Université **I**bn **K**haldoun **T**iaret - **F**aculté des **S**ciences
Appliquées - **D**épartement des **S**ciences et de la **T**echnologie

Date : 24/05/2015 **D**euxième **A**nnée LMD-ST. **Durée** : 1h30mn

---

Examen de Remplacement de Math 04

Exercice 01 (07 points) :

Soit $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et soit la fonction :

$$f(z) = \cos z.$$

1) Mettre $f(z)$ sous la forme $P(x, y) + iQ(x, y)$.

2) Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ par deux méthodes.

3) Pour quelle valeur de z ; la fonction $f(z)$ est-elle réelle ?

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$\cos z = i$$

Exercice 02 (08 points) :

- Soit $P(x, y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + x + 1$

1) Démontrer que cette fonction P est harmonique.

2) Trouver la fonction Q telle que f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ donnée par sa forme algébrique

$$f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

où $z = x + iy$, $P = Re(f)$ et $Q = Im(f)$

3) Exprimer $f(z)$ en fonction de z telle que $f(0, 0) = 1$.

4) Calculer $f'(z)$ par deux méthodes.

Exercice 03 (05 points) :

- Calculer l'intégrale suivante en utilisant la formule intégrale de Cauchy :

$$\int_C \frac{\cos \pi z}{(3z^2 - 2z - 1)^2} dz, \qquad C : \text{le cercle d'équation } \left|z - \tfrac{1}{2} + i\right| = \tfrac{6}{5}.$$

Bonne Chance