Université **I**bn **K**haldoun **T**iaret - **F**aculté des **S**ciences
Appliquées - **D**épartement des **S**ciences et de la **T**echnologie

Date : 02/06/2015 **Deuxième Année** LMD-ST. **Durée** : 1h30mn

---

Solution détaillée de l'examen de Rattrapage de Math 04

Exercice 01 : Soit $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

1) $f(z) = \cosh z = \cosh(x+iy) = \cosh x \ \cosh(iy) + \sinh x \ \sinh(iy)$

$$= \cosh x \ \cos y + \sinh x \ (i \sin y) = \cosh x \ \cos y + i(\sinh x \ \sin y) \qquad \boxed{01}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\text{Re(f)=P(x,y)= } \cosh x \ \cos y} \text{ et } \boxed{\text{Im(f)=Q(x,y)=}\sinh x \ \sin y}.$$

2) Montrons que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$:

Méthode 01 : $f'(z) = \sinh z \ \forall z \in \mathbb{C}$. $\boxed{0.5}$

Méthode 02 : Par les conditions de Cauchy-Riemann : $\boxed{01} + \boxed{01}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \sinh x \ \cos y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \sinh x \ \cos y \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\cosh x \ \sin y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \cosh x \ \sin y \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

3) Soit l'équation : $\boxed{0.25}$ $\boxed{0.25}$

$$2\cosh z + e^{-z} = -2 \Longrightarrow 2\left(\overbrace{\frac{e^z + e^{-z}}{2}}\right) + e^{-z} = -2 \Longrightarrow e^z + 2e^{-z} = -2 \stackrel{\times e^z}{\Longrightarrow} \overbrace{e^{2z} + 2e^z + 2 = 0}.$$

Posons $e^z = M$; on obtient : $M^2 + 2M + 2 = 0 \Longrightarrow \Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$.

$$\begin{cases} M_1 = -1 + i \Longrightarrow e^z = -1 + i \Longrightarrow z = \log(-1+i) = \ln|-1+i| + i(\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi), \boxed{0.25} + \boxed{0.75} \\ M_2 = -1 - i \Longrightarrow e^z = -1 - i \Longrightarrow z = \log(-1-i) = \ln|-1-i| + i(\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi). \boxed{0.25} + \boxed{0.75} \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\text{z=}\ln\sqrt{2} + i\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)}$ ou $\boxed{\text{z=}\ln\sqrt{2} + i\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)}$; $k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{0.5} + \boxed{0.5}$

Exercice 02 : Soit $P(x,y) = 2x^4 + 2y^4 - 12x^2y^2 + y + 1$.

1) Montrons que P est harmonique sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 8x^3 - 24xy^2 \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 24x^2 - 24y^2. \end{cases} \boxed{01} \text{ et } \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 8y^3 - 24x^2y + 1 \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 24y^2 - 24x^2. \end{cases} \boxed{01} \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

2) Puisque f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ alors le couple (P,Q) vérifie les conditions de Cauchy-Riemann, c'est à dire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \quad \cdots\cdots (1) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \cdots\cdots (2) \end{cases} \qquad \boxed{0.5}$$

De l'équation (1) on tire $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 8x^3 - 24xy^2$, d'où

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \int (8x^3 - 24xy^2)dy \\ &= 8x^3y - 8xy^3 + C(x). \qquad \boxed{01} \end{aligned}$$

d'une part d'autre part on a :

$$(2) \Longrightarrow 8y^3 - 24x^2y + 1 = -\overbrace{(24x^2y - 8y^3 + C'(x))}^{\boxed{0.75}} \Longleftrightarrow \overbrace{C'(x) = -1}^{\boxed{0.25}} \Longrightarrow \overbrace{C(x) = -x + c}^{\boxed{0.5}}$$

telle que c constante réelle. Finalement :

$$\boxed{Q(x,y) = 8x^3y - 8xy^3 - x + c}\ ;\ c \in \mathbb{R}.$$

3) On a $f(z) = f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y) \cdots\cdots (3)$ telle que : $f(0,0) = 1 + i$

$$\Longrightarrow f(0,0) = P(0,0) + iQ(0,0) \Longrightarrow 1 + ic = 1 + i \Longleftrightarrow \boxed{c=1}. \qquad \boxed{0.5}$$

En substituant ceci dans (3), on obtient :

$$\begin{aligned} f(z) &= 2x^4 + 2y^4 - 12x^2y^2 + y + 1 + i(8x^3y - 8xy^3 - x + 1) \\ &= \boxed{2z^4 - iz + 1 + i}. \qquad \boxed{01} \end{aligned}$$

4) La dérivée de f :

<u>Méthode 01(directe)</u> : $\boxed{f'(z) = 8z^3 - i}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. $\boxed{0.5}$

<u>Méthode 02</u> : Puisque f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \boxed{0.5} \\ &= 8x^3 - 24xy^2 + i(24x^2y - 8y^3 - 1) \\ &= \boxed{8z^3 - i}. \qquad \boxed{0.5} \end{aligned}$$

Exercice 03 :

Puisque $z \in C$ donc on a l'application suivante :

$$\begin{aligned} z : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \qquad \boxed{\mathbf{01.50}} \\ \theta &\longmapsto z(\theta) = i + e^{i\theta} \text{ et ceci implique que :} \end{aligned}$$

$$\boxed{dz = ie^{i\theta}\, d\theta} \text{ et } \boxed{\overline{z} = -i + e^{-i\theta}}. \qquad \boxed{\mathbf{0.5}} + \boxed{\mathbf{0.5}}$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned} \int_C (\overline{z})^2 dz &= \int_0^{2\pi} (-i + e^{-i\theta})^2 ie^{i\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-1 - 2ie^{-i\theta} + e^{-i2\theta}) ie^{i\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-ie^{i\theta} + 2 + ie^{-i\theta})\, d\theta \qquad \boxed{\mathbf{0.5}} \\ &= \big[- e^{i\theta} + 2\theta - e^{-i\theta} \big]_0^{2\pi} \qquad \boxed{\mathbf{01}} \\ &= 4\pi. \qquad \boxed{\mathbf{01}} \end{aligned}$$

Fin