Université **I**bn **K**haldoun **T**iaret - **F**aculté des **S**ciences
Appliquées - **D**épartement des **S**ciences et de la **T**echnologie

Date : 24/05/2015 **Deuxième Année** LMD-ST. **Durée** : 1h30mn

---

Solution détaillée de l'examen de Remplacement de Math 04

Exercice 01 : Soit $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

1) $f(z) = \cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \cosh y - \sin x (i \sinh y)$

$= \cos x \cosh y + i(-\sin x \sinh y)$ **0.5**

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Re(f)=P(x,y)=}\cos x \cosh y}$ et $\boxed{\text{Im(f)=Q(x,y)=-}\sin x \sinh y}$.

2) Montrons que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$:

Méthode 01 : $f'(z) = -\sin z \ \forall z \in \mathbb{C}$. **0.5**

Méthode 02 : Par les conditions de Cauchy-Riemann : **0.5** + **0.5**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = -\sin x \cosh y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -\sin x \cosh y \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \cos x \sinh y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\cos x \sinh y \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

3) Les valeurs de z :

$f(z) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow Im(f) = 0 \Longleftrightarrow -\sin x \sinh y = 0$ donc :

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Longrightarrow x = k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \boxed{z = k\pi + iy} \ ; \ k \in \mathbb{Z} \ et \ y \in \mathbb{R}. \quad \mathbf{0.75} \\ \qquad ou \\ \sinh y = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow \boxed{z = x} \ ; \ x \in \mathbb{R}. \quad \mathbf{0.75} \end{cases}$$

4) Soit l'équation : **0.25** **0.25**

$$\cos z = i \Longrightarrow \left(\overbrace{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} \right) = i \Longrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 2i \overset{\times e^{iz}}{\Longrightarrow} \overbrace{e^{2iz} - 2ie^{iz} + 1 = 0}.$$

Posons $e^{iz} = M$; on obtient : $M^2 - 2iM + 1 = 0 \Longrightarrow \Delta = -4 - 4 = -8 = (2\sqrt{2}i)^2$.

$$\begin{cases} M_1 = (1+\sqrt{2})i \Longrightarrow e^{iz} = (1+\sqrt{2})i \Longrightarrow iz = \ln|(1+\sqrt{2})i| + i(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi), \quad \mathbf{0.25} + \mathbf{0.75} \\ M_2 = (1-\sqrt{2})i \Longrightarrow e^{iz} = (1-\sqrt{2})i \Longrightarrow iz = \ln|(1-\sqrt{2})i| + i(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi). \quad \mathbf{0.25} + \mathbf{0.75} \end{cases}$$

Donc : $\boxed{z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(1+\sqrt{2})}$ ou $\boxed{z = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)}$; $k \in \mathbb{Z}$. **0.5** + **0.5**

Exercice 02 : Soit $P(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + x + 1$.

1) Montrons que P est harmonique sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2 + 1 \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 12x^2 - 12y^2. \end{cases} \boxed{01} \text{ et } \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 4y^3 - 12x^2y \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 12y^2 - 12x^2. \end{cases} \boxed{01} \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

2) Puisque f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ alors le couple (P,Q) vérifie les conditions de Cauchy-Riemann, c'est à dire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \cdots\cdots (1) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \cdots\cdots (2) \end{cases} \qquad \boxed{0.5}$$

De l'équation (1) on tire $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2 + 1$, d'où

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \int (4x^3 - 12xy^2 + 1)dy \\ &= 4x^3y - 4xy^3 + y + C(x). \qquad \boxed{01} \end{aligned}$$

d'une part d'autre part on a : $\boxed{0.75}$ $\boxed{0.25}$ $\boxed{0.5}$

$(2) \Longrightarrow 4y^3 - 12x^2y = -(\overbrace{12x^2y - 4y^3 + C'(x)}) \Longleftrightarrow \overbrace{C'(x) = 0} \Longrightarrow \overbrace{C(x) = c}\ ;\ c \in \mathbb{R}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Q(x,y)=4x}^3y - 4xy^3 + y + c}\ ;\ c \in \mathbb{R}.$$

3) On a $f(z) = f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y) \cdots (3)$ telle que : $f(0,0) = 1$

$\Longrightarrow f(0,0) = P(0,0) + iQ(0,0) \Longrightarrow 1 + ic = 1 \Longleftrightarrow \boxed{\text{c=0}}$. $\boxed{0.5}$

En substituant ceci dans (3), on obtient :

$$\begin{aligned} f(z) &= x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + x + 1 + i(4x^3y - 4xy^3 + y) \\ &= \boxed{\text{z}^4 + z + 1}. \qquad \boxed{01} \end{aligned}$$

4) La dérivée de f :

<u>Méthode 01(directe)</u> : $\boxed{\text{f'(z)=4z}^3 + 1}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. $\boxed{0.5}$

<u>Méthode 02</u> : Puisque f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \boxed{0.5} \\ &= 4x^3 - 12xy^2 + 1 + i(12x^2y - 4y^3) \\ &= \boxed{4\text{z}^3 + 1}. \qquad \boxed{0.5} \end{aligned}$$

Exercice 03 : Pour calculer l'intégrale il faut factoriser $3z^2 - 2z - 1$.

$$3z^2 - 2z - 1 = 0 \Longrightarrow \Delta = (-2)^2 + 12 = 16 = 4^2 \Longrightarrow \begin{cases} z_0 = \dfrac{2-4}{6} = -\dfrac{1}{3}, & \boxed{0.5} \\ z_1 = \dfrac{2+4}{6} = 1. & \boxed{0.5} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 3z^2 - 2z - 1 = 3(z - z_0)(z - z_1) = 3(z + \tfrac{1}{3})(z - 1). \qquad \boxed{0.75}$$

$$1\ ,\ -\frac{1}{3} \in int(C)\ ;\ C = \left|z - \frac{1}{2} + i\right| = \frac{6}{5}\ ?$$

$$\begin{cases} |-\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + i| = |-\dfrac{5}{6} + i| = \sqrt{\dfrac{25}{36} + 1} = \dfrac{\sqrt{61}}{6} > \dfrac{6}{5} \Longrightarrow \boxed{\text{-1/3} \notin int(C)}. & \boxed{0.5} \\ |1 - \dfrac{1}{2} + i| = |\dfrac{1}{2} + i| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} < \dfrac{6}{5} \Longrightarrow \boxed{1 \in int(C)}. & \boxed{0.5} \end{cases}$$

Donc il faut choisir la fonction $f(z) = \dfrac{\cos \pi z}{(z + \frac{1}{3})^2}$ qui est holomorphe dans $int(C)$. $\boxed{0.5}$

$$\Longrightarrow I = \int_C \frac{\cos \pi z}{9\left[(z + \frac{1}{3})(z - 1)\right]^2} dz = \frac{1}{9} \int_C \frac{\cos \pi z / (z + \frac{1}{3})^2}{(z - 1)^2} dz = \frac{1}{9} \int_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz. \quad \boxed{0.75}$$

On sait que f est holomorphe; $a = 1 \in int(C)$ et $n = 1$ donc :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{9} \int_C \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz \\ &= \frac{1}{9} \left(2\pi i \cdot \frac{f'(1)}{1!}\right) & \boxed{0.5} \\ &= \frac{1}{9} \cdot 2\pi i \left(\frac{2 \times 27}{64}\right) \\ &= \boxed{3\pi i/16}. & \boxed{0.5} \end{aligned}$$

FIN