simplifiant on obtient :

$$dm_2 \cdot g \cdot Z_2 + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2 - dm_1 \cdot g \cdot Z_1 - \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1} \cdot dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2} \cdot dm_2 + \Sigma W_{d\tau} \quad (4.10)$$

Par conservation de la masse : $dm_1=dm_2=dm$. Et puisque le fluide est incompressible $\rho_1=\rho_2=\rho$ on aboutie à l'équation de Bernoulli :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g \cdot (Z_2 - Z_1) = \frac{\Sigma W_{d\tau}}{dm} \quad (4.11)$$

On défini la perte de charge entre les points (1) et (2) par $J_{12} = \Sigma W_{d\tau} / dm$ qui est la perte d'énergie par frottement visqueux par unité de masse qui passe.

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g \cdot (Z_2 - Z_1) = J_{12} \quad (4.12)$$

L'unité de chaque terme de la relation (4.12) est le joule par kilogramme (J/kg). En divisant par g la relation (4) devient homogène à des longueurs en mètre :

$$\frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\varpi} + Z_2 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\varpi} + Z_1 + \frac{J_{12}}{g} \quad (4.13)$$

Elle peut être interprétée graphiquement de la manière suivante :

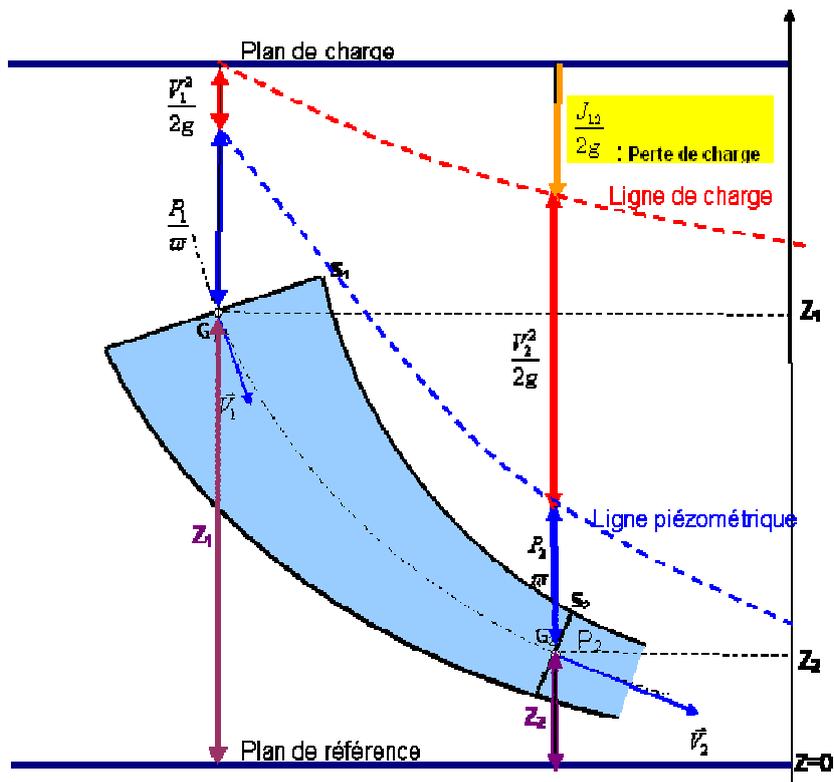


Figure 4.2 : Perte de charge entre deux points en termes de longueur.

Portons sur la verticale, à partir du centre de gravité G_1 de la section S_1 une distance égale à P_1/ϖ . Le lieu de toutes les extrémités de ces segments s'appelle ligne piézométrique.

Portons sur la verticale au dessus de la ligne piézométrique la quantité $V_1^2/2g$. Le lieu de toutes les extrémités de ces segments représente la ligne de charge. En l'absence de pertes de charge, la ligne de charge est confondue avec le plan de charge. Ce plan de charge donne une représentation graphique de la constance tirée de l'équation de Bernoulli pour un fluide parfait. La perte de charge totale exprimée en hauteur de liquide depuis le début de l'écoulement, est égale à la distance entre la ligne de charge et le plan de charge, mesurée sur la verticale passant par le point G_1 .

La perte de charge entre deux points G_1 et G_2 de l'écoulement est donnée par la différence de cote de la ligne de charge sur les verticales passant par les points précédents.

La perte de charge J_{12} peut être due à une perte de charge linéaire et une perte de charge singulière :

$$J_{12} = J_L + J_S \quad (4.14)$$

Par exemple, dans le circuit représenté dans la figure ci-dessous, les tronçons BC, DE, FG, HI et JK sont des coudes de différents angles, donc elles présentent des pertes de charge singulières. Les tronçons AB, CD, EF, GH, IJ et KL sont des conduites rectilignes, donc elles présentent des pertes de charge linéaires.

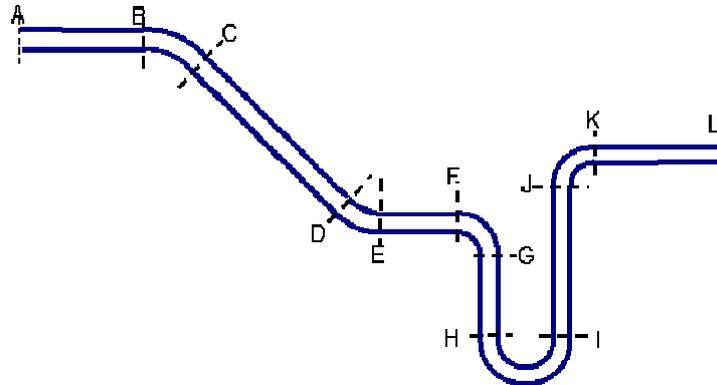


Figure 4.3 : Circuit présentant des pertes de charge linéaires et singulières.

4.4.2 Pertes de charges linéaires

Les pertes de charges linéaires, sont des pertes de charge réparties régulièrement le long des conduites. En chaque point d'un écoulement permanent, les caractéristiques de l'écoulement sont bien définies et ne dépendent pas du temps. La représentation graphique de l'écoulement prend l'allure ci-dessous.

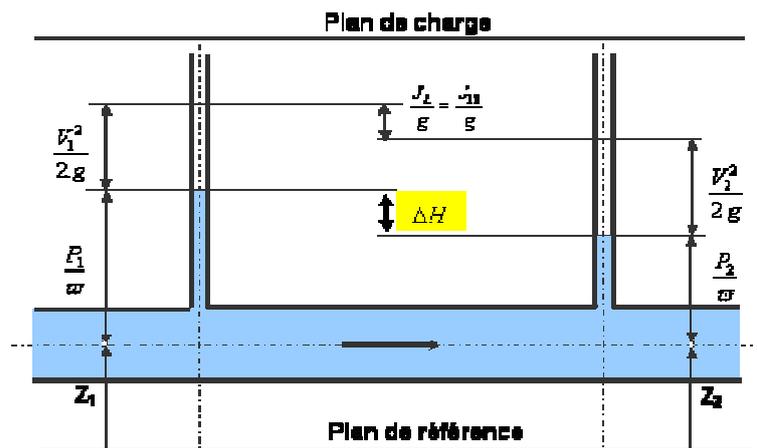


Figure 4.4 : Représentation graphique des pertes de charges linéaires

La vitesse étant constante, la ligne piézométrique et la ligne de charge sont parallèles. La variation de hauteur piézométrique, évaluée en hauteur de liquide est égale à la perte de charge linéaire entre les deux points de mesure. Les pertes de charge linéaires sont

proportionnelles à la longueur L de la conduite, inversement proportionnelles à son diamètre d , proportionnelle au carré de la vitesse débitante V du fluide.

$$J_L = -\lambda \cdot (L/d) \cdot V^2 / 2 \quad (4.15)$$

où V vitesse moyenne d'écoulement dans la conduite (m/s), L longueur de la conduite (m), d diamètre de la conduite (m), λ coefficient de perte de charge linéaire. Il dépend du régime d'écoulement et notamment du nombre de Reynolds Re . Dans un régime d'écoulement laminaire :

$$\lambda = 64 / Re \text{ (Formule de Poiseuille) } Re < 2000 \quad (4.16)$$

Dans un régime d'écoulement turbulent lisse :

$$\lambda = 0,316 \cdot Re^{-0,25} \text{ (Formule de Blasius) } 2000 < Re < 10^5 \quad (4.17)$$

Dans un régime d'écoulement turbulent rugueux :

$$\lambda = 0,79 \cdot (\varepsilon/d)^{0,5} \text{ (Formule de Blench) } Re > 10^5 \quad (4.18)$$

avec ε rugosité de la surface interne de la conduite (mm), d diamètre intérieur de la conduite (mm). Parfois, on lit la valeur de λ sur un abaque établie par.

4.4.3 Pertes de charge singulières

Quand la conduite subit de brusque variation de section ou de direction, il se produit des pertes de charges dites singulières, elles sont généralement mesurable et font partie des caractéristiques de l'installation. On les exprime par :

$$J_S = K_S \cdot V^2 / 2 \quad (4.19)$$

où S : indice de l'accident de forme de la conduite. K_S : Coefficient (sans unité) de pertes de charge. Il dépend de la nature et de la géométrie de l'accident de forme. Les valeurs de K_S sont données par les constructeurs dans leurs catalogues.

4.4.4 Diagramme de Moody

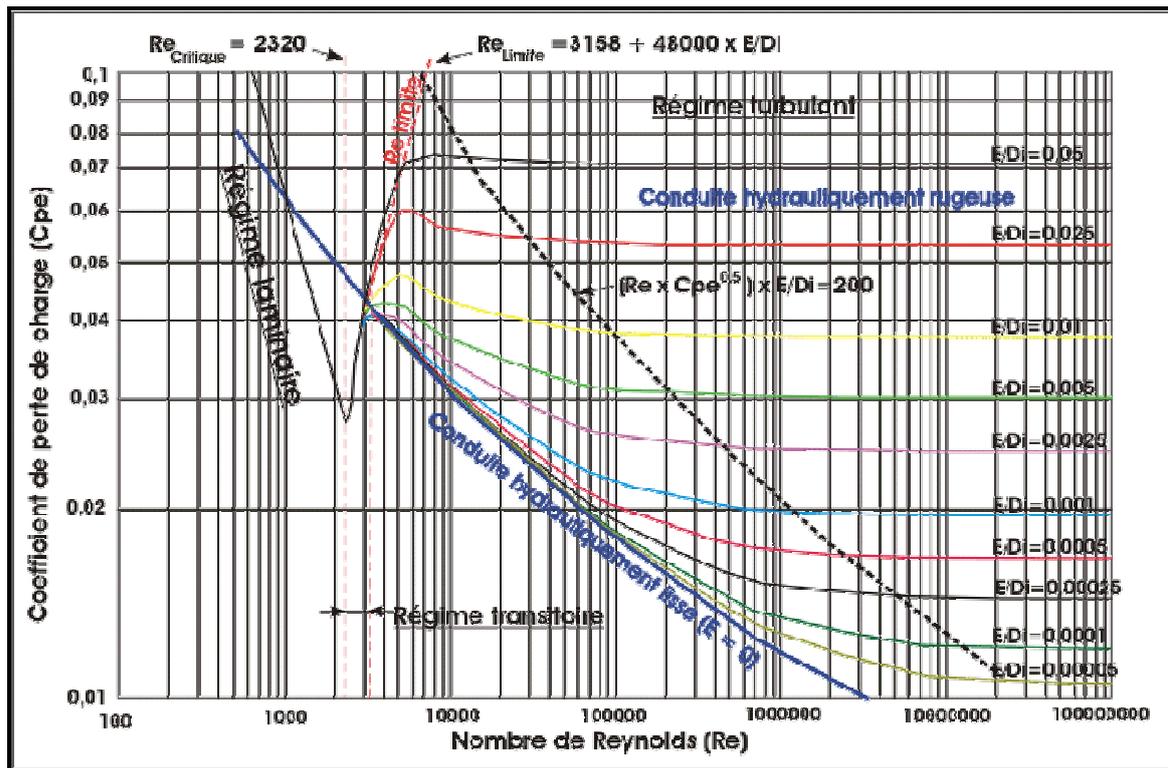
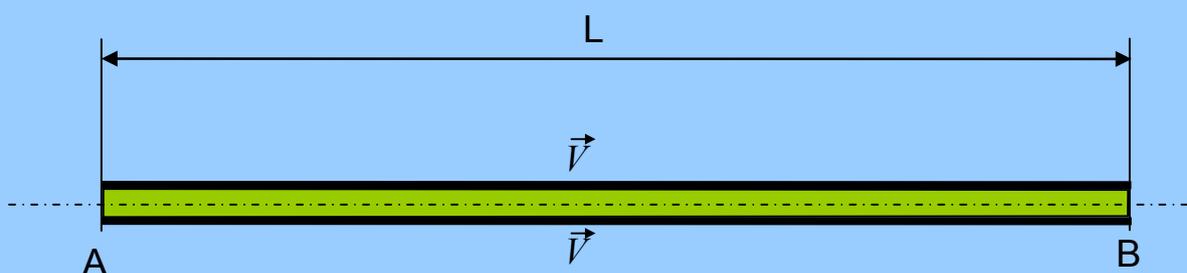


Figure 4.5 : Diagramme de Moody

4.5 Applications

Exercice 4.1 Du fuel lourd de viscosité dynamique $\mu = 0,11$ Pa.s et de densité $d = 0,932$ circule dans un tuyau de longueur $L = 1650$ m et de diamètre $D = 25$ cm à un débit volumique $q_v = 19,7$ l/s.

- 1) Déterminer la viscosité cinématique ν du fuel.
- 2) Calculer la vitesse d'écoulement V .
- 3) Calculer le nombre de Reynolds Re .
- 4) En déduire la nature de l'écoulement.
- 5) Déterminer le coefficient λ de pertes de charge linéaire.
- 6) Calculer la perte de charge J_L dans le tuyau.



Solution : 1) Viscosité cinématique : $\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu}{d \cdot \rho_{eau}} = \frac{0,11}{1000 \cdot 0,932} = 118 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$

2) Vitesse d'écoulement : $V = \frac{4 \cdot q_v}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 19,7 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,25^2} = 0,4013 \text{ m/s}$

3) Nombre de Reynolds : $Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{0,4013 \cdot 0,25}{118 \cdot 10^{-6}} = 850,211$

4) $Re < 2000$ donc l'écoulement est laminaire.

5) Formule de poiseuille : $\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{850,211} = 0,07527$

6) Perte de charge linéaire : $J_L = -\lambda \cdot \frac{V^2}{2} \cdot \left(\frac{L}{D} \right) = -0,07527 \cdot \frac{0,4013^2}{2} \cdot \left(\frac{1650}{0,25} \right) = 40 \text{ J/kg}$.

Exercice 4.2 Un pipe-line de diamètre $d=25$ cm est de longueur L est destiné à acheminer du pétrole brut d'une station A vers une station B avec un débit massique $q_m=18$ kg/s.

Les caractéristiques physiques du pétrole sont les suivantes :

- masse volumique $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$,
- viscosité dynamique $\mu = 0,261 \text{ Pa.s}$.

1) Calculer le débit volumique q_v du pétrole.

2) Déterminer sa vitesse d'écoulement V .

3) Calculer le nombre de Reynolds Re .

4) Quelle est la nature de l'écoulement?

5) Calculer la valeur du coefficient de perte de charge linéaire λ .

6) Exprimer la relation de Bernoulli entre A et B. Préciser les conditions d'application et simplifier.

7) Déterminer la longueur L maximale entre deux stations A et B à partir de laquelle la chute de pression ($P_A - P_B$) dépasse 3 bar.

Solution : 1) Débit volumique : $q_v = \frac{q_m}{\rho} = \frac{18}{900} = 0,02 \text{ m}^3 / \text{s}$.

2) Vitesse d'écoulement : $V = \frac{4 \cdot q_v}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 0,02}{\pi \cdot 0,25^2} = 0,407 \text{ m/s}$.

3) Nombre de Reynolds : $Re = \frac{V \cdot d}{(\mu / \rho)} = \frac{0,407 \cdot 0,25}{(0,261 / 900)} = 350,862$.

4) $Re < 2000$ il s'agit d'un écoulement laminaire.

5) Coefficient de perte de charge linéaire : $\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{350,862} = 0,1824$.

6) Equation de Bernoulli : $\frac{1}{2}(V_B^2 - V_A^2) + \frac{1}{\rho} \cdot (P_B - P_A) + g \cdot (Z_B - Z_A) = J_L$,

on a : $V_B=V_A$, $Z_B=Z_A$ donc $\frac{1}{\rho} \cdot (P_B - P_A) = J_L$.

7) Calcul de la longueur de la conduite : $\frac{1}{\rho} \cdot (P_B - P_A) = J_L$ avec $J_L = -\lambda \cdot \frac{V^2}{2} \cdot \left(\frac{L}{d}\right)$,

donc $L = \frac{2 \cdot (P_A - P_B) \cdot d}{\lambda \cdot \rho \cdot V^2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^5}{0,1824 \cdot 900 \cdot 0,407^2} = 5516,137m$.

Bibliographie

- [01] F.M. White, Fluid Mechanics, Fourth Edition, McGraw-Hill 1998
- [02] B. Massey & J. Ward-Smith, Mechanics of Fluids, Eighth edition, Taylor & Francis 2006
- [03] Y.A. Çengel & J.M. Cimbala, Fluid Mechanics, Fundamentals and Applications, McGraw-Hill 2006
- [04] J.H. Spurk & N. Aksel, Fluid Mechanics, Second Edition, Springer 2008
- [05] F. Durst, Fluid Mechanics, An Intro to the Theory of Fluid Flows, Springer 2008
- [06] B.R. Munson, D.F. Young, T.H. Okiishi, W.W. Huebsch, Fundamentals of Fluid Mechanics, Sixth Edition, John Wiley & Sons 2009
- [07] P. Chassaing, Mécanique des Fluides, Eléments d'un premier parcours, Troisième édition CEPAD 2010
- [08] S. Amiroudine, J.-L. Battaglia, Mécanique des Fluides, Dunod 2011
- [09] J.P. Caltagerone, Physique des Ecoulements Continus, Springer 2013