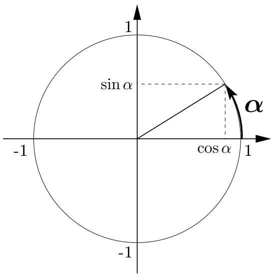
Fonctions trigonométriques

Définitions – Propriétés immédiates



$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotan}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1 \qquad \sin(\alpha + 2n\pi) = \sin\alpha$$

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1 \qquad \cos(\alpha + 2n\pi) = \cos\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \tan(\alpha + n\pi) = \tan\alpha$$

$$(n \in \mathbb{Z})$$

Symétrie, parité

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotan}\alpha$$

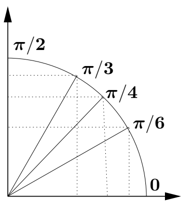
$$\operatorname{cotan}(-\alpha) = -\operatorname{cotan}\alpha \qquad \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

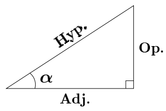
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha \qquad \operatorname{cotan}(\pi - \alpha) = -\operatorname{cotan}\alpha$$

Valeurs particulières

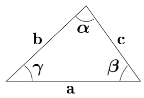
α [rad]	α [°]	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
0	0	1	0	0
$\pi/6$	30	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\pi/4$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\pi/3$	60	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	90	0	1	$+\infty$



Trigonométrie



$$\sin\alpha = \frac{\text{Op.}}{\text{Hyp.}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Adj.}}{\text{Hyp.}}, \qquad \tan\alpha = \frac{\text{Op.}}{\text{Adj.}}$$



$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Décalage

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha, \qquad \sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha, \qquad \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$$

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotan}\alpha, \qquad \tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$$

$$\operatorname{cotan}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\alpha$$

$$\operatorname{cotan}(\alpha + \pi) = \operatorname{cotan}\alpha$$

Formules d'addition ($\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$)

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \qquad \left(\alpha,\ \beta \text{ et } \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \qquad \left(\alpha,\ \beta \text{ et } \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

Factorisation et développement ($p,\ q \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$)

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

Si p et $q \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$:

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}, \qquad \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

$$\cos p\cos q = \frac{\cos(p+q) + \cos(p-q)}{2}, \qquad \sin p\sin q = \frac{\cos(p-q) - \cos(p+q)}{2}$$

$$\sin p\cos q = \frac{\sin(p+q) + \sin(p-q)}{2}$$

Duplication, linéarisation

($\alpha \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$)

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}, \quad \alpha \text{ et } 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \qquad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

Exponentielle complexe ($\theta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Formule de Moivre : $e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\tan\theta = i\frac{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}{e^{-i\theta} + e^{i\theta}}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Limites

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1, \qquad \lim_{\alpha\to 0}\frac{1 - \cos\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\tan\alpha}{\alpha} = 1$$

Fonctions hyperboliques

Définitions – Propriétés immédiates

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1\,, \qquad \operatorname{ch} x \geqslant 1\,, \qquad -1 < \operatorname{th} x < 1$$

Formules d'addition

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b\,, \qquad \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b\,, \qquad \operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

$$\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b\,, \qquad \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b\,, \qquad \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

Développement

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \frac{\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)}{2}\,, \qquad \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)}{2}\,, \qquad \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b = \frac{\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)}{2}$$

Factorisation

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}\,, \qquad \operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}\,, \qquad \operatorname{th} p + \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p+q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q}$$

$$\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}\,, \qquad \operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \operatorname{ch} \frac{p+q}{2}\,, \qquad \operatorname{th} p - \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p-q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q}$$

Duplication, linéarisation

$$\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 2\operatorname{sh}^2 a + 1$$

$$\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{ch}^2 a = \frac{\operatorname{ch} 2a + 1}{2}\,, \qquad \operatorname{sh}^2 a = \frac{\operatorname{ch} 2a - 1}{2}$$

Relations utiles

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \quad (\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)^n = \operatorname{ch} na + \operatorname{sh} na$$

$$(\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a)^n = \operatorname{ch} na - \operatorname{sh} na$$

$$\operatorname{ch} 2a = \frac{1 + \operatorname{th}^2 a}{1 - \operatorname{th}^2 a}\,, \qquad \operatorname{sh} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 - \operatorname{th}^2 a}$$

$$\operatorname{th} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}\,, \qquad \exp 2a = \frac{1 + \operatorname{th} a}{1 - \operatorname{th} a}$$

Fonctions hyperboliques réciproques

$$\operatorname{Arg\,ch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\,, \qquad \operatorname{Arg\,sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\,, \qquad \operatorname{Arg\,th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

(pour $x > 1$) (pour $x \in]-1, 1[$)

Dérivées usuelles

Fonctions		Dérivées	Intervalles
x^n ,	$n \in \mathbb{Z}$	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$
x^a ,	$a \in \mathbb{R}$	$a\,x^{a-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
u^x ,	$u \in \mathbb{R}_+^*$	$u^x \ln u$	$\mathbb{R}$
$\ln\lvert x\rvert$		$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\log_a \lvert x\rvert$,	$a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$\mathbb{R}^*$
$\cos x$		$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$		$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$		$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$
$\mathrm{ch}\, x$		$\mathrm{sh}\, x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}\, x$		$\mathrm{ch}\, x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}\, x$		$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x$	$\mathbb{R}$
$\arccos x$		$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,\, 1[$
$\arcsin x$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,\, 1[$
$\arctan x$		$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{argch}\, x$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1,\, +\infty[$
$\mathrm{argsh}\, x$		$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{argth}\, x$		$\dfrac{1}{1-x^2}$	$]-1,\, 1[$

$$[a\,f(x) + b\,g(x)]' \;=\; a\,f'(x) + b\,g'(x)\,, \qquad a,\, b \,\in\, \mathbb{R}$$

$$f(ax) \;=\; af'(ax)\,, \qquad a \,\in\, \mathbb{R}$$

$$[f(x)g(x)]' \;=\; f'(x)g(x) \;+\; f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' \;=\; -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' \;=\; \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(g \circ f)'\,(x) \;=\; f'(x) \times (g' \circ f)\,(x)$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) \;=\; \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$

Primitives usuelles

Fonctions		Primitives	Intervalles
$(x-a)^\alpha$,	$a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}-\{1\}$	$\dfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]a,\, +\infty[$
$\dfrac{1}{x-a}$,	$a \in \mathbb{R}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$\mathbb{R}-\{a\}$
$\ln x$		$x(\ln x - 1)$	$\mathbb{R}_+^*$
e^{ax} ,	$a \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{e^{ax}}{a}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$		$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$		$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$		$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right\}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$		$\tan x$	$\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right\}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$		$-\dfrac{1}{\tan x}$	$\mathbb{R}-\pi\mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos x}$		$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right\}$
$\dfrac{1}{\sin x}$		$\ln\left\lvert\tan\dfrac{x}{2}\right\rvert$	$\mathbb{R}-\pi\mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$		$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$		$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$		$\ln(\operatorname{ch} x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$		$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$		$-\dfrac{1}{\operatorname{th} x}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$		$\begin{cases} 2\arctan(e^x) \\ 2\arctan\left(\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right) = \arctan(\operatorname{sh} x)\end{cases}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$		$\ln\left\lvert\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$,	$a \in \mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2}$		$\begin{cases} \operatorname{argth} x \\ \dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert\end{cases}$	$]-1,\, 1[$ $\mathbb{R}-\{-1,\, 1\}$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$,	$a \in \mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert$	$\mathbb{R}-\{-a,\, a\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\arcsin x = \dfrac{\pi}{2}-\arccos x$	$]-1,\, 1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$,	$a \in \mathbb{R}_+^*$	$\arcsin\dfrac{x}{a}$	$]-a,\, a[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$		$\operatorname{argsh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$,	$a \in \mathbb{R}_+^*$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$\begin{cases} \operatorname{argch} x \\ -\operatorname{argch}(-x) \\ \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert\end{cases}$	$]1,\, +\infty[$ $]-\infty,\, -1]$ $\mathbb{R}-[-1,\, 1]$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$a \in \mathbb{R}_+^*$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert$	$\mathbb{R}-[-a,\, a]$

Formule d'intégration par parties : $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g(x)'\,\mathrm{d}x\,.$

Développements limités usuels (au voisinage de 0)

Fonctions	Développements
$f(x)$	$f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$
e^x	$1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$
$\operatorname{ch} x$	$1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$
$\operatorname{sh} x$	$x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$
$\operatorname{th} x$	$x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+o\left(x^6\right)$
$\cos x$	$1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$
$\sin x$	$x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^n\right)$
$\tan x$	$x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+o\left(x^6\right)$
$(1+x)^\alpha\,,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$1+\dfrac{\alpha}{1!}x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$
$\dfrac{1}{1+x}$	$1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+o\left(x^n\right)$
$\dfrac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+\ldots+x^n+o\left(x^n\right)$
$\ln(1+x)$	$x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$
$\sqrt{1+x}$	$1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}x^n+o\left(x^n\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{8}x^2+\ldots+(-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n+o\left(x^n\right)$
$\operatorname{Arg\,th} x$	$x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$
$\arctan x$	$x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$
$\operatorname{Arg\,sh} x$	$x-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{4!}{2^4(2!)^2}\dfrac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)$
$\arcsin x$	$x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{4!}{2^4(2!)^2}\dfrac{x^5}{5}+\ldots+\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)$

avec $o(x^n)$ une fonction vérifiant $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^n\right)}{x^n}=0\,.$

Vecteurs

On note les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$.

- Produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \;=\; u_x v_x \;+\; u_y v_y \;+\; u_z v_z \,.$$

- Norme :

$$||\vec{u}|| \;=\; \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \;=\; \sqrt{u_x u_x \;+\; u_y u_y \;+\; u_z u_z}\,.$$

- Angle entre deux vecteurs $\theta = \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$\cos\theta \;=\; \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||}\,.$$

- Produit vectoriel :

$$\vec{w} \;=\; \vec{u} \times \vec{v} \quad \text{avec} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}\,.$$

On a $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$ ainsi que $||\vec{w}|| = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\,|\sin\theta|$ avec $\theta = \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$.

- Double produit vectoriel :

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \;=\; (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}\,,$$
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \;=\; (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{u}\,.$$

- Produit mixte : on note $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\,) = (\vec{u} \times \vec{v}\,) \cdot \vec{w}$, on a

$$\begin{aligned}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\,) \;&=\; (\vec{w},\vec{u},\vec{v}\,) \;=\; (\vec{v},\vec{w},\vec{u}\,) \\ &=\; (u_x v_y w_z + u_z v_x w_y + u_y v_z w_x) - (u_x v_z w_y + u_y v_x w_z + u_z v_y w_x)\;.\end{aligned}$$

La valeur absolue du produit mixte est égale au volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

- Relations utiles :

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}\,) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}\,) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}\,) \;=\; \vec{0}\,,$$

$$\big(\vec{a} \times \vec{b}\big) \cdot \big(\vec{c} \times \vec{d}\big) = \big(\vec{a} \cdot \vec{c}\big)\big(\vec{b} \cdot \vec{d}\big) - \big(\vec{a} \cdot \vec{d}\big)\big(\vec{b} \cdot \vec{c}\big)\,,$$

$$\begin{aligned}\big(\vec{a} \times \vec{b}\big) \times \big(\vec{c} \times \vec{d}\big) &= \Big[\big(\vec{a} \times \vec{b}\big) \cdot \vec{d}\Big]\,\vec{c} - \Big[\big(\vec{a} \times \vec{b}\big) \cdot \vec{c}\Big]\,\vec{d} \\ &= \Big[\big(\vec{c} \times \vec{d}\big) \cdot \vec{a}\Big]\,\vec{b} - \Big[\big(\vec{c} \times \vec{d}\big) \cdot \vec{b}\Big]\,\vec{a}\,.\end{aligned}$$

Opérateurs différentiels de l'analyse vectorielle

On considère p un « champ scalaire », c'est à dire une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et $\vec{A}$ un « champ vectoriel », c'est à dire une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & p(x,y,z) \end{array} \quad , \qquad \vec{A} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \vec{A}(x,y,z) \end{array}$$

où les composantes de $\vec{A}$, notées A_x, A_y et A_z, sont des fonctions de (x,y,z).

- Opérateur (vectoriel) gradient

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = \frac{\partial p}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial p}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial p}{\partial z}\,\vec{u}_z\,.$$

- Opérateur (vectoriel) rotationnel

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z\,.$$

- Opérateur (scalaire) divergence

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\,.$$

- Laplacien scalaire

$$\Delta p = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p\right) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\,.$$

- Laplacien vectoriel

$$\Delta\vec{A} = \Delta A_x\,\vec{u}_x + \Delta A_y\,\vec{u}_y + \Delta A_z\,\vec{u}_z\,.$$

- Propriétés

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p\right) = \vec{0}\,, \qquad \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\right) = 0\,, \qquad \Delta\,\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}\right) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\right)\,,$$

$$\Delta\,(fg) = g\Delta f + 2\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g + f\Delta g\,.$$

- Théorème d'Ostogradsky (*flux-divergence*)

S étant une surface fermée limitant le volume V : $\displaystyle\iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\;\mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}V\,.$

- Théorème de Stokes (*circulation-rotationnel*)

$\mathcal{C}$ étant une courbe fermée limitant la surface S : $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\cdot\vec{n}\;\mathrm{d}S\,.$

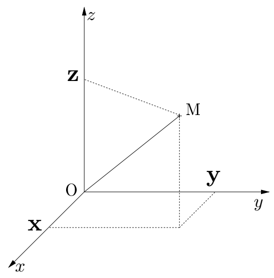
- *Pseudo-vecteur* nabla

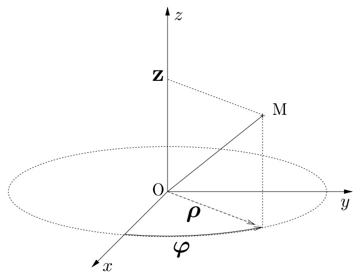
$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{grad}} & \equiv \quad \vec{\nabla} \\ \mathrm{div} & \equiv \quad \vec{\nabla}\cdot \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}} & \equiv \quad \vec{\nabla}\times \end{cases}$$

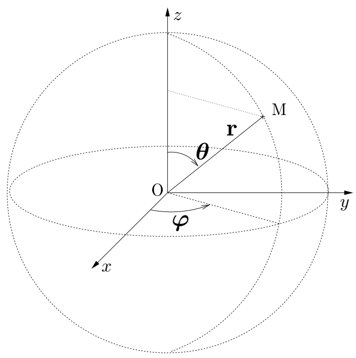
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = \vec{\nabla}\, p\,, \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}\,, \qquad \mathrm{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,.$$

Systèmes de coordonnées

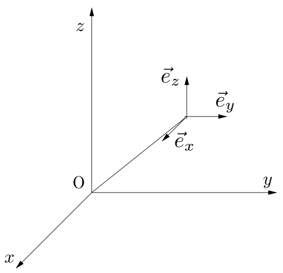
Cartésiennes $(x,\, y,\, z)$	**Cylindriques** $(\rho,\, \varphi,\, z)$	**Sphériques** $(r,\, \theta,\, \varphi)$

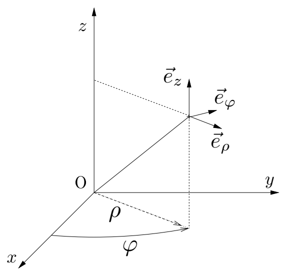


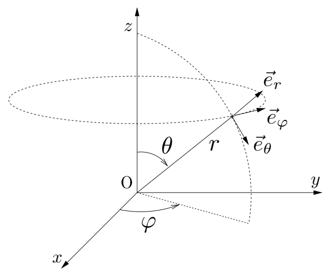




Base locale







Vecteur position

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$	$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z$ $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z \end{cases}$	$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$ $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

Volume élémentaire

$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

Opérateur gradient

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$	$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$	$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$

Opérateur divergence

$\mathrm{div}\,\vec{A} = \dfrac{\partial Ax}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$	$\mathrm{div}\,\vec{A} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$	$\mathrm{div}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$

Opérateur rotationnel

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\dfrac{\partial A_\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \dfrac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi$

Opérateur laplacien scalaire

$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\Delta f = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\Delta f = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$

Constantes physiques dans le système SI

Cf. `http://physics.nist.gov/cuu/Constants/`

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 299\,792\,458\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
Vitesse du son dans l'air dans les CNTP (conditions normales de température et de pression)	$331\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
Pression atmosphérique	$101325\ \mathrm{Pa}$
Constante de gravitation universelle	$G = 6,674\,28\ 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Accélération normale de la pesanteur à la surface de la Terre	$9,806\,65\ \mathrm{m\,s^{-2}}$
Permitivité électrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,854\,187\,817\ 10^{-12}\ \mathrm{F\,m^{-1}}$ $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\ 10^9\ \mathrm{F^{-1}\,m}$
Perméabilité magnétique du vide $(\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1)$	$\mu_0 = 12,566\,370\,614\ 10^{-7}\ \mathrm{N\,A^{-2}}$ $= 4\pi\ 10^{-7}\ \mathrm{N\,A^{-2}}$
Masse volumique de l'air dans les CNTP	$1,293\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$
Point de fusion de la glace	$0\ °\mathrm{C} = 273,15\ \mathrm{K}$
Unité de masse atomique	$1\ \mathrm{u} = 1,660\,538\,782\ 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Volume molaire du gaz parfait normal (0 °C, 1 atm)	$V_m^0 = 22,413\,996\ 10^{-3}\ \mathrm{m^3\ mol^{-1}}$
Nombre d'Avogadro	$\mathcal{N} = 6,022\,141\,79\ 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314\,472\ \mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
Constante de Boltzmann $(k\mathcal{N} = R)$	$k = 1,380\,6504\ 10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}}$
Charge élémentaire (charge électrique du proton)	$e = 1,602\,176\,487\ 10^{-19}\ \mathrm{C}$
Constante de Faraday $(F = \mathcal{N}\,e)$	$F = 96\,485,3399\ \mathrm{C\,mol^{-1}}$
Constante de Planck	$h = 6,626\,068\,96\ 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$
Quantum de moment cinétique $(\hbar = \frac{h}{2\pi})$	$\hbar = 1,054\,571\,628\ 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$
Masse de l'électron au repos	$m_e = 9,109\,382\,15\ 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Masse du proton au repos $(m_p \approx 1836\,m_e)$	$m_p = 1,672\,621\,637\ 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Masse du neutron au repos	$m_n = 1,674\,927\,211\ 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Rayon « classique » de l'électron $(r_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_e c^2})$	$r_0 = 2,817\,940\,2894\ 10^{-15}\ \mathrm{m}$
Rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental $(a_0 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{2 m_e c^2})$	$a_0 = 0,529\,177\,208\,59\ 10^{-10}\ \mathrm{m}$
Magnéton de Bohr $(\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e})$	$\mu_B = 927,400\,915\ 10^{-26}\ \mathrm{J\ T^{-1}}$
Constante de Rydberg limite $(R_\infty = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^3 h^3 c})$	$R_\infty = 1,097\,373\,156\,8527\ 10^7\ \mathrm{m^{-1}}$

$101325\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{atm} = 1\ \mathrm{bar} = 760\ \mathrm{mmHg}$, $\quad 1\ \text{Å} = 10^{-10}\ \mathrm{m}$.

Préfixes

deca	→	10^1	symbole	da	deci	→	10^{-1}	symbole	d
hecto	→	10^2		h	centi	→	10^{-2}		c
kilo	→	10^3		k	milli	→	10^{-3}		m
mega	→	10^6		M	micro	→	10^{-6}		μ
giga	→	10^9		G	nano	→	10^{-9}		n
tera	→	10^{12}		T	pico	→	10^{-12}		p
pecta	→	10^{15}		P	femto	→	10^{-15}		f
exa	→	10^{18}		E	atto	→	10^{-18}		a

Unités du système international et unités dérivées

Unités de base du système international

Les unités de base sont au nombre de sept :

- Le mètre (m), unité de longueur
- Le kilogramme (kg), unité de masse
- La seconde (s), unité de durée
- L'ampère (A), unité d'intensité de courant électrique
- Le kelvin (K), unité de température
- La mole (mol), unité de quantité de matière
- Le candela (cd), unité d'intensité lumineuse

Unités dérivées

Grandeur	Nom	Symbole	Expression à l'aide d'autres unités	Expression à l'aide des unités de base
Fréquence	hertz	Hz		s^{-1}
Force	newton	N		$kg\ m\ s^{-2}$
Pression	pascal	Pa	$N\ m^{-2}$	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$
Énergie	joule	J	N m	$kg\ m^{2}\ s^{-2}$
Puissance	watt	W	$J\ s^{-1}$	$kg\ m^{2}\ s^{-3}$
Charge électrique	coulomb	C		s A
Tension électrique	volt	V	$J\ C^{-1}$	$kg\ m^{2}\ s^{-3}\ A^{-1}$
Résistance électrique	ohm	Ω	$V\ A^{-1}$	$kg\ m^{2}\ s^{-3}\ A^{-2}$
Conductance électrique	siemens	S	$A\ V^{-1}$	$kg^{-1}\ m^{-2}\ s^{3}\ A^{2}$
Capacité électrique	farad	F	$C\ V^{-1}$	$kg^{-1}\ m^{-2}\ s^{4}\ A^{2}$
Induction magnétique	tesla	T	$V\ s\ m^{-2}$	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
Flux d'induction magnétique	weber	Wb	V s	$kg\ m^{2}\ s^{-2}\ A^{-1}$
Inductance électrique	henry	H	$V\ s\ A^{-1}$	$kg\ m^{2}\ s^{-2}\ A^{-2}$
Température	degré Celsius	°C		K
Angle plan	radian	rad		sans dimension
Angle solide	stéradian	sr		sans dimension
Flux lumineux	lumen	lm	cd sr	cd
Éclairement lumineux	lux	lx	$cd\ sr\ m^{-2}$	$cd\ m^{-2}$
Activité (radioactive)	becquerel	Bq		s^{-1}
Activité catalytique	katal	kat		$mol\ s^{-1}$

Autres unités courantes

Nom	Symbole	Valeur
angström	Å	10^{-10} m
année lumière	al	$\simeq 9,46\ 10^{15}$ m
parsec	pc	$\simeq 3,09\ 10^{16}$ m
degré	°	$\simeq$ 0,017 453 rad
kilowattheure	kWh	$3,6\ 10^{6}$ J
électronvolt	eV	$\simeq 1,6\ 10^{-19}$ J
kilocalorie	kcal	$\simeq$ 1,185 5 J
atmosphère	atm	101325 Pa
millimère de mercure	mmHg	$\simeq$ 133,322 Pa