Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Faculté des Sciences Appliquées
Département des Sciences et de la Technologie
Année 2014-2015

~~~~~~

$2^{ème}$ Année LMD "ST" — *Module: Maths 5 (Méthodes numériques)*

Examen de Maths 5 (Méthodes numériques)

Date 18/05/2015

Durée : 1h30

0,5 pour la rédaction

3,5 points **Question de cours** :

1) Comparer les quatres méthodes: méthode de dichotomie, de point fixe, de Newton et de la sécante.
2) Calculer la solution approchée de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = 2xy & \forall x \in [1,2] \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

10 points **Exercice 1** :Pour tout nombre réel α, on considère le système suivant :

$$(S)\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -x + 2y = \alpha \\ x + 4z = 1 \end{cases}$$

Partie A

1) Résoudre le système (S) par la méthode de Gauss.
2) En utilisant la factorisation LU calculer le déterminant de A.
3) Est-ce que le système est bien conditionné? (utiliser $\|\|_\infty$).

Partie B

1) Ecrire la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre le système.
2) Calculer le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{(1)}$ obtenu après la première itération avec $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3) Est-ce que la méthode de Gauss-Seidel appliquée au système converge ?

6 points **Exercice 2** :

1) Soit les points $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 1, 2, 3$

$$\left(-\frac{1}{2}, 0\right), (0, 1), \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

a) Déterminer le polynome d'interpolation de Lagrange.

b) Calculer la valeur approchée de l'intégrale $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$, par la méthode de Simpson.

2) Soit la fonction

$$f(x) = 2x + 1.$$

Discuter l'erreur de calcul dans a), b).
~~~~~~

Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Faculté des Sciences Appliquées
Département des Sciences et de la Technologie
Année 2014-2015

~~~~~~

$2^{ème}$ Année LMD "ST" — *Module: Maths 5 (Méthodes numériques)*

Examen de Maths 5 du 18/05/2015

Question de cours :

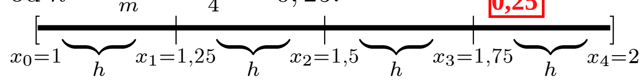
1) Comparaison

Méthode	*Dichotomie* 0,5	*Point fixe* 0,5	*Newton* 0,5	*La sécante* 0,5
avantage	*méthode sure*	*moins de calcul*	*moins de calcul,*	*sans condition*
incovénient	*trop de calcul*	*2 conditions difficiles à vérifies*	$f'(x) \neq 0$	*2 conditions initiales*

2) Calculer la solution approchée de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y_{n+1} & = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + \frac{1}{2}x_n y_n \quad \boxed{0{,}25} \\ y(1) & = 2 \end{cases}$$

où $h = \frac{b-a}{m} = \frac{2-1}{4} = 0,25$. 0,25



$\boxed{y_0 = 2}$ $\boxed{y_1 = 3}$ 0,25 $\boxed{y_2 = 4,875}$ 0,25 $\boxed{y_3 = 8,53125}$ 0,25 $\boxed{y_4 = 15,99609375}$ 0,25

Test d'arrêt $|y_4 - y_3| = 7,46... \leq \varepsilon$ (il faut prendre h plus petit)

Exercice 1 :Pour tout nombre réel α, on considère le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

Partie A 1) Résoudre le système (S) par la méthode de Gauss.

$$\boxed{0{,}5}\left\{\begin{array}{ccc|cl} 1 & 2 & -1 & 3 & L_1 \\ -1 & 2 & 0 & \alpha & L_2 - \boxed{(-1)}\, L_1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & L_3 - \boxed{1} L_1 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{0{,}5}\left\{\begin{array}{ccc|cl} 1 & 2 & -1 & 3 & L_1 \\ 0 & 4 & -1 & \alpha+3 & L_2 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & L_3 - \boxed{\left(-\frac{1}{2}\right)} L_2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{0{,}5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha+3 \\ \frac{\alpha-1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4\alpha+13}{9} \\ \frac{5\alpha+13}{18} \\ \frac{\alpha-1}{9} \end{pmatrix} \boxed{0{,}5}$$

2) En utilisant la factorisation LU calculer le déterminant de A.

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow detA = det(U) = 18 \quad \boxed{0{,}25}$$

0,25 0,25 0,25

3) Est-ce que le système est bien conditionné? (utiliser $\|A\|_\infty = \max\limits_i \left\{ \sum\limits_j |a_{ij}| \right\}$). 0,25

$$cond(A) = \|A\|_\infty \left\|A^{-1}\right\|_\infty = \max_i \{4, 3, 5\} \max_i \left\{1, \frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right\} = 5$$

0,25 0,25 0,25

$$\text{avec } A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 8 & -8 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

0,25 0,75
~~~~~~

Partie B 1) Ecrire la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre le système.

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}}_{L}+\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}}_{D}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{U} \quad \boxed{0{,}5}$$

Méthode de Jacobi	Méthode de Gauss-Seidel
$X^{(k+1)}=-D^{-1}(L+U)X^{(k)}+D^{-1}b$	$\boxed{0{,}5}$ $X^{(k+1)}=-(D+L)^{-1}UX^{(k)}+(D+L)^{-1}b$
$\begin{cases}x^{(k+1)}=-2y^{(k)}+z^{(k)}+3\\ y^{(k+1)}=\frac{1}{2}x^{(k)}+\frac{\alpha}{2}\\ z^{(k+1)}=\frac{-1}{4}x^{(k)}+\frac{1}{4}\\ x^{(0)}=0,y^{(0)}=1,z^{(0)}=0\end{cases}$	$\boxed{1{,}5}$ $\begin{cases}x^{(k+1)}=-2y^{(k)}+z^{(k)}+3\\ y^{(k+1)}=\frac{1}{2}x^{(k+1)}+\frac{\alpha}{2}=-y^{(k)}+\frac{1}{2}z^{(k)}+\frac{3+\alpha}{2}\\ z^{(k+1)}=\frac{-1}{4}x^{(k+1)}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}y^{(k)}+\frac{-1}{4}z^{(k)}-\frac{1}{2}\\ x^{(0)}=0,y^{(0)}=1,z^{(0)}=0\end{cases}$

2) Calculer le vecteur obtenu après la première itération.

$$\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}^{(1)}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\0&-1&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{-1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\\frac{\alpha+3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}} \quad \boxed{0{,}75}$$

3) Est-ce que la méthode de Gauss-Seidel appliquée au système converge ?

$\rho(M_{G\text{-}S})=\max_i\{|\lambda_i|\}$ $\boxed{0{,}5}$ où λ_i valeur propre de la matrice de Gauss-Seidel $M_{G\text{-}S}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\0&-1&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{-1}{4}\end{pmatrix}$ $\boxed{0{,}25}$

$$\boxed{0{,}25}\ \det(M_{G\text{-}S}-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda&-2&1\\0&-1-\lambda&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{-1}{4}-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)\left[(1+\lambda)\left(\frac{1}{4}+\lambda\right)-\frac{1}{4}\right]=-\lambda^2\left(\frac{5}{4}+\lambda\right)=0 \quad \boxed{0{,}25}$$

alors $\rho(M_{G\text{-}S})\ \boxed{0{,}25} =\max\{0,\frac{5}{4}\}>1$ et par conséquent la méthode de Gauss-Seidel ne $\boxed{0{,}25}$ converge pas.

Exercice 2 :1) Soit les points (x_i,y_i) $(-\frac{1}{2},0)$ $(0,1)$ $(\frac{1}{2},2)$ pour $i=0,1,2$

a) Le polynome d'interpolation de Lagrange EST

$$\begin{aligned}P_2(x)&=\sum_{i=0}^{2}l_i(x)y_i=l_0(x)y_0+l_1(x)\overset{\boxed{0{,}5}}{y_1}+l_2(x)y_2 \qquad où\ l_i(x)=\prod_{i=0}^{2}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\ \boxed{0{,}5}\\ &=\overset{\boxed{0{,}5}}{\frac{(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})}{(0+\frac{1}{2})(0-\frac{1}{2})}}y_1+\overset{\boxed{0{,}5}}{\frac{(x+\frac{1}{2})(x-0)}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-0)}}y_2=-(2x-1)(2x+1)+2x(2x+1)=\boxed{2x+1}\ \boxed{0{,}5}\end{aligned}$$

b) La valeur approchée de l'intégrale $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx$, par la méthode de Simpson.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] \quad \boxed{0{,}5}$$

donc

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx=\frac{1}{6}[4+2]=1\ \boxed{0{,}5} \quad \text{car} \quad \begin{cases}x_i & a=-\frac{1}{2}\ \boxed{0{,}5} & \frac{a+b}{2}=0\ \boxed{0{,}5} & b=\frac{1}{2}\ \boxed{0{,}5}\\ y_i=f(x_i) & f(a)=0 & f\left(\frac{a+b}{2}\right)=1 & f(b)=2\end{cases}$$

2) Soit la fonction $f(x)=2x+1$.

L'erreur de calcul dans a) est $E=0$ car $f(x)-P_2(x)=0$ $\boxed{0{,}5}$

L'erreur de calcul dans b) est $E=0$ car la valeur exacte est $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(2x+1)\,dx=1$ $\boxed{0{,}5}$