Université **I**bn **K**haldoun **T**iaret - **F**aculté des **S**ciences
Appliquées - **D**épartement des **S**ciences et de la **T**echnologie

Date : 21/06/2015 **Deuxième Année** LMD-ST. **Durée** : 1h30mn

---

SOLUTION DÉTAILLÉE DE L'EXAMEN DE REMPLACEMENT DE MATH 04

Exercice 01 :

3) Soit l'équation :

$$2\sinh z - e^{-z} = -3i \Longrightarrow 2\overbrace{\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)}^{\boxed{0.5}} - e^{-z} = -3i \Longrightarrow e^z - 2e^{-z} = -3i \overset{\times e^z}{\Longrightarrow} \overbrace{e^{2z} + 3ie^z - 2 = 0}^{\boxed{0.5}}.$$

Posons $e^z = M$; on obtient : $M^2 + 3iM - 2 = 0 \Longrightarrow \Delta = -9 + 8 = -1 = i^2$.

$$\begin{cases} M_1 = -i \Longrightarrow e^z = -i \Longrightarrow z = \log(-i) = \ln|-i| + i(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi), \boxed{0.5}+\boxed{01} \\ M_2 = -2i \Longrightarrow e^z = -2i \Longrightarrow z = \log(-2i) = \ln|-2i| + i(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi). \boxed{0.5}+\boxed{01} \end{cases}$$

Donc : $\boxed{z = i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)}$ ou $\boxed{z = \ln 2 + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)}$; $k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{01}+\boxed{01}$

Exercice 02 : Soit $P(x,y) = 4xy^3 - 4x^3y - y + 2$.

1) Montrons que P est harmonique sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 4y^3 - 12x^2y \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -24xy. \end{cases} \boxed{01} \text{ et } \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2 - 4x^3 - 1 \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 24xy. \end{cases} \boxed{01} \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

2) Puisque f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ alors le couple (P, Q) vérifie les conditions de Cauchy-Riemann, c'est à dire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \cdots\cdots (1) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \cdots\cdots (2) \end{cases} \quad \boxed{0.5}$$

De l'équation (1) on tire $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 4y^3 - 12x^2y$, d'où

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \int (4y^3 - 12x^2y)dy \\ &= y^4 - 6x^2y^2 + C(x). \qquad \boxed{\mathbf{01}} \end{aligned}$$

d'une part d'autre part on a :

$$(2) \Longrightarrow 12xy^2 - 4x^3 - 1 = -\overbrace{(-12xy^2 + C'(x))}^{\boxed{0.75}} \Longleftrightarrow \overbrace{C'(x) = 4x^3 + 1}^{\boxed{0.25}} \Longrightarrow \overbrace{C(x) = x^4 + x + c}^{\boxed{0.5}}$$

telle que c constante réelle. Finalement :

$$\boxed{\text{Q(x,y)=x}^4 + y^4 - 6x^2y^2 + x + c}\ ;\ c \in \mathbb{R}.$$

3) On a $f(z) = f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y) \cdots (3)$ telle que : $f(0,0) = 2 + 3i$

$$\Longrightarrow f(0,0) = P(0,0) + iQ(0,0) \Longrightarrow 2 + ic = 2 + 3i \Longleftrightarrow \boxed{\text{c=3}}. \qquad \boxed{\mathbf{0.5}}$$

En substituant ceci dans (3), on obtient :

$$\begin{aligned} f(z) &= 4xy^3 - 4x^3y - y + 2 + i(x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + x + 3) \\ &= \boxed{\text{iz}^4 + iz + 2 + 3i}. \qquad \boxed{\mathbf{01}} \end{aligned}$$

4) La dérivée de f :

<u>Méthode 01(directe)</u> : $\boxed{\text{f'(z)=4iz}^3 + i}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. $\boxed{\mathbf{0.5}}$

<u>Méthode 02</u> : Puisque f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \boxed{\mathbf{0.5}} \\ &= 4y^3 - 12x^2y + i(4x^3 - 12xy^2 + 1) \\ &= \boxed{\text{4iz}^3 + i}. \qquad \boxed{\mathbf{0.5}} \end{aligned}$$

Exercice 03 :

Puisque $z \in C$ donc on a l'application suivante :

$$\begin{aligned} z : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \qquad \boxed{\mathbf{01.50}} \\ \theta &\longmapsto z(\theta) = -1 + 2e^{i\theta} \text{ et ceci implique que :} \end{aligned}$$

$$\boxed{dz = 2ie^{i\theta}\ d\theta} \text{ et } \boxed{|z|^2 = 5 - 4\cos\theta}. \qquad \boxed{\mathbf{0.5}} + \boxed{\mathbf{0.5}}$$

Donc on obtient :

$$
\begin{aligned}
\int_C |z|^2 dz &= \int_0^{2\pi} (5-4\cos\theta)2ie^{i\theta}\, d\theta \\
&= 2i\int_0^{2\pi} (5-4\cos\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\, d\theta \qquad \boxed{\mathbf{0.5}} \\
&= 2i\int_0^{2\pi} (5\cos\theta + 5i\sin\theta - 4\cos^2\theta - 4i\cos\theta\sin\theta)\, d\theta \\
&= 2i\int_0^{2\pi} \left[5\cos\theta + 5i\sin\theta - 4\Big(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\Big) - 4i\cos\theta\sin\theta\right] d\theta \qquad \boxed{\mathbf{01}} \\
&= 2i\left[5\sin\theta - 5i\cos\theta - 2\theta - \sin 2\theta - 2i\sin^2\theta\right]_0^{2\pi} \qquad \boxed{\mathbf{01}} \\
&= -8\pi i. \qquad \boxed{\mathbf{01}}
\end{aligned}
$$

FIN