Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Faculté des Sciences Appliquées
Département des Sciences et de la Technologie
Année 2014-2015

~~~~~~

$2^{ème}$ Année LMD "ST" — *Module: Maths 5 (Méthodes numériques)*

Examen de Maths 5 (Méthodes numériques)

Date 03/06/2015
Durée : 1h30

Exercice 1 :Pour tout nombre réel β, on considère le système suivant:

$$(S)\begin{cases} 3x-2y+z=2\beta \\ 2x+y+z=7 \\ 4x-3y+2z=4 \end{cases}$$

Partie A

1) Résoudre le système (S) par la méthode de Gauss.
2) En utilisant la factorisation LU calculer le déterminant de A.
3) Est-ce que le système est bien conditionné? (utiliser $\|\|_\infty$).

Partie B Pour $\beta = 1$

1) Ecrire la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre le système.
2) Calculer le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{(1)}$ obtenu après la première itération avec $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3) Est-ce que la méthode de Gauss-Seidel appliquée au système converge ?

Exercice 2 :

Soit les points $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (1, 2), \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

a) Déterminer le polynome d'interpolation de Lagrange.

b) Calculer la valeur approchée de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx$, par la méthode de Simpson.
~~~~~~

Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Faculté des Sciences Appliquées
Département des Sciences et de la Technologie
Année 2014-2015

~~~~~~

$2^{\grave{e}me}$ Année LMD "ST" *Module: Maths 5 (Méthodes numériques)*

Corrigé Examen de Maths 5 du 03/06/2015

1point pour la rédaction

13 points **Exercice 1** :Pour tout nombre réel β, on considère le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Partie A 1) Résoudre le système (S) par la méthode de Gauss.

$$\boxed{0,5}\left\{\begin{array}{ccc|cl} 3 & -2 & 1 & 2\beta & L_1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 & L_2-\left(\frac{2}{3}\right)L_1 \\ 4 & -3 & 2 & 4 & L_3-\left(\frac{4}{3}\right)L_1 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{0,5}\left\{\begin{array}{ccc|cl} 3 & -2 & 1 & 2\beta & L_1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 7-\frac{4}{3}\beta & L_2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 4-\frac{8}{3}\beta & L_3-\left(-\frac{1}{7}\right)L_2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{0,5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\beta \\ 7-\frac{4}{3}\beta \\ 5-\frac{20}{7}\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta-1 \\ 2 \\ 7-4\beta \end{pmatrix}\boxed{1,5}$$

2) En utilisant la factorisation LU calculer le déterminant de A.

$$LU = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{-1}{7} & 1 \end{pmatrix}}_{\boxed{0,5}}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} \end{pmatrix}}_{\boxed{0,5}} \Rightarrow \underbrace{det A = det\,(U)}_{\boxed{0,5}} = \underbrace{5}_{\boxed{0,5}}$$

3) le système est mal conditionné ($\|A\|_\infty = \max_i \left\{\sum_j |a_{ij}|\right\}\boxed{0,25}$).

$cond\,(A) = \|A\|_\infty \underbrace{\left\|A^{-1}\right\|_\infty}^{\boxed{0,25}} = \max_i \{6,4,9\} \max_i \left\{\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, \frac{18}{5}\right\} = 9\frac{18}{5} = 12.6$ $\boxed{0,75}$

avec $A^{-1} = \underbrace{U^{-1}L^{-1}}_{\boxed{0,25}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{-1}{7} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -10 & 1 & 7 \end{pmatrix}\boxed{1,5}$

Partie B 1) Ecrire la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre le système.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}\boxed{0,5}$$

Méthode de Jacobi	Méthode de Gauss-Seidel
$X^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)X^{(k)} + D^{-1}b$	$X^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}UX^{(k)} + (D+L)^{-1}b$ $\boxed{0,5}$
$\begin{cases} x^{(k+1)} = \frac{2}{3}y^{(k)} - \frac{1}{3}z^{(k)} + \frac{2}{3} \\ y^{(k+1)} = -2x^{(k)} - z^{(k)} + 7 \\ z^{(k+1)} = -2x^{(k)} + \frac{3}{2}y^{(k)} + 2 \\ x^{(0)} = 1, y^{(0)} = 1, z^{(0)} = 1 \end{cases}$	$\boxed{1,5}\begin{cases} x^{(k+1)} = \frac{2}{3}y^{(k)} - \frac{1}{3}z^{(k)} + \frac{2}{3} \\ y^{(k+1)} = -2x^{(k+1)} - z^{(k)} + 7 = -\frac{4}{3}y^{(k)} - \frac{1}{3}z^{(k)} + \frac{17}{3} \\ z^{(k+1)} = -2x^{(k+1)} + \frac{3}{2}y^{(k+1)} + 2 = \frac{-10}{3}y^{(k)} - \frac{1}{6}z^{(k)} + \frac{55}{6} \\ x^{(0)} = 1, y^{(0)} = 1, z^{(0)} = 1 \end{cases}$
~~~~~~

2) Calculer le vecteur obtenu après la première itération.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 7-\frac{4}{3} \\ \frac{25}{2}-\frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{22}{3} \\ \frac{37}{3} \end{pmatrix} \boxed{0,75}$$

3) Est-ce que la méthode de Gauss-Seidel appliquée au système converge ?

$\boxed{0,25}$
$\rho\left(M_{G\text{-}S}\right) = \max\limits_{i} \{|\lambda_i|\}$ où λ_i valeur propre de la matrice de Gauss-Seidel $M_{G\text{-}S} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{11}{6} \end{pmatrix}$

$$\det\left(M_{G\text{-}S} - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3}-\lambda & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{11}{6}-\lambda \end{vmatrix} - \lambda^3 - \frac{19}{6}\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda \ \boxed{0,5}$$

alors $\rho\left(M_{G\text{-}S}\right) \boxed{0,5} = \max\left\{\frac{8}{3}, 0, \frac{1}{2}\right\} > 1$ et par conséquent la méthode de Gauss-Seidel ne converge pas.

6 points **Exercice 2** :1) Soit les points (x_i, y_i) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $(1, 2)$ $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ pour $i = 0, 1, 2$

a) Le polynome d'interpolation de Lagrange

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \sum_{i=0}^{2} l_i(x)\, y_i = l_0(x)\, y_0 + l_1(x)\, y_1 + l_2(x)\, y_2 \ \boxed{0,5} \qquad \text{où } l_i(x) = \prod_{i=0}^{2} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \ \boxed{0,5} \\ &= \frac{(x-1)}{\left(\frac{1}{2}-1\right)} \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{2} \ \boxed{0,5} + \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\left(1-\frac{3}{2}\right)} 2 \ \boxed{0,5} + \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)} \frac{(x-1)}{\left(\frac{3}{2}-1\right)} \frac{7}{2} \ \boxed{0,5} \\ &= 3x - 1 \ \boxed{0,5} \end{aligned}$$

b) La valeur approchée de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\, dx$, par la méthode de Simpson.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \boxed{0,5}$$

donc

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\, dx = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2} + 8 + \frac{7}{2}\right] = 2 \ \boxed{1} \quad \text{car} \left\{ \begin{array}{cccc} x_i & a = \frac{1}{2} \ \boxed{0,5} & \frac{a+b}{2} = 1 \ \boxed{0,5} & b = \frac{3}{2} \ \boxed{0,5} \\ y_i = f(x_i) & f(a) = \frac{1}{2} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2 & f(b) = \frac{7}{2} \end{array} \right.$$