



EXAMEN DE RATTRAPAGE DE MATH 04

Exercice 01 (07 points) :

Soit $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et soit la fonction :

$$f(z) = \cosh z.$$

- 1) Mettre $f(z)$ sous la forme $P(x, y) + iQ(x, y)$.
- 2) Montrer que f est holomorphe sur \mathbb{C} par deux méthodes.
- 3) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante :

$$2 \cosh z + e^{-z} = -2.$$

Exercice 02 (08 points) :

- Soit $P(x, y) = 2x^4 + 2y^4 - 12x^2y^2 + y + 1$.

- 1) Démontrer que cette fonction P est harmonique.
- 2) Trouver la fonction Q telle que f une fonction holomorphe sur \mathbb{C} donnée par sa forme algébrique

$$f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

où $z = x + iy$, $P = \operatorname{Re}(f)$ et $Q = \operatorname{Im}(f)$

- 3) Exprimer $f(z)$ en fonction de z telle que $f(0, 0) = 1 + i$.
- 4) Calculer $f'(z)$ par deux méthodes.

Exercice 03 (05 points) :

- Calculer l'intégrale curviligne suivante :

$$\int_C (\bar{z})^2 dz, \quad C : \text{le cercle d'équation } |z - i| = 1.$$