Corrigé de l'examen final de PHYSIQUE ②
(Session : Mai 2015)

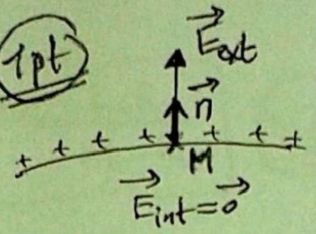
* Questions de cours : (4 pts)

1 - Théorème de Coulomb :

Le champ électrostatique juste à l'extérieur d'un conducteur chargé, au voisinage immédiat d'un point M de celui-ci, vaut :

$$\boxed{\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}}$$

(1pt)



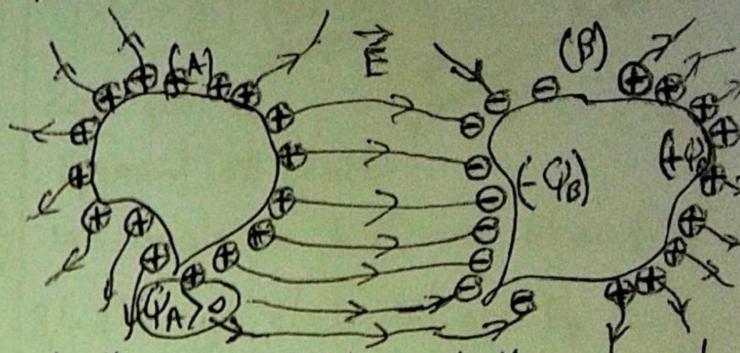
- σ : densité de charge surfacique en M.
- $\vec{n}$: vecteur unitaire normal à la surface du conducteur en M, dirigé vers l'extérieur.

2 - Le phénomène qui apparait lorsque l'on approche un conducteur (A) chargé positivement d'un conducteur (B) initialement neutre est le phénomène d'influence partielle. → (0,5pt)

- Il correspond au déplacement des charges électriques à l'intérieur du conducteur (B) quand ce dernier est placé dans le champ électrique du conducteur (A).

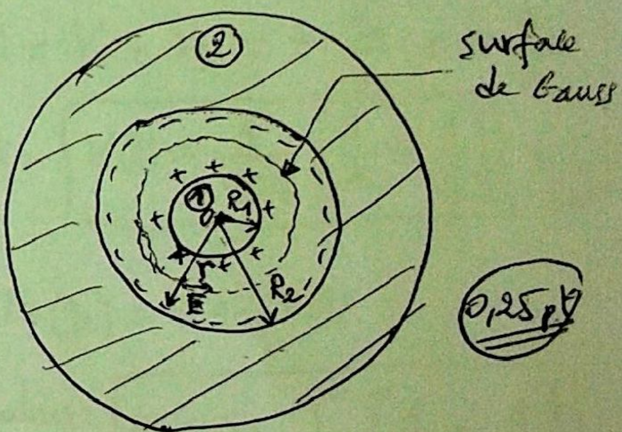
Explication : → sur (0,5 pt)

- Dès que l'on approche (A) de (B), il apparait sur la surface de (B) une charge ($q_B < 0$) sur la partie faisant face à (A) et une charge ($q_B > 0$) sur la partie opposée. Les charges sont de signes opposés pour assurer la neutralité de (B).



- L'influence est dite partielle car seule une partie des lignes de champ issues de (A) aboutit à (B).

3 - Capacité d'un condensateur sphérique



(0,25 pt)

- Les armatures (1) est (2) sont portées aux potentiels respectifs V_1 et V_2, les charges sont $+Q$ et $-Q$.
- La ddp entre les 2 armatures est donnée par la circulation du champ $\vec{E}$:

$$\boxed{V_1 - V_2 = -\int_{l_1}^{l_2} \vec{E}\cdot\vec{dl}}$$

(0,25 pt)

- L'expression de $\vec{E}$ est calculée par le théorème de Gauss. Il suffit de prendre comme surface de Gauss une sphère de rayon r compris entre R_1 et R_2.

On a alors:

$$\phi(\vec E) = \oiint_{(S_G)} \vec E \cdot \vec{dS} = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Soit: $\boxed{\vec E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec u_r}$ 0,5pt

• En prenant : $\vec{dl} = dr\,\vec u_r$

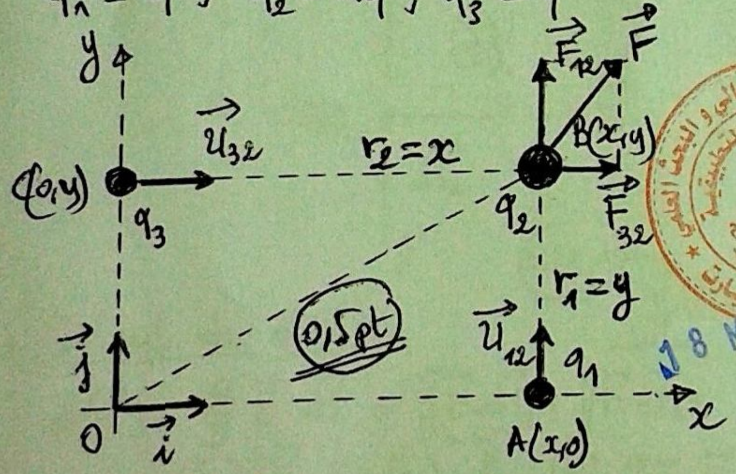
$$V_1 - V_2 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}$$ 0,5pt

On en déduit la capacité de ce condensateur:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_1-V_2} = 4\pi\varepsilon_0\,\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}}$$ 0,5pt

* Exercice N° 1: 4 pts

$q_1 = q$; $q_2 = 2q$; $q_3 = q$



1/- La résultante des forces $\vec F$ est la somme vectorielle des deux forces $\vec F_{12}$ (exercée par q_1 sur q_2) et $\vec F_{32}$ (exercée par q_3 sur q_2):

$$\vec F = \vec F_{12} + \vec F_{32}$$

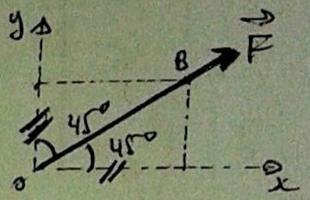
$$= k\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r_1^2}\,\vec u_{12} + k\,\frac{q_2\cdot q_3}{r_2^2}\,\vec u_{32}$$ 0,25pt

or: $\begin{cases} \vec u_{12} = \frac{y}{y}\vec j = \vec j & \text{0,25pt} \\ \vec u_{32} = \frac{x}{x}\vec i = \vec i & \text{0,25pt} \end{cases}$

Soit: $\boxed{\vec F = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x^2}\vec i + \frac{1}{y^2}\vec j\right]}$ 0,5pt

2/- $\vec F$ est portée sur OB, si:

$\boxed{x = y}$ 0,25pt



c.à.d que le segment OB fait un angle de 45° avec l'axe (Ox).

3/- L'énergie électrostatique E_p de q_2:

$\boxed{E_p(q_2) = q_2 \cdot V(B)}$ 0,5pt

où, V(B) est le potentiel total créé en B par q_1 et q_3, donc:

$$V(B) = V_1 + V_3 = k\,\frac{q_1}{r_1} + k\,\frac{q_3}{r_2}$$

Soit: $\boxed{V(B) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right]}$ 0,5pt

et: $E_p(q_2) = 2q \cdot V(B)$

Soit alors: $\boxed{E_p(q_2) = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right]}$ 0,5pt

4/- Calculons $(-\vec\nabla E_p)$:

$\boxed{-\vec\nabla E_p = -\vec{grad}(E_p)}$

En coordonnées cartésiennes:

$$\vec{grad}(E_p) = \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec i + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec j + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec k$$

$$= \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\vec i + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\vec j\right]$$

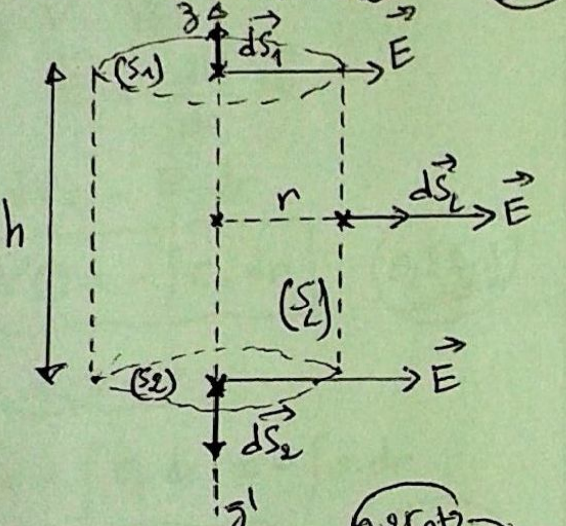
$$= \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{x^2}\vec i - \frac{1}{y^2}\vec j\right]$$ 0,25pt

$\Rightarrow \boxed{-\vec\nabla E_p = \vec F}$ 0,25pt

* Exercice N° 2 : (06 pts)

1/- Dû à la symétrie cylindrique, le champ est ⊥ à l'axe (Oz) et de module constant pour tous les points situés à la distance r de l'axe (Oz). $\vec{E}$ ne dépend que de r et il est de la forme : $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r}$

• Surface de Gauss : un cylindre d'axe (zz') de rayon r et de hauteur h. S_G est formée de la surface latérale S_L et des deux bases $S_1 = S_2$: (0,5 pt)



(0,25 pt) $(\vec{E} \perp d\vec{S}_2)$

• Calcul de $\phi(\vec{E})$:

$$\phi(\vec{E}) = \oint\!\!\oint_{(S_G)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{(S_1)} \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{S}_1}_{0} + \iint_{(S_2)} \overbrace{\vec{E}\cdot d\vec{S}_2}^{0} + \iint_{(S_L)} \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{S}_L}_{E.dS_L}$$

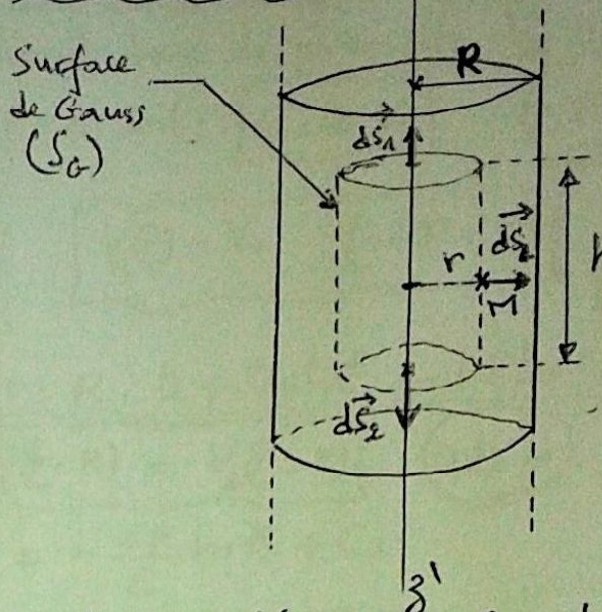
(0,25 pt) $(\vec{E} \perp d\vec{S}_1)$ (0,25 pt) (0,25 pt)

Comme E est constant sur S_L, alors :

$$\boxed{\phi(\vec{E}) = E . S_L = E . 2\pi r h}$$ (0,5 pt)

2/- E(r) :

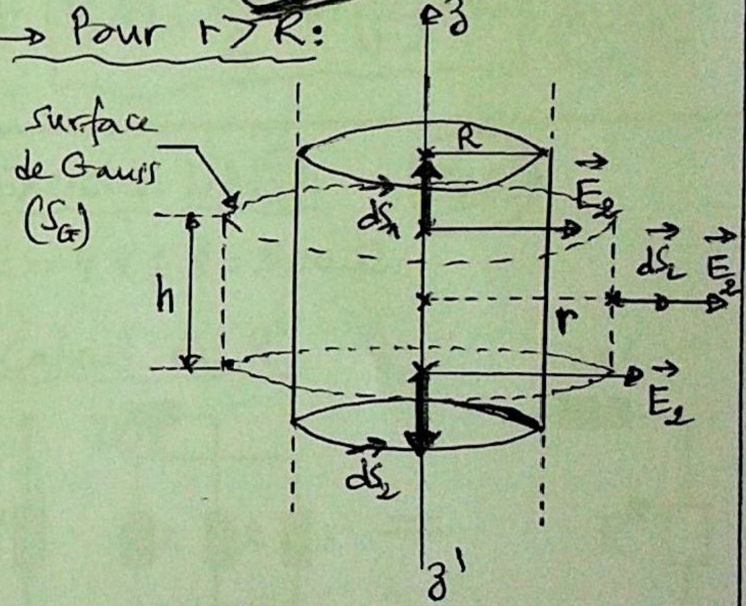
→ Pour $0 < r < R$:



• la charge intérieure à S_G est nulle :

$\boxed{Q_{int} = 0}$ (0,5 pt) $\Longrightarrow$ $\boxed{\vec{E}(r) = \vec{0}}$ (0,5 pt)

→ Pour $r > R$:



• la charge intérieure à S_G est celle portée par la surface du cylindre (R, h) incluse à l'intérieur de S_G, elle s'écrit :

$$Q_{int} = \iint \sigma\, dS = \sigma \iint R\, d\theta\, dz = \sigma R \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{h/2} dz$$

Soit : $\boxed{Q_{int} = \sigma\, 2\pi R h}$ (0,5 pt) le théorème de Gauss s'écrit donc:

$$\phi(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2\pi r h\, E_2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow 2\pi r h\, E_2 = \frac{\sigma\, 2\pi R h}{\varepsilon_0}$$

Soit: $E_2(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \frac{1}{r}$

et: $\boxed{\vec{E_2}(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r}$ 0,5pt

3/- $V(r)$:

Pour calculer le potentiel, on applique : $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)}$

comme : $V = V(r)$

alors : $\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$

$\Rightarrow dV = -E.dr$

$\Rightarrow \boxed{V(r) = -\int E.\,dr}$ 0,25pt

→ Pour $0 < r < R$:

$V_1(r) = -\int E_1.dr = -\int 0.dr$

soit : $\boxed{V_1(r) = C_1}$ 0,25pt

(C_1 : constante à déterminer)

→ Pour $r > R$:

$V_2(r) = -\int E_2.dr = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \int \frac{dr}{r}$

Soit : $\boxed{V_2(r) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln r + C_2}$ 0,25pt

(C_2 : constante à déterminer)

• Détermination des constantes C_1 et C_2 :

En $r = 0$, $V(0) = V_0$:

On choisit donc de prendre V_0 nul en $r = 0$, soit : $\boxed{C_1 = V_0}$ 0,25pt

et : $\boxed{V_1(r) = V_0 \quad (0 < r < R)}$ 0,25pt

• En $r = R$, le potentiel doit être continu

$\boxed{V_1(r=R) = V_2(r=R)}$ 0,25pt

$\Rightarrow V_0 = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln R + C_2$

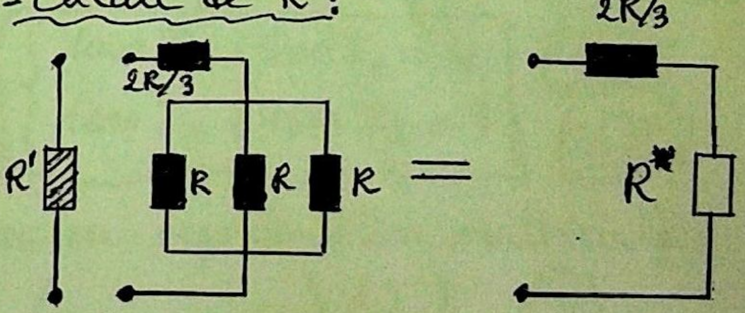
$\Rightarrow \boxed{C_2 = V_0 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln R}$ 0,25pt

et : $\boxed{V_2(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0}$ 0,25pt

* Exercice N° 3 : 06pts

• $E = 4\,V$; $R = 500\,\Omega$

1/- Calcul de R' :



• R' est équivalente à l'association en série de $(2R/3)$ et (R^*) :

$$\boxed{R' = \frac{2R}{3} + R^*}$$

et R^* équivalente à l'association en dérive des trois résistances de valeurs R :

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R} \Rightarrow \boxed{R^* = \frac{R}{3}}$$

Soit : $\boxed{R^* = 166{,}66\ \Omega}$ (0,25pt)

et : $\boxed{R' = R = 500\ \Omega}$ (0,25pt)

2/-

- Nombre de nœuds : $\boxed{N = 2 \quad (A \text{ et } B)}$ (0,25pt)
- Nombre de branches :

$\boxed{B = 3}$ (0,25pt)
$$\begin{cases} (A, 2E, 2R, B) \\ (A, E, R, B) \\ (A, E, R, R', B) \end{cases}$$

- Nombre de mailles indépendantes :

(0,25pt) $\boxed{M = B - N + 1} \Rightarrow \boxed{M = 2}$ (0,25pt)

2 mailles à choisir parmis :
$$\begin{cases} (A, 2E, 2R, B, R, E, A) = \text{maille } ① \\ (A, E, R, B, R', R, E, A) = \text{maille } ② \\ (A, 2E, 2R, B, R', R, E, A) = \text{maille } ③ \end{cases}$$

3/- Pour N nœuds on se limite à (N-1) eqt de nœuds :

En (A), la loi des nœuds s'écrit :

$\boxed{I_1 + I_2 = I_3}$ ---- ① (0,5pt)

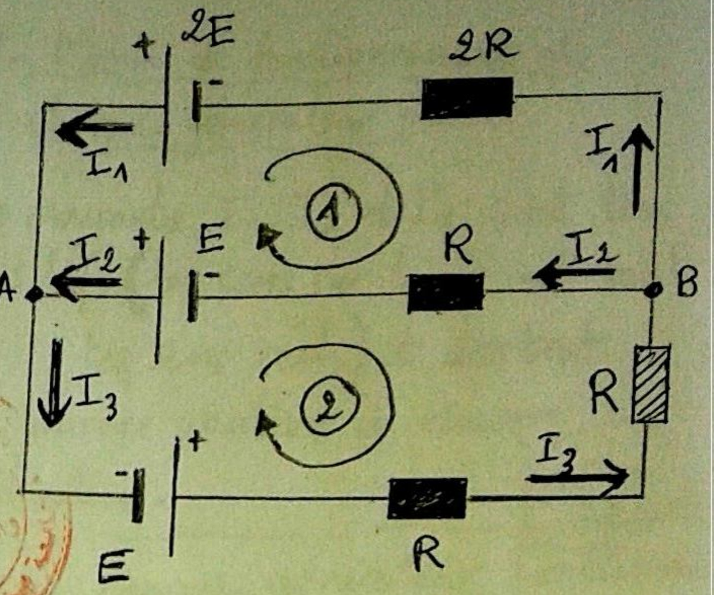
4/- Si on choisit par exemple les mailles ① et ② (voir circuit), la loi des mailles s'écrit :

Maille ① :

$$2E - 2RI_1 + RI_2 - E = 0$$

$\Rightarrow \boxed{2RI_1 - RI_2 = E}$ ---- ②

(0,5pt)



Maille ② : $E - RI_2 - RI_3 - RI_3 + E = 0$

$\Rightarrow \boxed{RI_2 + 2RI_3 = 2E}$ —— ③ (0,5pt)

5/- Calcul de I_1, I_2 et I_3 par la méthode de Cramer :

- Réécrivons ② et ③ en fct de I_1 et de I_2 seulement :

③ $\Rightarrow \boxed{2RI_1 + 3RI_2 = 2E}$

- Et le système de Cramer devient :

$$\boxed{\begin{cases} 1000\, I_1 - 500\, I_2 = 4 \\ 1000\, I_1 + 1500\, I_2 = 8 \end{cases}}$$ (0,5pt) (0,5pt)

ou en représentation matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1000 & -500 \\ 1000 & 1500 \end{pmatrix}}_{(A)} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Le système admet une solution unique pour I_1 et I_2 si et seulement si :

$$\boxed{\Delta = \det(A) \neq 0}$$

les solutions I_1 et I_2 sont données par :

$$I_1 = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -500 \\ 8 & 1500 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1000 & -500 \\ 1000 & 1500 \end{vmatrix}} = \frac{10^4}{2\times10^6}$$

$$= \frac{1}{200}$$

soit : $\boxed{I_1 = 0{,}005\ A}$ (0,5pt)

$$I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1000 & 4 \\ 1000 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1000 & -500 \\ 1000 & 1500 \end{vmatrix}} = \frac{4\times10^3}{2\times10^6}$$

soit : $\boxed{I_2 = 0{,}002\ A}$ (0,5pt)

A partir de l'eq^t ①, on tire I_3 :

$$I_3 = I_1 + I_2 \Rightarrow \boxed{I_3 = 0{,}007\ A}$$

(0,5pt)

18 MAI 2015

6/- Mode de fonctionnement de chaque générateur :

les courants I_1, I_2 et I_3 sont tous positifs (les sens sur le circuit sont les sens réels) et sortent des bornes positives de chaque générateur. (0,5pt)

Ainsi, chaque générateur fonctionne en mode générateur.

Fin du Corrigé

B. TOUIL